ENS de Lyon $\hfill$ 2nd semestre 2019-2020

L3 - Intégration et Probabilités

TD 7

Convergence en loi, Théorème central limite

Une inégalité de concentration

Exercice 1 *Inégalité de Hoeffding*

1. Soit X une variable aléatoire réelle centrée et bornée par 1 presque sûrement. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}, \mathbb{E}[e^{tX}] \leq \exp(t^2/2)$.
   Indication : on pourra utiliser l'inégalité de convexité :
   $$\forall x \in [-1,1], \quad e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}.$$
2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et centrées. On suppose de plus que pour tout entier $n \geq 1$, il existe un réel $a_n > 0$ tel que presque sûrement, $|X_n| \leq a_n$. On note S_n la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$.
   (a) Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(\frac{t^2 \sum_{k=1}^n a_k^2}{2} - t\varepsilon\right)$.
   (b) Démontrer l'inégalité de Hoeffding :
   $$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{k=1}^n a_n^2}\right).$$

Convergence en loi.

Exercice 2 *Stabilité de la convergence en loi*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles convergeant en loi vers X. Soit f une fonction continue. La suite $f(X_n)$ converge-t-elle en loi vers $f(X)$?

Exercice 3 *Quelques convergences en loi*

1. Pour tout entier $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$ avec $np_n \to \lambda > 0$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.
2. Soit λ un nombre réel strictement positif. Pour tout $n > 1/\lambda$, on se donne une variable aléatoire X_n de loi géométrique de paramètre λ/n. Montrer que la suite (X_n/n) converge en loi vers une variable exponentielle dont on précisera le paramètre.
   On pourra montrer le lemme de Scheffé discret : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et a_n une suite qui tend vers $+\infty$ de réels strictement positifs, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue λ. Si pour λ-presque tout $x \in X$,
   $$\lim a_n \mathbb{P}(X_n = \lfloor a_n x \rfloor) = f(x)$$
   , alors $(X_n/a_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire X de loi $d\mathbb{P}_X(x) = f(x)d\lambda(x)$.

Exercice 4 *Théorème de représentation de Skorokhod et « mapping theorem »*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en loi vers une variable aléatoire X. On note F_n la fonction de répartition de X_n et F la fonction de répartition de X. On définit aussi les fonctions quantiles : pour tout $\omega \in]0,1[$,

$$G_n(\omega) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_n(x) \geq \omega\},$$
$$G(\omega) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq \omega\}.$$

Soit C l'ensemble des éléments ω de $]0,1[$ tel que $G(\omega) < \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) > \omega\}$.

1. Montrer que C est au plus dénombrable.
2. Montrer que pour tout $\omega \notin C$, on a $G_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} G(\omega)$.
3. *(Théorème de représentation de Skorokhod)* En déduire qu'il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et des variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et Y, toutes définies sur cet espace de probabilité, telles que
   — pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, X_n et Y_n ont la même loi,
   — les variables aléatoires X et Y ont la même loi.
   — $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} Y$.
4. *(« Mapping theorem »)* Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en loi vers une variable aléatoire X. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un ensemble C qui vérifie $\mathbb{P}(X \in C) = 1$. Montrer que la suite $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la variable aléatoire $f(X)$.

Théorème central limite

Exercice 5 *Étude de suite*

On pose, pour n entier et α réel positif,

$$T_n(\alpha) = e^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha n \rfloor} \frac{n^k}{k!}.$$

1. Soient X, Y deux variables de Poisson indépendantes, de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Montrer que $X + Y$ suit encore une loi de Poisson, dont on précisera le paramètre.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(\alpha) = 0$ si $\alpha < 1$, et $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(\alpha) = 1$ si $\alpha > 1$.
3. Montrer que $\lim_{n\to\infty} T_n(1) = \frac{1}{2}$.

Exercice 6 *Sommes de variables de Bernoulli*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables i.i.d. de loi Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. On considère $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Calculer la limite de $\mathbb{P}(S_n \in I_n)$ quand n tend vers l'infini, lorsque

1. $I_n = [0, pn]$;
2. $I_n = [pn - 4\sqrt{n}, pn - \sqrt{n}]$;
3. $I_n = [pn - n^{1/3}, pn]$.

Exercice 7 *Changement de signe*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. telle que $\mathbb{E}[X_1] = 0, \mathbb{E}[X_1^2] = 1$. On note S_n la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$. Déterminer la limite lorsque n tend vers l'infini de la probabilité de l'intersection des événements $S_n < 0$ et $S_{2n} > 0$.