XII. Révisions

Exercices

Exercice XII.1. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert simplement connexe.

1. Soit $f : U \mapsto \mathbf{C}$ une fonction holomorphe qui ne s'annule pas. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe g définie sur U pour laquelle $f = \exp \circ g$.
2. En déduire le théorème de Thron (1956) : *il n'existe pas de fonction entière f telle que $f \circ f = \exp$.*

Exercice XII.2 (Petit théorème de Picard). On cherche à démontrer le petit théorème de Picard affirmant que *toute fonction entière non constante omet au plus une valeur.*

1. Dans cette question on se donne un ouvert $U \subset \mathbf{C}$ simplement connexe et une fonction $f : U \to \mathbf{C}$ holomorphe telle que $f(U) \subset \mathbf{C} - \{-1, 1\}$. On veut montrer qu'il à existe une fonction $g : U \to \mathbf{C}$ holomorphe vérifiant $f = \cos(g)$.
   (a) Montrer qu'il existe une détermination holomorphe de $\sqrt{f^2 - 1}$ sur U.
   (b) Montrer qu'il existe $\tilde{g} \to \mathbf{C}$ holomorphe vérifiant $\exp(\tilde{g}) = f + \sqrt{f^2 - 1}$.
   (c) Conclure.
2. Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ holomorphe qui évite au moins deux valeurs. On cherche à montrer que f est constante.
   (a) Montrer qu'on peut supposer $f(\mathbf{C}) \cap \{-1, 1\} = \emptyset$.
   (b) Prouver qu'il existe une fonction entière h telle que $f = \cos(\pi \cos(\pi h))$ et $\cos(\pi h)$ ne rencontre pas $\mathbf{Z}$.
   (c) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Trouver les solutions de l'équation

$$\cos(\pi z) = n. \tag{1}$$

   (d) En déduire l'existence de $R > 0$ tel que pour tout disque de rayon R, il existe un $n > 0$ pour lequel l'équation (1) admet une solution dans ce disque.
   (e) A l'aide du théorème de Bloch (prouvé en DM et rappelé ci-dessous), prouver le petit théorème de Picard.
   Théorème (de Bloch). *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $r > 0$, $a \in \mathbf{C}$ et $f : D(a, r) \to \mathbf{C}$ holomorphe, l'ensemble $f(D(a, r))$ contient un disque ouvert de rayon $C|f'(a)|r$, qui est l'image biholomorphe d'un ouvert Ω de $D(a, r)$.*

Exercice XII.3 (Autour du théorème de Rouché). 1. Soit D un disque complexe et $f, g : U \to \mathbf{C}$ méromorphes définies sur un ouvert U de $\mathbf{C}$ contenant $\overline{D}$, et telles que f et g n'ont pas de pôles sur ∂D. On suppose que pour tout $z \in \partial D$,

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|.$$

Montrer que

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g$$

ou Z_h et P_h sont respectivement le nombre de zéros et de pôles de h dans D comptés avec multiplicité.

2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que l'équation d'inconnue z

$$az^n = e^z$$

n'a aucune solutions dans le disque Δ de centre 0 et de rayon 1 si $|a|e < 1$, et en a exactement n si $e < |a|$.

3. Théorème de Brouwer holomorphe : soit une fonction holomorphe F définie sur un ouvert contenant $\overline{\Delta}$. Montrer que F admet un point fixe dans $\overline{\Delta}$.
On pourra introduire les fonctions $f(z) = z - F(z)$ et $g(z) = 2z$.