ENS de Lyon $\hfill$ 2nd semestre 2019-2020

L3 - Intégration et Probabilités

TD 8

Convergence en loi, TCL.

Exercice 1 *Quelques convergences en loi*

1. Soit X_n une suite de variables aléatoires i.i.d de loi Exp(1). Montrer que $\max(X_1, \ldots, X_n) - \log n$ converge en loi. Quelle est sa limite ?
2. Montrer qu'une variable de Poisson de grand paramètre, bien recentrée et renormalisée, converge en loi vers une variable Gaussienne.
3. (*) Soit $X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$. À quelles condition sur la suite $(m_n, \sigma_n)_{n\geq 1}$ a-t-on convergence en loi de $(X_n)_n$?
4. (paradoxe des anniversaires) Soit X_n le moment de la première répétition lors d'une suite de tirages avec remise parmi n éléments. Trouver la limite en loi de $\frac{X_n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 2 *Convergence en loi de couples de variables aléatoires*

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ deux suites de variables aléatoires réelles convergeant en loi vers des variables aléatoires X et Y.

1. On suppose que les suites $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ sont indépendantes. Montrer que $(X_n, Y_n)_{n\geq 0}$ converge en loi. Ce couple converge-t-il en loi vers (X, Y) ?
2. De manière générale, a-t-on que $(X_n, Y_n)_{n\geq 0}$ converge en loi ?
3. *(Lemme de Slutsky)* On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $Y = c$ p.s. (Y est déterministe).
   (a) Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers Y.
   (b) Montrer que $(X_n, Y_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers (X, Y)
4. Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. d'espérance nulle de loi différente de δ_0, et telles que $\mathbb{E}[Z_1^2] < +\infty$. On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}, \bar{Z}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} Z_k \quad \text{et} \quad \widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} Z_k^2$$
   Montrer que
$$\frac{\sqrt{n}\bar{Z}_n}{\widehat{\sigma}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$
   Ce résultat est utilisé en statistiques quand on ne connaît pas la variance σ^2 et qu'on doit la remplacer par $\widehat{\sigma}_n^2$, une "estimation empirique" de la variance.

Exercice 3 *Variation totale et convergence en loi de variables discrètes.*

On définit la distance en variation totale de deux mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ ainsi :
$$\|\mu - \nu\|_{TV} = 2 \sup_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} |\mu(A) - \nu(A)| = \sup_{\substack{f:\mathbb{R}^d\to[-1,1] \\ f \text{ mesurable}}} |\mu(f) - \nu(f)| = \sup_{\substack{f:\mathbb{R}^d\to[-1,1] \\ f \text{ continue}}} |\mu(f) - \nu(f)|$$

1. (facultatif) justifier toutes ces égalités.
2. Montrer que la convergence en variation totale implique la convergence en loi. Donner un exemple de convergence en loi qui n'est pas en variation totale.
3. Montrer que pour des variables aléatoires dans $\mathbb{Z}$, la convergence en loi est équivalente à la convergence en variation totale.
4. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires dans $\mathbb{Z}$, telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(X_n = k)$ converge. Est-ce que X_n converge en loi ? Que dire si l'on sait également que X_n est tendue ?