

TD 6

Loi du 0-1, loi des grands nombres, convergences.

On rappelle un exercice du TD précédent : si $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles positives i.i.d., alors presque sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathbb{E}[X_1] < \infty \\ \infty \text{ si } \mathbb{E}[X_1] = \infty. \end{cases}$$

Exercice 1 *Loi forte des grands nombres, cas non intégrable*

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que si X_1 n'est pas intégrable, alors $(\frac{S_n}{n})_{n\geq 1}$ diverge p.s.

Exercice 2 *Loi du 0-1 de Kolmogorov et séries entières aléatoires*

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes.

1. Montrer que de le rayon de convergence R de la série entière $f(z) = \sum_{n\geq 0} X_n z^n$ est presque sûrement constant.
2. On suppose maintenant que les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ ont même loi (et que cette loi n'est pas δ_0). Montrer que
   - Si $\mathbb{E}[\ln(|X_1|)^+] = \infty$, alors $R = 0$ p.s.
   - Si $\mathbb{E}[\ln(|X_1|)^+] < \infty$, alors $R = 1$ p.s.
3. Montrer que dans le dernier cas, la série n'est presque sûrement pas prolongeable en 1, et possède une infinité de zéros dès que X_1 a une loi symétrique. (On pourra étudier $L = \limsup_{z\to 1, z<1} f(z)$).

Exercice 3 *Implications et réciproques*

Faire un diagramme d'implications, réciproques partielles, exemples, contre-exemples, pour les convergences L^p, L^q, L^1, en probabilité et presque sûre. On suppose que $q \geq p \geq 1$.

Exercice 4 *Convergence presque sûre et convergence en probabilité*

1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires convergeant en probabilité vers une variable aléatoire X. À l'aide du lemme de Borel-Cantelli, montrer qu'il existe une sous-suite (à indices déterministes) $(X_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ convergeant vers X presque sûrement.
2. La convergence presque sûre provient-elle d'une topologie sur l'ensemble des variables aléatoires ? Même question pour la convergence en probabilité.

Exercice 5 *Loi du 0-1 et percolation*

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe infini dénombrable. Pour $p \in (0, 1)$ on note $G_p = (V, E_p)$ le sous-graphe obtenu en conservant chaque arête indépendamment avec probabilité p. Montrer que la probabilité qu'il existe une composante connexe ∞ dans G_p vaut 0 ou 1.