DM 2

DM à rendre pour le vendredi 3 avril. Il est attendu que les réponses soient justifiées avec soin.

Soit $X_1, \dots, X_n, \dots$ une suite de variables aléatoire i.i.d. centrées et réduites. On suppose que $\rho = \mathbb{E}[|X_1|^3]$ est fini. On note S_n la variable aléatoire $(X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$. Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. Le but est de démontrer le théorème suivant.

Théorème. *Il existe deux constantes $A, B > 0$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$|F_{S_n}(x) - F(x)| \leq \frac{A\rho + B}{n^{1/8}}.$$

0. Rappel

Sans l'hypothèse « $\rho < +\infty$ », rappeler pourquoi pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F_{S_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F(x)$. Il s'agit donc d'estimer la vitesse cette convergence sous l'hypothèse « $\rho < +\infty$ ».

1. Preuve du théorème

On note $\mathcal{C}_b^3(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ bornées de classe $\mathcal{C}^3$ dont les trois premières dérivées sont bornées.

Démontrer les deux lemmes suivants, puis le théorème.

Lemme 1. *Soit $f \in \mathcal{C}_b^3(\mathbb{R})$, X, Y et Z trois variables aléatoires réelles indépendantes telles que $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Z]$ et $\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[Z^2]$. On a*

$$|\mathbb{E}[f(X+Y)] - \mathbb{E}[f(X+Z)]| \leq \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{3!}\left(\mathbb{E}[|Y|^3] + \mathbb{E}[|Z|^3]\right).$$

Lemme 2. *Il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout $f \in \mathcal{C}_b^3(\mathbb{R})$, et $n \in \mathbb{N}^*$, si $Z_1, \dots, Z_n$ sont des variables i.i.d. et indépendantes des (X_i) de loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors*

$$|\mathbb{E}[f(S_n)] - \mathbb{E}[f(\tilde{S}_n)]| \leq \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{3!\sqrt{n}}(\rho + C),$$

où $\tilde{S}_n$ est la somme $(Z_1 + \dots + Z_n)/\sqrt{n}$.

Indications :

- Indication pour le lemme 2 : on pourra introduire les variables aléatoires
$$U_i = (X_1 + \dots + X_{i-1} + X_i + Z_{i+1} + \dots + Z_n)/\sqrt{n},$$
$$V_i = (X_1 + \dots + X_{i-1} + Z_{i+1} + \dots + Z_n)/\sqrt{n}.$$
- Indication pour le théorème : on pourra fixer une fonction décroissante $f_0 \in \mathcal{C}_b^3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{1}_{]-\infty,0]}(x) \leq f_0(x) \leq \mathbb{1}_{]-\infty,1]}(x),$$
puis considérer les fonctions $f_{k,t} : x \mapsto f_0(k(x-t))$ et $\tilde{f}_{k,t} : x \mapsto f_0(k(x - t + 1/k))$.