1.3. La fonction s de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$ qui à $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ associe $x_0 + x_1 + \cdots + x_n$ est une forme linéaire. Donc son noyau $\vec{E}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$, et en tant que tel un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Vérifions que la fonction Φ de $E_n \times E_n$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui au couple de points $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ et $(x'_0, x'_1, \cdots, x'_n)$ associe $(x'_0 - x_0, x'_1 - x_1, \cdots, x'_n - x_n)$ munit E_n d'une structure d'espace affine d'espace vectoriel sous-jacent $\vec{E}_n$.

D'abord $\Phi(E_n \times E_n)$ est contenu dans $\vec{E}_n$, car

$$s(x'_0 - x_0, x'_1 - x_1, \cdots, x'_n - x_n) = s(x'_0, x'_1, \cdots, x'_n) - s(x_0, x_1, \cdots, x_n) = 1 - 1 = 0.$$

Reste à vérifier les axiomes 1) et 2) de la définition 1.1 .

Soient $p = (p_0, p_1, \cdots, p_n), q = (q_0, q_1, \cdots, q_n), r = (r_0, r_1, \cdots, r_n)$ trois points de E_n. Comme $r_i - p_i = (q_i - p_i) + (r_i - q_i)$ on a bien la relation de Chasles $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}$.

Fixons $a = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$ dans E_n et montrons pour conclure la bijectivité de $p \mapsto \overrightarrow{ap}$ de E_n sur $\vec{E}_n$: soit $\vec{u} = (u_0, u_1, \cdots, u_n)$ un vecteur quelconque de $\vec{E}_n$, nous devons déterminer le nombre de solutions de l'équation $\overrightarrow{ap} = \vec{u}$ (l'inconnue étant le point $p = (p_0, p_1, \cdots, p_n)$ de E_n). Nous devons résoudre les $n+1$ équations $p_i - a_i = u_i$ aux inconnues (p_i). Il est clair qu'il y a toujours une et une seule solution (donnée par $p_i = u_i + a_i$). Ceci achève la vérification de l'axiome 2).

RETOUR

1.4.1. *Bien que ces propriétés semblent naturelles, comme elles ne sont pas dans les axiomes de définition, elles doivent en être déduites.*

Ecrivons la relation de Chasles pour $x = y = z$, on obtient :

$$\forall x \in E \quad \overrightarrow{xx} + \overrightarrow{xx} = \overrightarrow{xx}$$

donc pour tout x de E, le vecteur $\overrightarrow{xx}$ est le vecteur nul.

Ecrivons la relation de Chasles pour les points (x, y, x) de E^3 :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yx} = \overrightarrow{xx} = \vec{0}$$

donc pour tous x et y de E, le vecteur $\overrightarrow{yx}$ est le vecteur $-\overrightarrow{xy}$.

RETOUR

1.5.1. La relation de Chasles est vérifiée, en effet, pour trois vecteurs quelconques u, v et w de $\vec{E}$, on a :

$$\overrightarrow{uv} + \overrightarrow{vw} = (v - u) + (w - v) = w - u = \overrightarrow{uw}$$

Pour tout u de $\vec{E}$, l'application Φ_u définie de $\vec{E}$ (vu comme espace affine) dans $\vec{E}$ (vu comme espace vectoriel sous-jacent) par $\Phi_u(v) = v - u$ est une bijection de $\vec{E}$ dans $\vec{E}$. La bijection réciproque est Φ_{-u}. L'application Φ_0 est l'identité.

RETOUR

1.5.2. $\Phi((2,-1,0),(1,1,-1)) = (-1,2,-1)$.

RETOUR

2.1.1. Ecrivons $a - \vec{v} = a + (-\vec{v})$, alors le point $b = a - \vec{v}$ vérifie $\overrightarrow{ab} = -\vec{v}$ c'est-à-dire $b + \vec{v} = a$. On a bien l'équivalence :

$$b = a - \vec{v} \Leftrightarrow b + \vec{v} = a$$

RETOUR

2.1.3. En utilisant la définition de la somme de a et $\vec{v}$ et la relation de Chasles , on peut écrire :

$$b = a + \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{ab} = \vec{v} \quad \Leftrightarrow \forall c \in E \quad \overrightarrow{ca} + \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ca} + \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \forall c \in E \; \overrightarrow{cb} = \overrightarrow{ca} + \vec{v}.$$

RETOUR

2.1.4. Relire 2.1.2.

RETOUR

2.1.4. Le point $a + \vec{v}$ est le point $(a_1 + v_1, a_2 + v_2)$

RETOUR

2.3.1. L'élément neutre de $T(E)$ est $T(\vec{0})$, c'est-à-dire la translation de vecteur nul, soit l'identité. L'inverse de $t_{\vec{v}} = T(\vec{v})$ est $T(-\vec{v})$, soit la translation de vecteur $-\vec{v}$.

RETOUR

3.5.1. Les sous-espaces affines de dimension 0 sont les points.

RETOUR

3.5.2. Voir 3.4.1.

RETOUR

3.5.5. Soit a un point de V, par hypothèse, le point a est aussi dans W. Le sous-espace vectoriel $\vec{V} = \{\overrightarrow{ax}, x \in V\}$ est contenu dans $\vec{W} = \{\overrightarrow{ax}, x \in W\}$ puisque V est contenu dans W. Mais alors les sous-espaces vectoriels $\vec{V}$ et $\vec{W}$ coïncident si et seulement si leurs dimensions sont égales et il en est de même pour les sous-espaces affines $V = a + \overrightarrow{V}$ et $W = a + \overrightarrow{W}$.

On en déduit que les sous-espaces affines d'une droite sont les points (dimension 0) et la droite elle-même (dimension 1). Les sous-espaces affines d'un plan affine sont les points, les droites et le plan lui-même.

RETOUR

3.6.2. Soit V un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$. D'après 1.5, on peut écrire :

$$\Phi_0(V) = \{v, v \in V\} = V$$

L'ensemble $\Phi_0(V)$ est un sous-espace vectoriel, donc, comme 0 appartient à V, on a montré que V est un sous-espace affine passant par 0 de direction V.

RETOUR

3.10.1 Indication Dans cette question interviennent six lois de composition différentes : $\mathbb{R}$ est le corps des scalaires des espaces vectoriels considérés (2 lois) mais c'est aussi un espace vectoriel sur lui-même ; dans cette structure d'espace vectoriel interviennent 2 lois, essentiellement les mêmes que précédemment mais vues comme lois d'espace vectoriel, ce sont elles qui permettent de construire les lois $\oplus$ et $\bullet$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Pour bien préciser quelle propriété est utile à chaque étape, on va considérer l'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des suites à valeurs dans un espace vectoriel $(E, \uplus, *)$ (ainsi on fait la différence entre $\mathbb{R}$ corps des scalaires et $\mathbb{R}$ espace de valeurs des suites). Les lois sont alors définies par :

$$(u \oplus v)_n = u_n \uplus v_n \qquad (u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$$
$$(\lambda \bullet v)_n = \lambda * u_n \qquad (\lambda \in \mathbb{R},\ v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$$

RETOUR SOLUTION DE LA QUESTION

3.10.1 Solution (voir l'indication) La structure de groupe additif de $(\mathcal{S}(E), \oplus)$ résulte de celle de $(E, \uplus)$, par exemple on démontre l'associativité ainsi : pour u, v et w dans $\mathcal{S}(E)$, on a :

$$\begin{aligned}
((u \oplus v) \oplus w)_n &= (u \oplus v)_n \uplus w_n & &= (u_n \uplus v_n) \uplus w_n \quad &\text{(définition de } \oplus) \\
&= u_n \uplus (v_n \uplus w_n) & & &\text{(associativité de } \uplus) \\
&= u_n \uplus (v \oplus w)_n & &= (u \oplus (v \oplus w))_n \quad &\text{(définition de } \oplus)
\end{aligned}$$

On vérifie de même la commutativité. L'élément neutre de $\mathcal{S}(E)$ est la suite nulle notée ω définie ainsi : pour tout entier n, on a : $\omega_n = 0_E$. Le symétrique de la suite u est la suite u' définie ainsi : pour tout entier n, on a : $u'_n = -u_n$ où $-u_n$ est le symétrique de u_n dans le groupe $(E, \uplus)$.

Il reste à vérifier quatre propriétés où interviennent en plus les lois du corps des scalaires. Pour tous u et v de $\mathcal{S}(E)$ et λ et μ de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \lambda \bullet (u \oplus v) = \lambda \bullet u \oplus \lambda \bullet v \\
&(2) \quad (\lambda + \mu) \bullet u = \lambda \bullet u \oplus \mu \bullet u \\
&(3) \quad \lambda \bullet (\mu \bullet u) = (\lambda.\mu) \bullet u \\
&(4) \quad 1 \bullet u = u
\end{aligned}$$

Pour la propriété (1), on écrit :

$$\begin{aligned}
(\lambda \bullet (u \oplus v))_n &= \lambda * (u \oplus v)_n & &\text{(définition de } \bullet) \\
&= \lambda * (u_n \uplus v_n) & &\text{(définition de } \oplus) \\
&= \lambda * u_n \uplus \lambda * v_n & &\text{(propriété de } * \text{ dans le } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel } E) \\
&= (\lambda \bullet u)_n \uplus (\lambda \bullet v)_n & &\text{(définition de } \bullet) \\
&= (\lambda \bullet u \oplus \lambda \bullet v)_n & &\text{(définition de } \oplus)
\end{aligned}$$

Les autres propriétés se démontrent de même. Après avoir pris conscience de la diversité des lois notées $+$ ou $.$ et des différentes propriétés qui interviennent, on peut accepter sans risque (?) cet abus de notation.

RETOUR PAGE SUIVANTE

3.10.2 L'ensemble $\mathcal{G}(a)$ n'est pas vide car la suite nulle est une suite géométrique. Si u et v sont deux suites géométriques de raison a alors on peut écrire :

$$(u \oplus v)_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = a.u_n + a.v_n = a.(u_n + v_n) = a.(u \oplus v)_n$$

la suite $u \oplus v$ est donc une suite géométrique de raison a. On démontre de même que si λ est un réel, $\lambda \bullet u$ est élément de $\mathcal{G}(a)$. $\mathcal{G}(a)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On aurait pu répondre directement aux deux questions en remarquant que tout élément u de $\mathcal{G}(a)$ est de la forme $u_0 \bullet \alpha$ où α est la suite de $\mathcal{G}(a)$ définie par $\alpha_n = a^n$ pour tout entier n. On en déduit que $\mathcal{G}(a)$ est la droite de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ engendrée par la suite non nulle α.

RETOUR PAGE PRÉCÉDENTE PAGE SUIVANTE

3.10.3 Pour tout entier n, on a : $u_n = u_0 + nb$. On note ι la suite constante égale à 1 et β la suite arithmétique de raison b et de premier terme 0, l'égalité précédente s'écrit alors : $u = u_0 \bullet \iota \oplus \beta$. On en déduit que $\mathcal{H}(b)$ est la droite affine passant par β et de direction $Vect(\iota)$.

RETOUR PAGE PRÉCÉDENTE PAGE SUIVANTE

3.10.4 Si u et v sont dans $\mathcal{C}(a,b)$, leur différence est une suite géométrique de raison a. Réciproquement si on ajoute à u une suite de $\mathcal{G}(a)$, on obtient une suite de $\mathcal{C}(a,b)$. Donc $\mathcal{C}(a,b)$ est une droite affine de direction $\mathcal{G}(a)$.

RETOUR PAGE PRÉCÉDENTE PAGE SUIVANTE

3.10.5 A la recherche d'une suite constante dans $\mathcal{C}(a,b)$, on est amené à résoudre $x = ax + b$, la suite c définie par $c_n = b/(1-a)$ pour tout entier n est une suite constante de $\mathcal{C}(a,b)$. Si u appartient à $\mathcal{C}(a,b)$, alors $u \ominus c$ appartient à $\mathcal{G}(a)$ donc vérifie $(u \ominus c)_n = a^n.(u_0 - b/(1-a))$. On obtient donc la même formule.

RETOUR PAGE PRÉCÉDENTE PAGE SUIVANTE

3.10.6 Soit u un élément de $\mathcal{C}(a,b)$, on définit la suite $\bar{u}$ par : $(\bar{u})_n = u_{n+1}$ pour tout entier n. Il est évident que $\bar{u}$ appartient encore à $\mathcal{C}(a,b)$ et d'après la question précédente, $v = \bar{u} \ominus u$ appartient à $\mathcal{G}(a)$. On a donc :

$$v_n = a^n.(u_1 - u_0) \quad \text{et} \quad u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$$

On obtient donc :

$$u_n = u_0.\alpha_n + b\,\frac{1-a^n}{1-a}.$$

La suite γ définie par $\gamma_n = b\,\dfrac{1-a^n}{1-a}$ appartient à $\mathcal{C}(a,b)$ puisqu'elle vaut $u \ominus u_0 \bullet \alpha$.

Remarque : Cette méthode peut être utilisée en d'autres occasions. Pour étudier une suite, on a préféré étudier la série associée, c'est-à-dire la série dont les sommes partielles sont les termes de la suite donnée.

RETOUR PAGE PRÉCÉDENTE PAGE SUIVANTE

3.10.7 La suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'équation

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = ba^{-n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

On a donc : $\lambda_n = \sum_{p=1}^{n} ba^{-p} + \lambda_0 = b\,\dfrac{1-a^n}{1-a}a^{-n} + u_0$.

Comme à la question précédente, on obtient donc :

$$u_n = u_0.a^n + b\,\frac{1-a^n}{1-a}.$$

Remarque : Cette méthode est la méthode de variation de la constante dans le cas discret. Les suites vérifiant l'"équation homogène" $u_{n+1} = au_n$ sont de la forme $(\lambda a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où λ est une constante qu'on fait varier pour trouver les solutions de l'équation "avec second membre non nul" $u_{n+1} = au_n + b$.

RETOUR PAGE PRÉCÉDENTE

4.1.2. $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont dits en somme directe si $\vec{A} \cap \vec{B}$ est réduite à $\vec{0}$.

RETOUR

4.1.2. Si l'intersection des sous-espaces affines A et B n'est pas vide et est réduite à un point, sa direction $\vec{A} \cap \vec{B}$ doit être $\vec{0}$, les sous-espaces vectoriels $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont donc en somme directe.

RETOUR

4.1.2. Fin La condition n’est pas suffisante car elle est vérifiée par une droite affine et un point qui n’appartient pas à cette droite mais l’intersection des deux est vide, cf. aussi 4.1.5.

RETOUR

4.1.3. Comme les deux plans P_1 et P_2 ne sont pas disjoints, leur intersection est un sous-espace affine V de dimension au plus 1 car ils sont distincts (3.5.5), c'est donc un point ou une droite. Si c'était un point, par 4.1.2, $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ seraient en somme directe, le sous-espace $\vec{P}_1 \oplus \vec{P}_2$ serait alors de dimension 4, ce qui est absurde, donc V est une droite.

RETOUR

4.1.4.1. Indication L'intersection F des trois plans est l'ensemble des solutions du système

$$S : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & \beta z & = & a \\ 2x & + & 4y & & & = & b \\ \alpha x & + & (\alpha+1)y & & & = & c \end{array} \right.$$

équivalent, par la méthode de Gauss, au système

$$S' : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 4y & & & = & b \\ & & (1-\alpha)y & & & = & c - \frac{\alpha b}{2} \\ & & & & \beta z & = & a - \frac{b}{2} \end{array} \right.$$

RETOUR

4.1.4.1. Solution

- Cas $(\alpha-1)\beta \neq 0$: F est réduit au point $(\frac{2b-\alpha b-2c}{1-\alpha}, \frac{2c-b}{2(1-\alpha)}, \frac{2a-b}{2\beta})$.

  Le système S' est un système d'équations cartésiennes du point.

- Cas $\alpha = 1$ et $\beta \neq 0$:

  - Si $b \neq 2c$, F est vide.

  - Si $b = 2c$, F est la droite d'équations $\begin{cases} 2x + 4y = b \\ \beta z = a - c \end{cases}$

  Des équations paramétriques de F sont : $\begin{cases} x = b - 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = \beta^{-1}(a-c) \end{cases}$

  avec λ paramètre réel.

- Cas $\alpha \neq 1$ et $\beta = 0$:

  - Si $b \neq 2a$, F est vide.

  - Si $b = 2a$, F est la droite d'équations $\begin{cases} 2x + 4y = b \\ (1-\alpha)y = c - \frac{\alpha}{2}a \end{cases}$.

  Des équations paramétriques de F sont : $\begin{cases} x = a - \frac{2(c-\alpha a)}{1-\alpha} \\ y = \frac{c-\alpha a}{1-\alpha} \\ z = \lambda \end{cases}$

  avec λ paramètre réel.

  La droite F est la droite passant par le point $(a - \frac{2(c-\alpha a)}{1-\alpha}, \frac{c-\alpha a}{1-\alpha}, 0)$ et dirigée par le vecteur $(0,0,1)$.

- Cas $\alpha = 1$ et $\beta = 0$:

  - Si $b \neq 2a$ ou $b \neq 2c$, F est vide.

  - Si $b = 2a = 2c$, F est le plan d'équation $x + 2y = a$.

  Des équations paramétriques du plan sont : $\begin{cases} x = a - 2\mu \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{cases}$

RETOUR REVOIR L'INDICATION

4.1.4.2. L'intersection F des trois plans est l'ensemble des solutions du système

$$S : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 7y & + & z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & b \\ -3x & + & 9y & - & (\alpha+3) & = & 2 \end{array} \right.$$

Le déterminant du système vaut $3(\alpha - 31)$. Le déterminant extrait des deux premières lignes et deux premières colonnes n'est pas nul. Donc si α est différent de 31, F est réduit à un point m. Si α vaut 31, F est vide ou est une droite affine.

RETOUR

4.1.4.2. • Cas $\alpha \neq 31$: F est le point $m = (x, y, z)$ avec

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ b & 2 & 3 \\ 2 & 9 & -(\alpha+3) \end{vmatrix}}{3(\alpha-31)} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & b & 3 \\ -3 & 2 & -(\alpha+3) \end{vmatrix}}{3(\alpha-31)} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & b \\ -3 & 9 & 2 \end{vmatrix}}{3(\alpha-31)}$$

• Cas $\alpha = 31$: F n'est pas vide si et seulement si le déterminant bordant $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & b \\ -3 & 9 & 2 \end{vmatrix}$ est nul, c'est-à-dire b égale 1.

Donc si $b \neq 1$, F est vide, sinon F est la droite d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & 7y & + & z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & b \end{array} \right.$$

Des équations paramétriques de F sont :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x & = & \dfrac{\begin{vmatrix} 3-\lambda & 7 \\ b-3\lambda & 2 \end{vmatrix}}{-3} \\ y & = & \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3-\lambda \\ 1 & b-3\lambda \end{vmatrix}}{-3} \\ z & = & \lambda \end{array} \right.$$

RETOUR REVOIR L'INDICATION

4.2.2. i) Comme A n'est pas réduit à un point, la dimension de $\mathrm{Aff}\ A$ est au moins 1, or la droite $D = a + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{ab}\}$ contient A donc c'est $\mathrm{Aff}\ A$, le plus petit sous-espace affine contenant A puisque sa dimension est minimale.

RETOUR

4.2.2. ii) Comme A n'est pas réduit à un point, la dimension de $\mathrm{Aff}\, A$ est au moins 1. La droite D qui contient les trois points (alignés) est donc le sous-espace affine engendré par ces trois points.

RETOUR

4.2.2. iii) Comme les trois points ne sont pas alignés, $\mathrm{Aff}\, A$ est au moins de dimension 2, le sous-espace affine $P = a + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}\}$ contient les trois points et est au plus de dimension 2, c'est donc le plan engendré par a, b et c.

RETOUR

4.2.3. Les points i, j et k sont-ils alignés ?

RETOUR

4.3.2. $\mathrm{Aff}(\{a,b\}) = a + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{am}, m \in \{a,b\}\} = a + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{ab}\}$.

RETOUR

5.3.1. (i) Soit $\vec{D}$ la direction de la droite donnée D, la droite passant par a et parallèle à D est la droite $a + \vec{D}$. Le résultat est vrai en toute dimension.

RETOUR

5.3.1. (ii) Si D_1 et D_2 sont parallèles à Δ, on a, par définition :

$$\vec{D}_1 = \vec{\Delta} \quad \text{et} \quad \vec{D}_2 = \vec{\Delta} \quad \Rightarrow \vec{D}_1 = \vec{D}_2$$

donc D_1 et D_2 sont parallèles.

RETOUR

5.3.1. (iii) Si D_1 et D_2 ont en commun un point a, leur intersection est le sous-espace affine $a + (\vec{D}_1 \cap \vec{D}_2) = a + \vec{D}_1 = a + \vec{D}_2$ puisqu'elles ont même direction. Elles sont donc confondues.

RETOUR

5.3.1. (iv) Si deux droites d'un plan n'ont pas même direction, leurs directions sont en somme directe et comme les droites sont coplanaires, les directions sont supplémentaires. Alors, d'après 4.1.5, leur intersection est exactement un point.

L'énoncé à démontrer est la contraposée de ce résultat qui n'est pas vrai pour des droites non coplanaires (voir 5.1.1).

RETOUR

5.3.3. Démontrez que la direction d'une droite affine est la droite vectorielle engendrée par l'un de ses vecteurs directeurs. Concluez.

RETOUR

6.8. Sous-espace affine engendré par la réunion de deux sous-espaces affines.

a) Par définition, on a :

$$\overrightarrow{T} = \mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{ax}, x \in V \cup W\}) = \mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{bx}, x \in V \cup W\})$$

donc $\overrightarrow{T}$ contient $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$. Comme a et b sont dans T, le vecteur $\overrightarrow{ab}$ appartient à $\overrightarrow{T}$. Donc $\overrightarrow{T}$ contient $\overrightarrow{V}+\overrightarrow{W}+\mathrm{Vect}(\overrightarrow{ab})$. Donc T contient le sous-espace affine $F = a + \overrightarrow{V} + \overrightarrow{W} + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{ab})$.

Réciproquement, F est un sous-espace affine contenant $V = a + \overrightarrow{V}$ et $W = a + \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{W}$ donc $V \cup W$ donc T.

Conclusion : $\mathrm{Aff}(V \cup W) = a + \overrightarrow{V} + \overrightarrow{W} + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{ab})$.

b) Si $V \cap W$ est non vide, on considère un point c de $V \cap W$ et on remarque que $\overrightarrow{ab}$ est la somme de $\overrightarrow{ac}$ qui appartient à $\overrightarrow{V}$ et de $\overrightarrow{cb}$ qui appartient à $\overrightarrow{W}$.

Réciproquement, si $\overrightarrow{ab}$ se décompose comme somme d'un vecteur $\vec{v}$ de $\overrightarrow{V}$ et d'un vecteur $\vec{w}$ de $\overrightarrow{W}$, on a l'égalité :

$$b - \vec{w} = a + \vec{v}$$

alors le point $c = a + \vec{v} = b - \vec{w}$ appartient à $V \cap W$ (voir 415).

c) Si $V \cap W$ est vide, le vecteur $\overrightarrow{ab}$ n'appartient pas à $\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}$ donc la dimension de $\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W} + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{ab})$, qui est celle de T par définition, vaut $\dim(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}) + 1$. Sinon, $\overrightarrow{ab}$ appartient à $\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}$ donc $\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W} + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{ab})$ est réduit à $\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}$ et la dimension de T est celle de $\overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}$.

RETOUR