

GEOMETRIE AFFINE

Document de travail pour la préparation au CAPES

Marie-Claude DAVID, Frédéric HAGLUND, Daniel PERRIN

Marie-Claude.David@math.u-psud.fr

8 décembre 2003

Ce texte propose une présentation de la géométrie affine, c'est-à-dire de la partie de la géométrie que l'on apprend au collège et au lycée et qui concerne les propriétés des droites, plans, etc., (à l'exclusion des notions métriques : distance, angle). La différence essentielle avec ce que vous avez appris au lycée est qu'ici la géométrie s'appuie fondamentalement sur l'algèbre linéaire. La géométrie affine est une question peu abordée dans les cours de DEUG et de licence mais elle figure au programme de l'écrit du CAPES et elle peut avoir une grande importance dans les problèmes. Ce document comporte **quatre parties**.

copyleft **LDL** : **Licence pour Documents Libres**

1. CONTENU

I. Espaces affines

Dans cette partie, nous développons la théorie des espaces affines abstraits (de dimension finie), qui permet notamment de traiter les problèmes géométriques d'alignement, de concourance et de parallélisme. L'intérêt majeur de cette présentation de la géométrie réside dans l'utilisation de l'outil simple et puissant que fournit **l'algèbre linéaire**. C'est le fil conducteur qui guide ce texte.

II. Barycentres

Dans cette deuxième partie nous étudions la notion de barycentre qui est la traduction en affine du concept de combinaison linéaire dans un espace vectoriel. Le lecteur verra que c'est un outil très efficace pour faire de la géométrie et notamment pour montrer que des points sont alignés ou que des droites sont concourantes.

III. Convexité

Dans cette troisième partie, nous étudions la notion de convexité. Il s'agit d'une notion très intuitive, intimement liée à celle de barycentre, que l'on rencontre (au moins implicitement) dès le collège dans les questions qui touchent aux cas de figures. Attention, les démonstrations des propriétés de convexité, même lorsqu'elles semblent évidentes, ne sont pas toujours faciles.

IV. Applications affines

Dans cette quatrième partie, nous étudions les applications affines qui sont les applications qui respectent la structure affine. La présence de l'espace vectoriel sous-jacent permet d'associer à une telle application une application linéaire. Une question essentielle est alors l'existence de points fixes pour une application affine. En effet, en présence de points fixes, l'application affine est déterminée par sa partie linéaire. Dans le cas contraire, on dispose



Contenu

Documents Libres

Mode d'emploi

Conseils de navigation

Accueil

Page de Titre



Page 3 de 5

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

d'un succédané, le théorème de décomposition (7.5) qui, s'il n'est pas au programme du CAPES dans sa forme générale, intervient de façon essentielle dans l'étude des symétries glissées et des isométries affines.

Nous montrons au paragraphe 4 des conséquences géométriques des applications affines (précisément des homothéties-translations), en particulier le théorème de Thalès.

2. LICENCE POUR DOCUMENTS LIBRES

Les documents du projet GAEL sont utilisables sous les conditions énoncées dans la **Licence pour Documents Libres version 1.1** ou ultérieure, dont le texte complet est disponible **ici** En gros, ceci signifie que vous pouvez "les recopier et les distribuer, avec ou sans modification, par tous moyens possibles et imaginables", mais que vous ne pouvez pas interdire leur diffusion (par exemple en déposant un autre copyright !), ni en faire une utilisation commerciale sans l'accord explicite des auteurs. Chaque document fait l'objet d'une notice de copyright séparée.

3. MODE D'EMPLOI

Ce document est un document de travail personnel pour la préparation au CAPES qui comprend l'essentiel du cours de géométrie affine que vous devez maîtriser. Il doit vous aider à assimiler les notions de la géométrie affine. Des commentaires sur les définitions et les résultats (sur un fond de couleur) vous aideront à faire le lien avec ce que vous connaissez déjà et à développer votre intuition des notions nouvelles, mais ce qui est nouveau restera pour vous abstrait (voire obscur) tant qu'un vrai travail ne vous l'aura pas rendu familier et concret.

Une méthode de travail logique que vous pouvez utiliser lorsque vous abordez un chapitre est la suivante :

- Procéder à une première lecture des énoncés et des commentaires qui vous donnera une vue d'ensemble de la partie à étudier.
- Passer à l'apprentissage proprement dit qui doit être actif, c'est-à-dire se faire crayon en main. Dans cette deuxième lecture, vous devez, pour chaque énoncé :
 1. Dessiner des figures. C'est une habitude essentielle à prendre, en géométrie et cela vous permettra de faire le lien avec vos connaissances antérieures. (Vous pourrez ensuite comparer vos figures avec celles qui vous sont proposées en cliquant sur ✖).
 2. Comprendre le sens de l'énoncé, quitte à revenir en arrière pour revoir ce qui précède. En cas de difficulté, voir (5).
 3. Essayer de produire une démonstration avant de lire celle du polycopié. L'expérience montre en effet que cette première approche personnelle, même si elle a été infructueuse, vous permettra de mieux rentrer dans la démonstration des auteurs (et éventuellement de la critiquer).
 4. Le texte est parsemé de ♠ qui sont autant d'invitations à réfléchir sur les définitions et les résultats qui viennent d'être énoncés. Vous devez donc réaliser le travail demandé dans ces ♠. Pour certains, des indications ou des solutions sont fournies mais vous ne devez vous y reporter qu'en dernier recours.
- Si, dans cette lecture active, certains points vous paraissent encore obscurs, notez-les et posez les questions aux enseignants, elles seront les bienvenues.
- La troisième étape est d'aborder les exercices d'application ou de complément, notés ♣, ils testeront votre compréhension et vous permettront d'aller plus loin.
- Enfin, les questions marquées d'un ♥ sont plus délicates mais elles vous mèneront au cœur des choses.

AU TRAVAIL !



Contenu

Documents Libres

Mode d'emploi

Conseils de navigation

Accueil

Page de Titre



Page 5 de 5

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

4. CONSEILS DE NAVIGATION

- Le bouton "Accueil" vous permet d'accéder au site web du département de mathématiques de l'université Paris-Sud.
- Les titres des différentes parties dans la page "Contenu" sont des liens vers ces documents.
- Tous les titres de la table des matières des différentes parties (accessible par "sommaire") sont des liens.
- Les doubles flèches renvoient au début ou à la fin. Les simples flèches font défiler les pages une par une. Vous pouvez aller à une page de votre choix en indiquant son numéro dans la fenêtre qui apparaît lorsque vous cliquez sur "page 1 à 10".
- Le bouton "retour" permet de revenir à la fenêtre précédente.
- Les liens extérieurs sont bleus. Vous pouvez les ouvrir dans une autre fenêtre en appuyant sur la touche alt ou options (pour les Mac). Un lien bleu et rouge (par exemple : [I.1.2](#)) renvoie au paragraphe 1.2 de la première partie. Il suffit de cliquer sur [I](#). pour accéder à ce paragraphe.
- Les références rouges (numéro ou mot) internes au document sont des liens.
- Vous pouvez obtenir certaines solutions des ♠, ♣ ou ♥ en cliquant sur ce symbole (quand il est bleu). Les indications s'obtiennent en cliquant sur ✕.