V. Quelques propriétés des applications holomorphes

Exercices

Exercice V.1. Soit f une fonction entière non constante. Démontrer que $f(\mathbf{C})$ est dense dans $\mathbf{C}$.

Exercice V.2. Rappelons que $\mathbf{U}$ désigne le cercle unité dans $\mathbf{C}$.

1. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω contenant le disque unité fermé. On suppose que $f(z) \in \mathbf{R}$ si $z \in \mathbf{U}$. Démontrer que f est constante. *On pourra considérer l'application* $\exp(\mathrm{i}f)$.
2. Soient f et g des fonctions holomorphes ne s'annulant pas dans un ouvert connexe Ω contenant le disque unité fermé. On suppose que $|f(z)| = |g(z)|$ pour tout $z \in \mathbf{U}$. Démontrer qu'il existe un nombre complexe $\lambda \in \mathbf{U}$ tel que $f = \lambda g$ sur Ω. Le résultat reste-t-il vrai si on ne suppose plus que f et g ne s'annulent pas?

Exercice V.3. Soient $\omega_1, \ldots, \omega_n$ des nombres complexes de module 1. Démontrer qu'il existe un nombre complexe ω de module 1 tel que

$$\prod_{k=1}^{n} |\omega - \omega_k| = 1.$$

Exercice V.4 (Lemme de Schwarz-Pick).

1. Montrer que le groupe des automorphismes bianalytiques du disque unité agit transitivement sur le disque.
2. Soit $f : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ une application holomorphe. En utilisant le lemme de Schwarz, montrer que pour tout x,y dans le disque unité on a
$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{1 - \overline{f(x)} f(y)} \right| \leqslant \left| \frac{x - y}{1 - \overline{x} y} \right|.$$
3. Soit $z \in \mathbf{D}$. Démontrer que
$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leqslant \frac{1}{1 - |z|^2}.$$
Quand a-t-on égalité?

Exercice V.5.

1. Soit $f : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe et soit m un entier $\geqslant 1$. On suppose que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(m-1)}(0) = 0$ et qu'il existe $M > 0$ tel que $|f(z)| \leqslant M$ pour $z \in \mathbf{D}$. Démontrer que l'application $g : z \mapsto f(z) z^{-m}$ définit une

fonction holomorphe sur $\mathbf{D}$ et que $|g(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in \mathbf{D}$. En déduire que $|f(z)| \leqslant M|z|^m$ pour tout $z \in \mathbf{D}$.

2. Soit $f : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ une fonction holomorphe, qui s'étend en fonction continue sur $\overline{\mathbf{D}}$. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{D}$ et $m_1, \ldots, m_n$ des entiers $\geqslant 1$. On suppose que $v_{a_i}(f) \geqslant m_i$. Démontrer la majoration
$$|f(0)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{m_k}.$$
On pourra utiliser les biholomorphismes du disque $T_\omega : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ définis pour $\omega \in \mathbf{D}$ par
$$T_\omega : z \longmapsto \frac{\omega - z}{1 - \overline{\omega} z}.$$

Exercice V.6. Soit $f : \mathbf{D} \to \mathcal{H}$ une fonction holomorphe sur le disque unité $\mathbf{D}$ à valeurs dans le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$ telle que $f(0) = \mathrm{i}$. Démontrer que pour tout $z \in \mathbf{D}$, on a
$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$
et que $|f'(0)| \leqslant 2$. On pourra utiliser l'application $h : z \mapsto \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$ holomorphe sur $\mathcal{H}$.