ENS de Lyon $\hfill$ $2^{\text{nd}}$ semestre 2018-2019

L3 - Intégration et Probabilités

**TD 3**

Fonctionnelles et lois, caractérisations de lois, moments

**Exercice 1** *L'inégalité de Paley-Zygmund.*

Soit $X$ une v.a à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, de carré intégrable. Pour $0 \leq c \leq 1$ paramètre réel, montrer :

$$\mathbb{P}(X > c\mathbb{E}[X]) \geq (1-c)^2 \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

*Remarque : Cette inégalité* minore *la queue de la v.a. $X$ à l'aide de ses deux premiers moments. Pour cela, elle est un complément utile à l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff. À noter que le cas $c = 0$ est déjà intéressant.*

**Exercice 2** *La main à la pâte*

Calculer la fonction caractéristique, l'espérance et la variance des variables aléatoires de Bernoulli, binomiales, géométriques, de Poisson, exponentielles et de Cauchy.

**Exercice 3** *Fonction quantile*

Soit $X$ une variable aléatoire de fonction de répartition $F$. On définit $G$, pseudo-inverse de $F$ comme suit :

$$\forall t \in \mathbb{R} \ : \ G(t) = \inf\{x | F(x) \geq t\}.$$

1. Prouver que :
   (a) Si $F$ est continue, alors pour tout $t \in ]0,1[$, $F(G(t)) = t$.
   (b) Si $F$ est strictement croissante, alors pour tout $x$ réel, $G(F(x)) = x$.
   (c) Si $F$ est continue et strictement croissante, alors $F$ est inversible et $G = F^{-1}$.
   (d) Donner une condition (non nécessaire) pour que ces deux propriétés soient vérifiées.
2. Prouver que si $F$ est continue et strictement croissante, alors la variable aléatoire $F(X)$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$.
3. Si $Y$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$, quelle est la fonction de répartition de $G(Y)$ ? *(On pourra vérifier que $\{G(U) \leq t\} = \cap_{n\geq 1}\{U < F(t+1/n)\}$).*

**Exercice 4** *Les moments ne caractérisent pas la loi*

On fixe un entier naturel $q \geq 2$, et l'on note $M_q = \{q^j \mid j \in \mathbb{N}\}$.

1. Soit $X$ la variable aléatoire à valeurs dans $M_q$ dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X = q^j) = e^{-q}q^j/j!$. Calculer les moments de $X$.
2. Montrer que la fonction $h : z \mapsto \prod_{k=1}^{\infty}(1 - zq^{-k})$ est analytique sur $\mathbb{C}$. Soit $z \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ son développement de Taylor au voisinage de 0. En utilisant l'équation fonctionnelle $h(qz) = (1-z)h(z)$, montrer que $c_0 = 1$ et pour tout $j \geq 1$,
$$c_j = (-1)^j[(q-1)(q^2-1)\dots(q^j-1)]^{-1}.$$
3. Définissons pour tout $j \geq 0, a_j = j!c_j$. Montrer que pour tout $k \geq 0$,
$$\sum_{j=0}^{+\infty} e^{-q}q^{kj}a_j\frac{q^j}{j!} = 0.$$

4. Pour tout $\varepsilon \in [-1,1]$, soit $X_\varepsilon$ une variable aléatoire à valeurs dans $M_q$ dont la loi est donnée par $\mathbb{P}(X_\varepsilon = q^j) = (1+\varepsilon a_j)e^{-q}q^j/j!$. Pourquoi est-ce que cela est bien défini ? Calculer les moments de $X_\varepsilon$.

**Exercice 5** *Inégalités d'anti-concentration*

1. Soit $X$ une variable aléatoire réelle. Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable, on a
$$\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(t)dt \right) d\mathbb{P}_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[e^{itX}] f(t)dt.$$
2. *(Inégalité d'Esseen)* En utilisant la fonction
$$f : t \mapsto \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(t-u)\mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}(u)du,$$
montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute variable aléatoire $X$ à valeurs réelles, et pour tout intervalle $I$ de longueur 1,
$$\mathbb{P}(X \in I) \leq C \int_{|t|\leq 1} |\mathbb{E}[e^{itX}]|dt.$$