Université Paris–Sud
Centre d'Orsay

Mathématiques
CAPES 2004 - Groupe 1

Feuille de géométrie 1

Sous-espaces affines

Cours : Travailler pour mercredi matin les paragraphes 1 (espaces affines) et 2 (translations) de la partie I du document "Géométrie affine".

Chercher l'exercice 1 puis travailler le début du paragraphe 3 (définition des sous-espaces affines).

1. Soient deux points a et b d'un espace affine E. Comparer $\phi_a(V)$ et $\phi_b(V)$ dans les cas suivants :

$$\text{(i) } V = \{a, b\} \qquad \text{(ii) } V = [a, b] = \{a + t\overrightarrow{ab}, t \in [0, 1]\}$$

2. Soient E un espace affine de direction $\vec{E}$ et $\vec{V}$ un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$. On définit sur E la relation ν :

$$\forall (a, b) \in E^2 \quad a\ \nu\ b \Longleftrightarrow \overrightarrow{ab} \in \vec{V}$$

Montrer que ν est une relation d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence ?

3. Soit, dans $\mathbb{R}^3$, le sous-ensemble $F_{\alpha,\beta}$ d'équation $\alpha x^2 + y + 3z = \beta - 1$. Pour quelles valeurs de α et β, le sous-ensemble $F_{\alpha,\beta}$ est-il
   - un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
   - un plan affine de $\mathbb{R}^3$?
   - une droite affine de $\mathbb{R}^3$?

4. Déterminer l'intersection de deux plans affines de $\mathbb{R}^3$.

5. Soit, dans $\mathbb{R}^3$, le plan affine P d'équation $2x + y - z = 3$. Donner un système d'équations cartésiennes d'une droite affine faiblement parallèle à P et non contenue dans P.

6. Déterminer la nature de l'intersection du plan affine d'équation $2x + y - z = 3$ et de la droite affine dirigée par le vecteur $(1, -2, a)$ et passant par $(5, 2, p)$ où a et p sont des paramètres réels.

7. Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, on considère les droites D et D' d'équations :

$$D : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & 4z & = & -1 \\ x & - & 2y & + & z & = & 3 \end{array} \right. \qquad D' : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 11x & - & y & - & 7z & = & \alpha \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

Les droites sont-elles parallèles, sécantes ou non-coplanaires ?

Pouvez-vous donner un système d'équations de D comprenant une des équations données pour D' ?

8. Montrer que la partie F définie ci-dessous est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + y - z = 1 \text{ et } \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z) = (\lambda, \mu - \lambda, 2 - \mu)\}.$$

Montrer que $D = \{(1 - 2t, 3t - 2, -t), t \in \mathbb{R}\}$ est une droite affine parallèle à F.

Devoir de géométrie 1

Suites arithmético-géométriques (I.381)

à rendre au plus tard le 8 octobre 2003

(1) Montrer que les lois $\oplus$ et $\bullet$ définies ci-dessous permettent de munir $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, l'ensemble des suites de réels d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Pour tout entier n, on note u_n le terme de rang n de la suite u.

$$(u \oplus v)_n = u_n + v_n \qquad (u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$$
$$(\lambda \bullet v)_n = \lambda.u_n \qquad (\lambda \in \mathbb{R},\ v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$$

(2) Soient a un réel et $\mathcal{G}(a)$ l'ensemble des suites géométriques de raison a. Montrer que $\mathcal{G}(a)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?

(3) Soient b un réel et $\mathcal{H}(b)$ l'ensemble des suites arithmétiques de raison b. Si u appartient à $\mathcal{H}(b)$, exprimer u_n en fonction de u_0 et de b. En déduire que $\mathcal{H}(b)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Quelle est sa direction ?

(4) Pour deux réels a et b, on pose :

$$\mathcal{C}(a, b) = \{u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), u_{n+1} = au_n + b, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

En utilisant la définition, montrer que $\mathcal{C}(a, b)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Quelle est sa direction ?

(5) Recherche d'un point particulier de $\mathcal{C}(a, b)$ quand a est différent de 1 :

(a) Première méthode : Soit u un élément de $\mathcal{C}(a, b)$, on définit la suite $\bar{u}$ par

$$(\bar{u})_n = u_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Montrer que $\bar{u}$ appartient à $\mathcal{C}(a, b)$, $v = \bar{u} \ominus u$ appartient à $\mathcal{G}(a)$ et calculer u_n en fonction de u_0 et a. Ecrire u comme somme d'une suite fixée de $\mathcal{C}(a, b)$ et d'un élément de $\mathcal{G}(a)$ dépendant de u_0

(b) Deuxième méthode : Chercher une suite constante c dans $\mathcal{C}(a, b)$. Si u appartient à $\mathcal{C}(a, b)$, déterminer le terme général de $u - c$ puis celui de u.

(c) Troisième méthode : Soit u un élément de $\mathcal{C}(a, b)$, on définit la suite $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_n = \lambda_n \alpha_n$. Déterminer le terme général de λ puis celui de u.