ENS de Lyon 2nd semestre 2019-2020
L3 - Intégration et Probabilités

TD 9

Transformées de Fourier et de Fourier-Plancherel

Dans ce TD, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable, sa transformée de Fourier est définie par la formule

$$\hat{f} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Exercice 1 *Propriétés de la transformation de Fourier*

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables. On suppose (lorsque c'est nécessaire) que f est dérivable, et de dérivée intégrable. Soient a, b, ξ_0 trois réels. Compléter le tableau suivant :

Fonction	Transformée de Fourier
$x \mapsto af(x) + bg(x)$	
$x \mapsto f(ax)$	
$x \mapsto f(x+a)$	
$x \mapsto f(x)e^{ix\xi_0}$	
$x \mapsto (f * g)(x)$	
$x \mapsto f(x)g(x)$	
$x \mapsto f'(x)$	
$x \mapsto xf(x)$	

Exercice 2 *Premiers exemples de transformées de Fourier*

Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

$$f = \mathbb{1}_{[a,b]} \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \exp(-cx)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x),$$

où les réels a, b et c vérifient $a < b$ et $c > 0$.

Exercice 3 *Transformée de Fourier d'une fonction radiale*

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ une fonction radiale, au sens où il existe une fonction mesurable g de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad f(x) = g(|x|),$$

où $|x|$ désigne la norme euclidienne de x. Montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est également radiale.

Exercice 4 *Espace de Schwartz*

L'espace de Schwartz en dimension d est défini par

$$\mathcal{S} := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d),\ \forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \text{ multi-indice}, |x|^k D_\alpha f(x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\},$$

où $D_\alpha f$ désigne la dérivée partielle de f par rapport au multi-indice α. Montrer que l'espace de Schwartz est stable par la transformée de Fourier, au sens où

$$\hat{\mathcal{S}} := \{\hat{f}, f \in \mathcal{S}\} \subset \mathcal{S}.$$

Puis, montrer que $\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$.

Exercice 5 *Un calcul de transformée de Fourier par changement de variable* On cherche à déterminer la transformée de Fourier $\hat{f}$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, sans faire appel à la formule d'inversion.

1. Après avoir justifié que $\hat{f}$ est bien définie, prouver la formule suivante, pour ξ réel,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*} e^{-i\xi\frac{x}{y}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy,$$

   puis se ramener à une intégrale en y.

2. Montrer que pour $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable positive, et $c > 0$, on a toujours

$$\int_{\mathbb{R}} g\left(y - \frac{c}{y}\right) dy = \int_{\mathbb{R}} g(y)dy.$$

3. Déterminer $\hat{f}$.

Exercice 6 *Ondelettes et fonctions de Weierstrass*

1. On note $\mathcal{S}$ l'espace de Schwartz, composé de l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telles que

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \quad |x^n| f^{(k)}(x) \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Montrer que si f est dans l'espace de Schwartz, il en est de même de $\hat{f}$.

2. On fixe un paramètre $b > 1$. Justifier l'existence d'une fonction ψ dans $\mathcal{S}$ telle que $\hat{\psi}$ soit à valeurs réelles strictement positives sur $]1/b, b[$, et nulle en dehors. Justifier également que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_{\mathbb{R}} x^n \psi(x)dx = 0$.

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\psi_k : x \mapsto b^{2k}\psi(b^k x)$. Montrer que si f est une fonction continue bornée et dérivable en un point $x_0 \in \mathbb{R}$, alors on a

$$f * \psi_k(x_0) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. **Application :** On choisit maintenant $a \in]0, 1[$ tel que $ab \geq 1$, et on définit la fonction de Weierstrass $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$W(x) = \sum_{n\geq 0} a^n \cos(b^n x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   Montrer que W est bien définie et est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ mais dérivable nulle part.