ENS de Lyon — 2^{nd} semestre 2019-2020

L3 - Intégration et Probabilités

TD 12

Révisions

Exercice 1 *Réviser avec un QCM*

Répondre aux questions suivantes par vrai ou faux (ou une réponse parmi (a), (b) et (c)), et justifier la réponse.

1. Soit $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout $2 \leq k \leq n$, X_k est indépendant de $(X_1, ..., X_{k-1})$. Alors la famille $(X_1, ..., X_n)$ est indépendante.
2. Soit X une variable aléatoire réelle. Soient Y et Z deux variables aléatoires réelles indépendantes de X. Peut-on affirmer que X est indépendant de $Y + Z$?
   (a) Oui, tout le temps.
   (b) Oui, si l'on a de plus l'hypothèse Y indépendant de Z.
   (c) Non.
3. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles dans L^1. Peut-on affirmer que XY est dans L^1 ?
   (a) Oui, tout le temps.
   (b) Oui, si l'on a de plus l'hypothèse X indépendant de Y.
   (c) Non.
4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes convergeant presque sûrement vers X. Alors X est constante presque sûrement.
5. Soit X une variable aléatoire non presque-sûrement nulle, et $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite. Alors la suite de variables aléatoires $(u_n X)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0 si et seulement si la suite u_n converge vers 0.
6. Si X est une variable aléatoire à densité et si g est une fonction continue strictement croissante, alors $g(X)$ est une variable aléatoire à densité.

Exercice 2 *Convergence d'intégrale*

Déterminer la limite lorsque $n \to \infty$ de

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\infty} x^{n-1} f(\frac{x}{n}) e^{-x} dx,$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue bornée.

Exercice 3 *Groupe fini*

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans un groupe fini G. On suppose que X est uniforme.

1. Montrer que YX est uniforme.
2. Montrer que YX est indépendante de X si et seulement si Y est uniforme.

(ceci se généralise à un groupe compact, où uniforme signifie distribué selon la mesure de Haar).

Exercice 4 *Stabilité et variance finie* Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi, de variance finie, dont la somme a même loi qu'une transformation affine de X. Montrer que X est de loi gaussienne. Donner un contre-exemple en supprimant l'hypothèse variance finie.