ENS de Lyon — 1er semestre 2020-2021

L3 - Analyse complexe

DM 1

*DM à rendre pour le **mardi** 3 novembre, lors du cours d'analyse complexe.*

Il est attendu que les réponses soient justifiées avec le plus grand soin.

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des fonctions $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ qui sont holomorphes, bijectives, et d'inverse holomorphe. *Indication : Si f est une telle fonction, montrer que l'on peut supposer que $f(0) = 0$, puis considérer la fonction $z \mapsto 1/f(1/z)$.*

Exercice 2. On note $\mathbf{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$. Soit $f : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ une fonction holomorphe. On suppose que f est propre, c'est-à-dire que l'image réciproque de tout compact de $\mathbf{D}$ est un compact de $\mathbf{D}$. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{D}$ tels que pour tout $z \in \mathbf{D}$,

$$f(z) = e^{i\theta} \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z}.$$

Indication : Montrer qu'il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{D}$ tels que la fonction

$$g : z \mapsto f(z) / \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z} \right)$$

soit holomorphe sur $\mathbf{D}$ et ne s'annule pas, puis appliquer le principe du maximum à $1/g$.