III. Intégrales de chemins, logarithmes complexes

Exercice III.1. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $\mathscr{R}$.

1. Montrer que pour tout $0 < r < \mathscr{R}$,
$$\int_{\partial D(0,r)} f(z) dz = 0 = \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} f(re^{i\theta}) \; (rie^{i\theta}) \mathrm{d}\theta \right).$$
2. Montrer que pour tout $0 < r < \mathscr{R}$ et $n \geqslant 0$,
$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \quad \left(= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^n \mathrm{e}^{in\theta}} \, d\theta \right).$$
3. Montrer que si f est bornée de rayon de convergence infini, alors elle est constante (théorème de Liouville).
4. En déduire que tout polynôme complexe non constant admet une racine.
5. On suppose que f a un rayon de convergence infini. On suppose qu'il existe $R > 0$ et $P \in \mathbf{R}_d[X]$ tels que pour $|z| > R$ on ait $|f(z)| < |P(z)|$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus d.
6. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $\geqslant 1$. On suppose que f se prolonge en une fonction continue sur le disque unité fermé et que
$$\exists \alpha \in \mathbf{R} \; \exists \theta > 0 \; \forall t \in [\alpha, \alpha + \theta] \; f(e^{it}) = 0.$$
Montrer que f est nulle.

Exercice III.2. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe et $f : U \to \mathbf{C}$ une application analytique.

1. Soit $z_0 \in U$ et $r > 0$ tels que $\overline{B}(0, r) \subset U$. Montrer que
$$|f(z_0)| \leqslant \max_{|z - z_0| = r} |f(z)|.$$
2. *Principe du maximum.* Soit $z_0 \in U$ tel que f admette un maximum local en z_0. Montrer que f est constante.
On pourra chercher à déterminer les fonctions continues $g : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ *vérifiant* $|\int_0^{2\pi} g| = \int_0^{2\pi} |g|$.

3. **Application**. Montrer que tout polynôme sur $\mathbf{C}$ de degré au moins 1 possède une racine complexe.

Exercice III.3. Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ et $\gamma : [0,1] \to \mathbf{C} - \{z_0\}$ un lacet. On appelle indice de γ par rapport à z_0 la quantité

$$Ind(\gamma, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

1. Montrer que $Ind(\gamma, z) \in \mathbf{Z}$.
   On pourra considérer l'application $t \in [0,1] \mapsto (\gamma(t) - z_0)e^{-\ell(t)}$ où $\ell(t) = \int_{\gamma_{|[0,t]}} \frac{dz}{z-z_0}$.
2. Prouver que $z \mapsto Ind(\gamma, z)$ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbf{C} - \mathrm{im}\ \gamma$, et quelle vaut 0 sur la composante non bornée.
3. On dit que deux lacets $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbf{C}$ sont homotopes s'il existe $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $H(0,\cdot) = \gamma_0$ et $H(1,\cdot) = \gamma_1$.
   Montrer que $Ind(\gamma, z_0) = n$ si et seulement si γ est homotope à $t \mapsto z_0 + e^{2i\pi nt}$.
   On pourra se contenter de traiter le cas où $z_0 = 0$ et $\gamma(0) = 1$.

Exercice III.4 (Autour du logarithme complexe)**.** Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbf{C}^*$. Un *logarithme* sur Ω est une application continue $f : \Omega \to \mathbf{C}$ vérifiant $\exp \circ f = \mathrm{Id}_\Omega$.

1. Démontrer qu'il n'existe pas de fonction logarithme sur le cercle unité.
2. Quel lien y a-t-il entre les différents logarithmes sur un ouvert connexe donné.
3. Démontrer que tout logarithme f sur un ouvert de $\mathbf{C}$ est holomorphe de dérivée $f'(z) = \frac{1}{z}$. Réciproquement démontrer que toute fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω, de dérivée $z \mapsto \frac{1}{z}$ est, à une constante près, un logarithme sur Ω.
4. Démontrer que l'on peut définir une fonction logarithme sur $\mathbf{C}$ privé d'une demi-droite issue de 0 quelconque.
5. Soit f une fonction holomorphe sur un disque D qui ne s'annule pas. Démontrer qu'il existe une fonction holomorphe g sur D telle que $f = \exp(g)$.
   On admettra qu'une application holomorphe du disque admet une primitive holomorphe.
6. Démontrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ qui vérifie $f \circ f = \exp$ (On pourra chercher à appliquer la question précédente à une telle fonction).

Exercice III.5. Un biholomorphisme d'un ouvert $U \subset \mathbf{C}$ vers un ouvert $V \subset \mathbf{C}$ est un holomorphisme bijectif $h : U \to V$ d'inverse bijectif. On notera $\mathbf{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{H}$ le demi-plan $\{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}\ z > 0\}$.

1. On considère la fonction définie sur le disque unité ouvert complexe :
   $T_w : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ tel que $T_w(z) = \frac{w-z}{1-\bar{w}z}$, où $w \in \mathbf{D}$.
   (a) Montrer que T_w est un holomorphisme à valeurs dans $\mathbf{D}$
   (b) Montrer que $T_w \circ T_w$ est l'identité, en déduire que T_w est un biholomorphisme du disque (sous-entendu vers lui-même) échangeant 0 et w.
   (c) Montrer que le groupe des biholomorphismes du disque est transitif.
2. On considère à présent la fonction $h : \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ telle que $h(z) = \frac{z-i}{z+i}$ pour $z \in \mathbf{H}$. Montrer que h réalise un biholomorphisme de $\mathbf{H}$ vers $\mathbf{D}$.