X. Limites et intégrales

Exercice X.1. Un produit de Blaschke.

Soit $(\alpha_n)_n$ une suite d'éléments non nuls du disque unité ouvert $\mathbf{D}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty}(1-|\alpha_n|)<+\infty$.

1. Montrer que l'expression

$$z \mapsto \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n}z}\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}$$

définit une fonction holomorphe bornée de $\mathbf{D}$ dont l'ensemble des zéros est constitué de tous les α_n.

2. En déduire l'existence d'une fonction holomorphe bornée sur $\mathbf{D}$ qui n'admet d'extension holomorphe a aucun ouvert rencontrant le bord de $\mathbf{D}$.

Exercice X.2. Fonction Zeta de Riemann.

1. Montrer que l'expression

$$z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

définit une fonction ζ holomorphe sur $\mathscr{D}_1 = \{z \in \mathbf{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 1\}$ dont on calculera la dérivée.

2. On définit pour tout $z \in \mathscr{D}_0 = \{z \in \mathbf{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$

$$G(z) = \int_1^{+\infty} \frac{\lfloor t \rfloor - t}{t^{z+1}} \mathrm{d}t$$

où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière de t. Montrer que G est bien définie et holomorphe sur $\mathscr{D}_0$.

3. On pose pour tout $n \geqslant 1$ et $z \in \mathscr{D}_0$,

$$I_n(z) = \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^z}.$$

Montrer que pour tout $z \in \mathscr{D}_0$, $n \geqslant 1$,

$$\int_n^{n+1} \frac{\lfloor t \rfloor - t}{t^{z+1}} \mathrm{dt} = nI_n(z+1) - I_n(z).$$

4. En déduire que pour tout $z \in \mathscr{D}_1$,

$$\zeta(z) = zG(z) + 1 + \frac{1}{z-1}.$$

Ceci permet de prolonger la fonction ζ en une fonction holomorphe de $\mathscr{D}_0 - \{1\}$ ayant un pôle simple en 1.

Exercice X.3. Fonction $\mathfrak{p}$ de Weierstrass (voir le partiel de l'année dernière)
Soit τ un combre complexe de partie imaginaire strictement positive. Soit Λ l'ensemble des nombres complexes qui peuvent s'écrire sous la forme $m + n\tau$ avec $m, n \in \mathbf{Z}$.

1. (a) Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $m, n \in \mathbf{Z}$ on a $|m + n\tau| \geqslant c \max(|m|, |n|)$.
   (b) En déduire que la série $\sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{|\lambda|^t}$ converge pour tout $t > 2$.
2. Soit $K \subset \mathbf{C}$ un compact contenu dans $\mathbf{C} - \Lambda$. Soit $R > 0$ tel que $K \subset B(0, \frac{R}{2})$.
   (a) Montrer qu'il existe $c' > 0$ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$ vérifiant $|\lambda| > R$ on a
   $$\forall z \in K \qquad \left| \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right| < \frac{c'}{|\lambda|^3}.$$
   (b) En déduire que la fonction
   $$\mathfrak{p} : z \mapsto \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$
   est bien définie et holomorphe sur $\mathbf{C} - \Lambda$, et calculer sa dérivée.
   (c) Montrer que $\mathfrak{p}$ admet des pôles d'ordre 2 en chaque élément de Λ.
   Le prolongement naturel de $\mathfrak{p}$ en une fonction holomorphe $\mathbf{C} \to \mathbf{C}P^1$ s'appelle la fonction de Weierstrass.
3. (a) Montrer que $\mathfrak{p}$ est Λ-périodique, c'est à dire que pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $z \in \mathbf{C}$ on a $\mathfrak{p}(z + \lambda) = \mathfrak{p}(z)$.
   (b) Prouver que pour tout $z \in \mathbf{C}$ on a $\mathfrak{p}(-z) = \mathfrak{p}(z)$.

Exercice X.4. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur U uniformément bornées, c'est à dire qu'il existe $M > 0$ vérifiant
$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall z \in U \qquad |f_n(z)| \leqslant M.$$
On suppose que $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f continue sur U.

1. Montrer que f est holomorphe.
2. (a) Montrer que $(f'_n)_n$ est localement uniformément bornée, c'est-à-dire que pour tout $z_0 \in U$, il existe $r > 0$ et $M' > 0$ vérifiant $B(z_0, r) \subset U$ et
   $$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall z \in B(z_0, r) \qquad |f_n(z)| \leqslant M'.$$
   (b) En déduire que $(f'_n)_n$ est uniformément bornée sur tout compact.
3. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout compact.
   Étant donné $\varepsilon > 0$, on pourra recouvrir un compact K donné par un nombre fini de boules de rayon $\frac{\varepsilon}{3M}$ et considérer les fonctions $f_n - f_m$ pour $n, m \in \mathbf{N}$.