ENS de Lyon 2nd semestre 2019-2020
L3 - Intégration et Probabilités

TD 10

Marches aléatoires, Processus de Galton-Watson.

Exercice 1 *Percolation sur un arbre régulier.*

Soit d un entier ≥ 2, et $p \in [0,1]$. On note $\mathbb{T}_d$ l'arbre d-régulier (chaque sommet a exactement d voisins). Soit $(X_e)_{e \in E}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi Bernoulli de paramètre p, indexée par l'ensemble E des arêtes de $\mathbb{T}_d$. On considère le sous-graphe aléatoire G_p dont les sommets sont ceux de $\mathbb{T}_d$, et les arêtes sont les arêtes e de $\mathbb{T}_d$ telles que $X_e = 1$.

1. Montrer que la probabilité qu'il existe une composante connexe infinie dans G_p vaut 0 lorsque $p \leq 1/(d-1)$.
2. Montrer que la probabilité qu'il existe une infinité de composantes connexes infinies dans G_p vaut 1 lorsque $1/(d-1) < p < 1$.

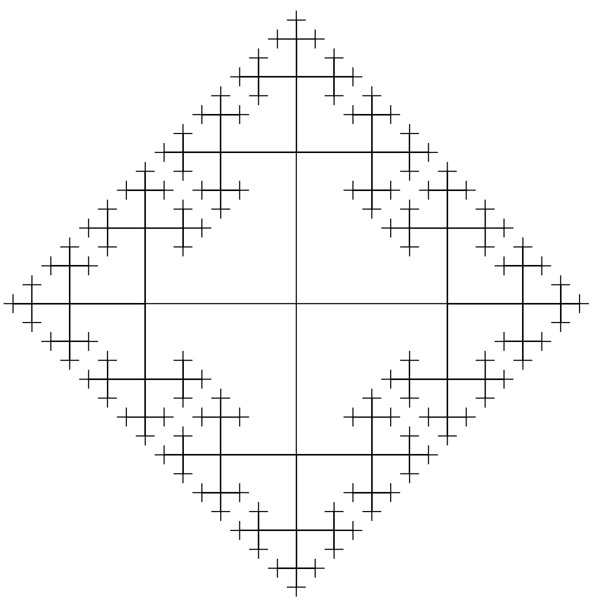

Figure 1 – Une partie de l'arbre 4-régulier $\mathbb{T}_4$.

Exercice 2 *Hitting time theorem*

Soit $\mathbb{P}_k$ la loi d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ qui débute au point $k \geq 0$. Soit $(Y_i)_{i \geq 0}$ des variables i.i.d. à valeurs entières, qui correspondent aux pas de la marche aléatoire, et soit $S_n = k + Y_1 + \cdots + Y_n$ la position de la marche aléatoire après n pas, qui débute en k. Soit $H_0 = \inf\{n, S_n = 0\}$. On suppose par ailleurs que pour tout $i \geq 1, \mathbb{P}(Y_i \geq -1) = 1$. On souhaite démontrer par récurrence la propriété

$$\mathcal{P}_n : \text{« pour tout } k \geq 0, \mathbb{P}_k(H_0 = n) = \frac{k}{n}\mathbb{P}_k(S_n = 0) \text{ ».}$$

1. Montrer $\mathcal{P}_1$.
2. Dans toute la suite, on suppose qu'il existe $n \geq 2$ tel que $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}_k(H_0 = n \mid Y_1 = s) = \dfrac{k+s}{n-1}\mathbb{P}_{k+s}(S_{n-1} = 0)$.
   (b) En déduire que $\mathbb{P}_k(H_0 = n) = \displaystyle\sum_{s=-1}^{+\infty} \frac{k+s}{n-1}\mathbb{P}_{k+s}(S_{n-1} = 0)\mathbb{P}(Y_1 = s)$.

(c) Montrer que $\mathbb{E}_k[Y_1 \mid S_n = 0] = -k/n$.

(d) Conclure que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Exercice 3 *Loi de la progéniture totale*

Soit $(X_{n,i})_{n,i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi μ sur $\mathbb{N}$. Posons $Z_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$,

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k}.$$

On note $T = \sum_{n\geq 0} Z_n$ la taille totale de la population. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n = n - 1),$$

où $(X_i)_{i\geq 1}$ sont des variables aléatoires i.i.d. de loi μ.