XI. Théorèmes de Montel, Riemann

Exercices

Exercice XI.1. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbf{C}$ uniformément bornée sur tout compact de Ω. On suppose que l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ pour lesquels la suite $(f_n(z))_{n\geqslant 0}$ converge admet un point d'accumulation. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur tout compact de Ω.

Exercice XI.2. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbf{C}$. On suppose que pour tout $n \geqslant 1, z \in \Omega, |f_n(z)| \leqslant 1$. Soit $(F_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définie par

$$\forall n \geqslant 0, z \in \Omega, \quad F_n(z) = \prod_{k=1}^{n} f_k(z).$$

On suppose qu'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que la suite $(F_n(z_0))_{n\geqslant 1}$ admet une limite non nulle. Montrer que $(F_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction holomorphe non identiquement nulle.

Exercice XI.3 (Ensembles de Fatou et de Julia). Si Ω est un ouvert de $\mathbf{C}$, on dit qu'un sous-ensemble A de $\mathscr{H}(\Omega)$ est *normal* si toute suite de termes de A admet une sous-suite uniformément convergente sur tout compact de Ω. Soit P un polynôme à coefficients complexes. On note $P^{\circ n}$ la composée n-ème de P. L'ensemble de Fatou de P, noté $\mathscr{F}_P$ est la réunion des deux ensembles suivants :

— l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ tels que la suite $(|P^{\circ n}(z)|)_{n\geqslant 0}$ est non bornée,

— l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ pour lesquels il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\{P^{\circ n} : \mathbf{D}(z,\varepsilon) \to \mathbf{C}\}$ est normale.

1. Quel est l'ensemble de Fatou du polynôme X^2 ?
2. Montrer que le complémentaire de l'ensemble de Fatou (appelé ensemble de Julia, et noté $\mathscr{J}_P$) coïncide avec l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ pour lesquels les deux assertions suivantes sont vérifiées :
   — la suite $(|P^{\circ n}(z)|)_{n\geqslant 0}$ est bornée,
   — pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset \mathbf{D}(z,\varepsilon)$ tel que la famille $\{P^{\circ n} : K \to \mathbf{C}\}$ n'est pas bornée pour $\|\cdot\|_K$.
3. Montrer que l'ensemble de Fatou de P est invariant par P : $P^{-1}(\mathscr{F}_P) = \mathscr{F}_P$.
4. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1, \mathscr{F}_{P^{\circ n}} = \mathscr{F}_P$.
5. Si $P = X^2 - 2$, montrer que $\mathscr{J}_P = [-2, 2]$. *Indication : on pourra utiliser le biholomorphisme* $w \mapsto w + w^{-1}$ *entre* $\mathbf{C} - \overline{\mathbf{D}}(0,1)$ *et* $\mathbf{C} - [-2,2]$.

Exercice XI.4. Exhiber un biholomorphisme entre $\{z \in \mathbf{C}, 0 < \Re(z) < 1\}$ et $\mathbf{D}(0,1)$.