ENS de Lyon 1er semestre 2020-2021
L3 - Analyse Complexe

# DM 2

*DM à rendre pour le vendredi* 18 *décembre. La section* (3) *est facultative. Il est attendu que les réponses soient justifiées avec le plus grand soin.*

Dans ce qui suit, pour tout $a \in \mathbf{C}$ et $r > 0$, on note $\mathbf{D}(a, r)$ le disque complexe ouvert de centre $a$ et de rayon $r$ :

$$\mathbf{D}(a, r) = \{z \in \mathbf{C}, |z - a| < r\}.$$

On définit deux constantes qui seront utiles tout au long du problème :

$$\rho = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tau = 3 - 2\sqrt{2}.$$

L'objectif est de démontrer le théorème suivant.

**Théorème 1.** *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $a \in \mathbf{C}, r > 0$ et $f : \mathbf{D}(a, r) \to \mathbf{C}$ fonction holomorphe, l'ensemble $f(\mathbf{D}(a, r))$ contient un disque complexe ouvert de rayon $C|f'(a)|r$, qui est l'image biholomorphe d'un ouvert $\Omega$ de $\mathbf{D}(a, r)$ par $f$.*

## 0. Introduction

(0) Pourquoi peut-on supposer sans perte de généralité que $a = 0, r = 1, f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ ? Dans toute la suite, on supposera que ces égalités sont vérifiées.

## 1. Cas $|f'| \leq 2$

Dans cette section seulement, on suppose que pour tout $z \in \mathbf{D}(0, 1)$, on a $|f'(z)| \leq 2$.

(1) Montrer que pour tout $z \in \mathbf{D}(0, 1), |f'(z) - 1| \leq \dfrac{2|z|}{1 - |z|}$. En déduire l'inégalité

$$\forall z \in \mathbf{D}(0, 1), \quad |f(z)| \geq |z| - \frac{|z|^2}{1 - |z|}.$$

(2) Démontrer que $f$ possède un unique zéro dans le disque $\mathbf{D}(0, \rho)$ et qu'il est simple.

(3) En étudiant la quantité

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbf{C}(0,\rho)} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz,$$

pour $w \in \mathbf{D}(0, \tau)$, démontrer que le disque complexe ouvert $\mathbf{D}(0, \tau)$ est inclus dans $f(\mathbf{D}(0, \rho))$, et qu'il est de plus l'image biholomorphe d'un ouvert $\Omega$ de $\mathbf{D}(0, \rho)$ par $f$.

## 2. Cas général

(4) On suppose dans cette question que $f$ est holomorphe sur un voisinage ouvert du disque fermé $\overline{\mathbf{D}}(0, 1)$.

(a) Montrer que la fonction $g : \overline{\mathbf{D}}(0, 1) \to \mathbf{R}$ définie par $g(z) = |f'(z)|(1 - |z|)$ admet un maximum en un point $z_0 \in \mathbf{D}(0, 1)$, puis en déduire que pour tout $z \in \mathbf{D}(0, 1)$,

$$\frac{|f'(z)|}{|f'(z_0)|} \leq \frac{1 - |z_0|}{1 - |z|}.$$

(b) Posons $r_0 = (1 - |z_0|)/2$. En déduire que $f(\mathbf{D}(z_0, r_0))$ contient un disque de rayon $\tau r_0 |f'(z_0)|$, qui est l'image biholomorphe d'un ouvert de $\mathbf{D}(z_0, r_0)$ par $f$.

(5) Démontrer que l'on peut se ramener à l'hypothèse faite à la question (4) en considérant $z \mapsto f(rz)/r$ lorsque $r \to 1$.

## 3. Pour aller plus loin (Partie facultative)

À l'aide du théorème 1, et du lemme suivant (que l'on pourra démontrer), on pourra donner une démonstration du petit théorème de Picard.

**Lemme 2.** *Soit $U$ un ouvert de $\mathbf{C}$ simplement connexe, et $f : U \to \mathbf{C}$ holomorphe. Si $f(U) \subset \mathbf{C} \setminus \{-1, 1\}$, alors il existe une fonction holomorphe $g : U \to \mathbf{C}$ telle que $f = \cos \circ g$.*

**Théorème 3** (Petit théorème de Picard)**.** *Toute fonction entière non constante omet au plus une valeur.*