GEOMETRIE AFFINE

Document de travail pour la préparation au CAPES

Première partie : ESPACES AFFINES

Marie-Claude DAVID, Frédéric HAGLUND, Daniel PERRIN
Marie-Claude.David@math.u-psud.fr

8 décembre 2003

Ce document est la première partie du cours de géométrie affine.
Dans cette partie on développe la théorie des espaces affines abstraits (de dimension finie), qui permet notamment de traiter les problèmes géométriques d'alignement, de concours et de parallélisme. L'intérêt majeur de cette présentation de la géométrie réside dans l'utilisation de l'outil simple et puissant que fournit **l'algèbre linéaire**. C'est le fil conducteur qui guide ce texte. L'objectif est d'appliquer cette théorie aux cas "concrets" du plan et de l'espace (les plus importants pour le CAPES). Aussi, en travaillant ce cours, il est essentiel d'illustrer les définitions et théorèmes dans le plan et l'espace :
Faites des dessins, encore des dessins, toujours des dessins !

CONTENU DU COURS

Dans l'introduction, vous trouverez le mode d'emploi de ce document et les conseils de navigation.

Table des matières

Accueil

Page de Titre

Sommaire

Page 3 de 27

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

1. Espace affine

Dans tout le texte, $\vec{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1.1. Définition.

Un **espace affine d'espace vectoriel sous-jacent** $\vec{E}$ consiste en la donnée d'un ensemble E non vide et d'une application Φ de $E \times E$ dans $\vec{E}$ qui à un couple (x, y) de E associe un vecteur noté $\overrightarrow{xy}$ et qui vérifie

1) $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$ (relation de Chasles).

2) Pour tout point a de E, l'application Φ_a définie de E dans $\vec{E}$ par

$$\Phi_a(x) = \Phi(a, x) = \overrightarrow{ax}$$

est une bijection de E dans $\vec{E}$.

La **dimension** de l'espace affine E est par définition celle de l'espace vectoriel sous-jacent $\vec{E}$.

En fait, cette définition est également valable pour un espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ de dimension quelconque (finie ou non), sur un corps quelconque.

Il y a deux types d'objets en jeu : les éléments de E (appelés points et notés $a, b, x, y, \ldots$) et ceux de $\vec{E}$ (appelés vecteurs et notés $\vec{v}$,...). En général, dans ce texte, on munit de flèches tout ce qui est vectoriel et on réserve les majuscules aux parties de E ou $\vec{E}$. Vous verrez que c'est une notation cohérente et commode. Cependant, comme ce n'est pas la coutume de l'enseignement secondaire, il est peut-être préférable, à l'oral du CAPES, d'utiliser des notations plus standard et de noter A, B les points de l'espace affine et $\overrightarrow{AB}$ les vecteurs.

1.2. ♠. Exemple test. On note E l'ensemble des (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $x+y+z = 1$ et $\vec{E}$ l'ensemble des (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $x + y + z = 0$.

1) Vérifiez que $\vec{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

2) On définit Φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^3$ par $\Phi\big((x, y, z), (x', y', z')\big) = (x' - x, y' - y, z' - z)$. Montrez que $\Phi(E \times E)$ est inclus dans $\vec{E}$ et que Φ définit sur E une structure d'espace affine dont l'espace vectoriel sous-jacent est $\vec{E}$.

> Tout au long de ce document de travail, vous pourrez tester votre assimilation du cours par certains exercices où l'espace ambiant sera toujours le plan affine E ci-dessus. Ceci vous permettra d'avoir un exemple familier pour illustrer efficacement les définitions et les théorèmes.

1.3. Généralisation. ♡ En procédant de façon analogue à l'exemple test définissez sur $E_n = \{(x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 1\}$ une structure d'espace affine dont l'espace vectoriel sous-jacent est $\vec{E}_n = \{(x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_0+x_1+\cdots+x_n = 0\}$.

1.4. Premières propriétés.

1.4.1. ♠ Ecrivez la relation de Chasles pour obtenir :
$\forall x \in E, \overrightarrow{xx} = \vec{0}$ et $\forall (x, y) \in E^2, \overrightarrow{xy} = -\overrightarrow{yx}$

1.4.2. ♣ Montrer que, pour quatre points x, y, x' et y', les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes :

$$(i) \quad \overrightarrow{xy} = \overrightarrow{x'y'}, \qquad\qquad (ii) \quad \overrightarrow{xx'} = \overrightarrow{yy'}$$

Si l'une de ces propriétés est vérifiée et si les vecteurs $\overrightarrow{xy}$ et $\overrightarrow{xx'}$ sont indépendants on dit que $xyy'x'$ est un **parallélogramme**.

1.4.3. ♡ L'application Φ définit une relation d'équivalence sur $E \times E$:

$$(a,b) \sim (a',b') \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(a,b) = \Phi(a',b') \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{a'b'}$$

C'est la relation d'équipollence entre bipoints (i.e. couples de points).

1.4.4. ♡ Montrer que, si la propriété (1) est vérifiée, la propriété (2) de la définition est équivalente à : (2') il existe un point a_0 de E tel que Φ_{a_0} est une bijection.

1.5. Exemple fondamental.

On peut munir un espace vectoriel $\vec{E}$ d'une structure d'espace affine, d'espace vectoriel sous-jacent $\vec{E}$ lui-même, dite **structure affine canonique** : Φ est l'application de $\vec{E} \times \vec{E}$ dans $\vec{E}$ définie par $\overrightarrow{uv} = \Phi(u,v) = v - u$.

1.5.1. ♠ Vérifier (1) et (2) pour Φ. Précisez Φ_0 et l'application réciproque de Φ_u.

Comme espace vectoriel, on peut prendre en particulier $\vec{E} = \mathbb{R}^2$ ou $\vec{E} = \mathbb{C}$, puis $\vec{E} = \mathbb{R}^n$, munis de leur structure canonique de $\mathbb{R}$-espace vectoriel (dans $\mathbb{R}^n$, l'addition et la multiplication par un scalaire se font coordonnée par coordonnée).

1.5.2. ♠ Lorsque $E = \mathbb{R}^3$, calculer $\Phi((2,-1,0),(1,1,-1))$.

> Nous verrons plus loin que tous les espaces affines de dimension 2 (resp. n) sont isomorphes à $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^n$).

1.5.3. *Commentaire et avertissement.* Ici, il faut faire bien attention. Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on considère **deux** structures différentes : la structure (canonique) d'espace vectoriel et la structure (canonique) d'espace affine. Ainsi, un **élément** de l'ensemble $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire un couple (x,y) de nombres réels) peut être considéré tantôt comme un **vecteur**, tantôt comme un **point** : tout dépend de la structure qu'on veut considérer à ce moment là. Si on considère

$\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}^2$, on a en plus une structure de corps : les éléments peuvent donc aussi être considérés comme des **scalaires**.

Notez qu'on peut encore considérer beaucoup d'autres structures sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}$: par exemple la structure d'espace topologique, la structure d'espace métrique (pour la distance euclidienne par exemple) ... La différence se verra surtout quand on introduira des applications entre ces espaces. Par exemple une translation sera une application affine, c'est-à-dire une bonne application vis à vis de la structure d'espace affine, mais pas une application linéaire, donc pas une bonne application pour la structure vectorielle.

> À l'école élémentaire, les enfants, avec leurs crayons, leurs règles et leurs compas, font de la géométrie sur un plan **physique concret** : la page du cahier et on se contente de leur faire constater empiriquement certaines propriétés des figures. Plus tard, au collège, on commence à donner des embryons de preuves de ces propriétés, mais en partant d'un corpus d'axiomes encore mal définis.
> A la fin du collège et au lycée on introduit les coordonnées et les vecteurs. Sans le dire clairement, on fournit alors aux élèves un modèle **mathématique abstrait** de la géométrie. Ce modèle, c'est $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure canonique d'espace affine (en fait, on ajoute la structure euclidienne : le produit scalaire, ce qui permet de modéliser aussi les distances et les angles). Dans ce modèle qui repose sur les axiomes des espaces vectoriels (et, plus en amont, des ensembles), toutes les notions (points, droites) sont bien définies, tous les théorèmes, tous les postulats, plus ou moins admis au collège, peuvent être démontrés rigoureusement.

En fait, on peut aussi donner une présentation axiomatique directe de la géométrie à partir des notions de points, droites, etc, à la manière d'Euclide ou, plus récemment, de Hilbert, mais c'est nettement plus compliqué, comme on s'en convaincra en allant regarder le livre de David Hilbert, Les fondements de la géométrie, Dunod, 1971.

1.6. ♡. Vectorialisation d'un espace affine. Nous avons vu en 1.5 que tout espace vectoriel donne naissance à un espace affine. Mais cet espace possède un point particulier : le vecteur $\vec{0}$. Au contraire, dans un espace affine général E aucun point n'est privilégié par rapport aux autres : on pourrait dire que la géométrie affine est de la géométrie vectorielle *sans origine a priori*.

Cependant on peut quand même selon les besoins de la cause choisir un point ω comme **origine** de E. Cela permet de **vectorialiser** E **en** ω, c'est -à-dire d'identifier le point a de E avec le vecteur $\overrightarrow{\omega a}$ de $\vec{E}$, la bijection réciproque associant au vecteur $\vec{u}$ le point $\omega + \vec{u}$ (la bijectivité vient de l'axiome 2) des espaces affines).

Vectorialiser un espace affine E en une origine convenablement choisie permet de ramener un problème affine à un problème équivalent dans $\vec{E}$, où l'on dispose de tous les outils de l'algèbre linéaire : c'est une méthode très fréquemment utilisée.

1.7. D'autres espaces affines.

1.7.1. ♣ Soient E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, polynomiales de degré inférieur ou égal à n, E_1 l'ensemble des fonctions f de E telles que $\int_0^1 f(t)dt = 1$ et E_0 l'ensemble des fonctions f de E telles que $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

Montrer que E et E_0 sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. L'ensemble E_1

en est-il un ?

Soient f, g dans E_1.

Les éléments $f+g$, $f-g$, $\dfrac{f+g}{2}$ sont-ils dans E_1, dans E_0 ?

Montrer que E_1 peut-être muni d'une structure d'espace affine d'espace vectoriel sous-jacent E_0.

1.7.2. Voir aussi, en 3.8, l'exemple (fondamental) de l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires et en 3.9 le cas d'une équation différentielle linéaire.

2. Translations

2.1. Notations.

D'après la propriété (2) de la structure d'espace affine, pour tout point a de E et tout vecteur $\vec{v}$ de $\vec{E}$, il existe un unique point b de E tel que $\overrightarrow{ab} = \vec{v}$. On **note** $a + \vec{v}$ ce point b, c'est-à-dire qu'on a :

$$b = a + \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{ab} = \vec{v}.$$

On peut donc écrire : $a + \overrightarrow{ab} = b$.

> $\triangle$ Attention ! On a défini la somme d'un point et d'un vecteur comme un certain point : le $+$, ici, n'est pas le $+$ de l'espace vectoriel (un problème analogue se pose dans les espaces vectoriels, où il y a une multiplication interne des scalaires entre eux et une multiplication externe des scalaires par les vecteurs : les deux opérations sont notées "."). Heureusement, il n'y a pas de confusion possible, en effet :

2.1.1. ♠ Donner un sens à $a - \vec{v}$.

2.1.2. ♠ Si $\vec{E}$ est un espace vectoriel muni de sa structure d'espace affine canonique, la somme d'un point u et d'un vecteur v est le point w tel que $v = \overrightarrow{uw} = w - u$, c'est donc le point $w = u + v$ égal à la somme, dans l'espace vectoriel, des deux vecteurs correspondants au point et au vecteur dont on fait la somme (la notation $+$ est cohérente).

2.1.3. ♠ Montrez : $b = a + \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \forall c \in E \ \overrightarrow{cb} = \overrightarrow{ca} + \vec{v}$.

> Cette caractérisation de la somme d'un point et d'un vecteur est importante, elle signifie que l'égalité entre points "$b = a + \vec{v}$" se transforme en une égalité vectorielle après le choix d'une origine c.

Montrez, pour tous $a, b \in E$ et tous $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$ les formules :

$$(a + \vec{u}) + \vec{v} = a + (\vec{u} + \vec{v}) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{(a + \vec{u})(b + \vec{v})} = \vec{v} + \overrightarrow{ab} - \vec{u}.$$

2.1.4. ♠ ✠ Les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont des couples de réels, on considère un point $a = (a_1, a_2)$ du **plan affine** $\mathbb{R}^2$ et un vecteur $\vec{v} = (v_1, v_2)$ du **plan vectoriel** $\mathbb{R}^2$, écrivez le point $a + \vec{v}$ comme un couple de réels en utilisant la définition de la structure affine canonique.

2.2. Définition.

Soit E un espace affine d'espace vectoriel sous-jacent $\vec{E}$ et $\vec{v}$ un vecteur de $\vec{E}$; on appelle translation de vecteur $\vec{v}$ l'application $t_{\vec{v}}$ de E dans E définie par $t_{\vec{v}}(a) = a + \vec{v}$.

On note $T(E)$ l'ensemble des translations de E et T l'application de $\vec{E}$ dans $T(E)$ qui au vecteur $\vec{v}$ associe la translation $t_{\vec{v}}$.

Si on pose $b = t_{\vec{v}}(a)$ pour un point a donné, cela revient à dire qu'on a $\overrightarrow{ab} = \vec{v}$, le vecteur d'une translation est donc uniquement déterminé par l'image d'un point particulier, ceci implique que T est une bijection.

2.2.1. ♠ Soient a et b deux points de E, t une translation et a', l'image de a par t ; exprimez $t(b)$ en fonction de a, b et a'.

2.2.2. ♠ On reprend l'exemple test. Soit $\vec{v}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et $T_{\vec{v}}$ la translation de $\mathbb{R}^3$ correspondante ($T_{\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{u} + \vec{v}$ pour tout $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$).

Si p est un point de E, montrez : $T_{\vec{v}}(p) \in E \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \in \vec{E}$.

Lorsque $\vec{v} \in \vec{E}$, il existe une translation $t_{\vec{v}}$ de E dans E définie comme en 2.2 par la structure d'espace affine sur E (d'espace vectoriel sous-jacent $\vec{E}$). Vérifiez que $t_{\vec{v}}$ est la restriction de $T_{\vec{v}}$ à E.

2.3. Proposition.

L'ensemble $T(E)$ des translations de E muni de la loi $\circ$ de composition des applications est un groupe commutatif [1] isomorphe au groupe additif $(\vec{E}, +)$.

*Démonstration :*Nous allons commencer par calculer $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$ pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\vec{E}$. Soit a un point de E, on pose : $a' = t_{\vec{u}}(a)$ et $a'' = t_{\vec{v}}(a')$. Par définition, on a :

$$\overrightarrow{aa'} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a'a''} = \vec{v},$$

[1] $(G, \circ)$ est un groupe si :
i) $\circ$ est une loi de composition interne sur l'ensemble G ($a, b \in G \Rightarrow a \circ b \in G$)
ii) $\circ$ est associative ($(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ pour tous a, b, c de G)
iii) $\circ$ admet un élément neutre e ($e \circ a = a \circ e = a$ pour tout a de G)
iv) tout élément a de G a un symétrique a' dans G ($a \circ a' = a' \circ a = e$).
Le groupe est commutatif si la loi est commutative ($a \circ b = b \circ a$ pour tous a, b de G)

d'où on tire, grâce à la relation de Chasles : $\overrightarrow{aa''} = \vec{u} + \vec{v}$, c'est-à-dire :

$$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}(a) = a + (\vec{u} + \vec{v})$$

Cette relation, vraie pour tout point a de E, signifie que $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$, c'est-à-dire : $T(\vec{v}) \circ T(\vec{u}) = T(\vec{u} + \vec{v})$. L'application T de $(\vec{E}, +)$ dans $(T(E), \circ)$ est donc un isomorphisme de groupe, on en déduit que $(T(E), \circ)$ est un groupe commutatif. $\square$

2.3.1. ♠ Quel est son élément neutre ? Quel est l'inverse de $t_{\vec{u}}$?

3. Sous-espaces affines

3.1. Nous cherchons à caractériser maintenant les sous-ensembles V de E qui sont munis d'une structure d'espace affine par la restriction de Φ ; évidemment une condition nécessaire est que pour tout a de V, le sous-ensemble $\Phi_a(V)$ de $\vec{E}$ soit un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$. On rappelle la définition :

$$\Phi_a(V) = \{\overrightarrow{ax},\ x \in V\}$$

Nous allons voir qu'il suffit que cette condition soit réalisée pour un point de V. Pourtant en général, si V est un sous-ensemble de E, $\Phi_a(V)$ dépend de a.

3.1.1. ♠ Soient deux points a et b d'un espace affine E. Comparer $\Phi_a(V)$ et $\Phi_b(V)$ dans les cas suivants :

1. $V = \{a, b\}$
2. $V = [a, b] = \{a + t\overrightarrow{ab}, t \in [0, 1]\}$
3. $V = [a, b] = \{a + t\overrightarrow{ab}, t \in \mathbb{R}\}$

3.2. Proposition.

Soient E un espace affine d'espace vectoriel sous-jacent $\vec{E}$ et V un sous-ensemble de E vérifiant : il existe un point a de V tel que l'image directe $\Phi_a(V)$ soit un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.

Alors pour tout b de V, $\Phi_b(V)$ est le même sous-espace vectoriel de $\vec{E}$ que $\Phi_a(V)$.

Démonstration :

Le sous-espace vectoriel $\Phi_a(V)$ contient le vecteur $\overrightarrow{ab}$ et donc l'ensemble $\{\overrightarrow{ax} - \overrightarrow{ab} \mid x \in V\}$, c'est-à-dire $\Phi_b(V)$.

Montrons maintenant l'autre inclusion. Soit un élément $\overrightarrow{ax}$ de $\Phi_a(V)$ (x est un point de V), posons $y = \Phi_b^{-1}(\overrightarrow{ax})$, nous avons donc $\overrightarrow{by} = \overrightarrow{ax}$. Alors le vecteur $\overrightarrow{ax}$ appartient à $\Phi_b(V)$ si et seulement si y est un point de V c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{ay}$ appartient à $\Phi_a(V)$. Comme $\Phi_a(V)$ est un sous-espace vectoriel, ce résultat est obtenu grâce à la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{ay} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{by} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ax}.$$

□

3.3. Définition.

Soit E un espace affine d'espace vectoriel sous-jacent $\vec{E}$. Un sous-ensemble non vide V de E est appelé un **sous-espace affine** s'il existe un point a appartenant à V tel que $\Phi_a(V)$ soit un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$. On dit alors que V est le sous-espace affine passant par a de direction $\vec{V} = \{\overrightarrow{ax} \mid x \in V\}$ ($\vec{V}$ ne dépend pas de a d'après la proposition précédente).

Par définition de $\vec{V}$, on a $V = \{a + \vec{v} \mid \vec{v} \in \vec{V}\}$; on notera donc $V = a + \vec{V}$.

3.3.1. ♠ Montrer que l'espace E de l'exemple test est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$.

3.4. Remarques :

3.4.1. Pour tous x et y dans V, le vecteur $\overrightarrow{xy}$ appartient à $\vec{V}$, en effet il est égal à $\overrightarrow{ay} - \overrightarrow{ax}$. (Ceci pourrait être la base d'une définition alternative des sous-espaces affines.)

3.4.2. ♡. *Justification de l'appellation "sous-espace affine".* Soit E un espace affine de direction $\vec{E}$ et V un sous-espace affine de E de direction $\vec{V}$. Montrez que l'application Φ_V (restriction de Φ à $V \times V$) de $V \times V$ dans $\vec{E}$ qui à (a, b) associe $\overrightarrow{ab}$ a pour image $\vec{V}$ et munit V d'une structure d'espace affine d'espace vectoriel sous-jacent $\vec{V}$.

3.4.3. ♡ Si a est un point d'un sous-espace affine V de direction $\vec{V}$, l'application $p \mapsto \overrightarrow{ap}$ est une bijection de V sur $\vec{V}$.

3.4.4. ♡ Si $p \in E$, l'application $\vec{V} \mapsto p + \vec{V}$ fournit une bijection de l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\vec{E}$ sur l'ensemble des sous-espaces affines de E passant par p.

3.5. Dimension.

Par définition, la **dimension** de V est celle de $\vec{V}$. On dit que V est une **droite affine** si $\dim V = 1$, un **plan affine** si $\dim V = 2$, un **hyperplan affine** si $\dim V = \dim E - 1$.

Un **vecteur directeur d'une droite affine** D est un vecteur non nul de $\vec{D}$.

3.5.1. ♠ Quels sont les sous-espaces affines de dimension 0 ?

3.5.2. ♠ ✠ L'ensemble des vecteurs directeurs d'une droite D est

$$\{\overrightarrow{ab} \mid (a, b) \in D^2, a \neq b\}.$$

3.5.3. ♠ Soit, dans $\mathbb{R}^3$, le sous-ensemble $F_{\alpha,\beta}$ d'équation $\alpha x^2 + y + 3z = \beta - 1$. Pour quelles valeurs de α et β, le sous-ensemble $F_{\alpha,\beta}$ est-il

- un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
- un plan affine de $\mathbb{R}^3$?
- une droite affine de $\mathbb{R}^3$?

3.5.4. *Définition.*

On dit que des points sont **alignés** [2], resp. **coplanaires** s'ils appartiennent à une même droite affine, resp. un même plan affine.

Des droites sont dites **coplanaires** si elles sont contenues dans un même plan affine.

3.5.5. ♠ Soient V, W deux sous-espaces affines d'un espace affine E. Si V est contenu dans W, leurs dimensions soient égales si et seulement si V et W coïncident. Quels sont les sous-espaces affines d'une droite affine ? d'un plan affine ?

3.5.6. ♠ Dans les exemples 1.2 et 1.3 donnez la dimension de E et E_n.

3.6. Remarques.

3.6.1. Comment démontrer qu'un sous-ensemble V de E est un sous-espace affine ? On peut par exemple montrer que pour un point a bien choisi dans V, l'ensemble $\{\overrightarrow{ax} \mid x \in V\}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$, ou bien on peut écrire V sous la forme $a + \vec{F}$ où $\vec{F}$ est un sous-espace vectoriel déjà connu. Nous verrons plus loin une autre méthode utilisant le

[2] L'alignement de trois points a, b, c peut être défini dans un autre cadre que celui de la géométrie affine. Il s'agit de la définition par les distances : a, b, c sont alignés si et seulement si la plus grande des trois distances ab, ac, bc est la somme des deux autres.

Selon le contexte, il ne faut pas hésiter à choisir l'une ou l'autre de ces définitions.

barycentre.

3.6.2. ♠ Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel muni de sa structure canonique d'espace affine. Montrez que les sous-espaces vectoriels de $\vec{E}$ sont des sous-espaces affines (passant par $\vec{0}$).

3.6.3. ♡ Plus généralement, soit V une partie de $\vec{E}$ (espace vectoriel muni de sa structure canonique d'espace affine) contenant un vecteur $\vec{a}$. Montrer que V est un sous-espace affine de $\vec{E}$ si et seulement s'il existe un sous-espace vectoriel $\vec{V}$ de $\vec{E}$ tel que $V = t_{\vec{a}}(\vec{V})$ (ce résultat est illustré dans certains des exemples suivants).

3.7. Exemples.

3.7.1. ♣ Dans $\mathbb{R}^2$, soit D l'ensemble des couples (x, y) qui vérifient $2x + 3y = 0$ (on dit que $2x + 3y = 0$ est une équation de D).

Montrez que D est une droite vectorielle de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et une droite affine de l'espace affine $\mathbb{R}^2$ vérifiant $D = \vec{D}$.

Donnez un point a du sous-ensemble F d'équation $2x + 3y = 2$. Montrez que, si les points b et c sont dans F alors le vecteur $\overrightarrow{bc}$ appartient à $\vec{D}$. Montrez que F est le sous-espace affine $a + \vec{D}$ de $\mathbb{R}^2$, image de D par une translation. Déterminez les vecteurs de deux translations qui conviennent.

3.7.2. ♣ Soit f une forme linéaire non nulle sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ (on rappelle que cela signifie que f s'écrit $f(x_1, \cdots, x_n) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ où les λ_i sont des réels non tous nuls ; quelle est la matrice de f ? Que représentent les λ_i ?). Soit H l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ d'équation $f(x) = 0$ (c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $x = (x_1, \ldots, x_n)$ vérifiant $f(x) = 0$). Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ qui n'appartient pas à H. On considère maintenant $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure affine canonique et on pose $H_1 = t_{\vec{u}}(H)$.

Montrez que H_1 est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ passant par $\vec{u}$, mais n'est pas un sous-espace vectoriel. Quelle est sa direction ? Donner une équation cartésienne de H_1 (c'est-à-dire une relation sur les coordonnées caractérisant les points de H_1).

3.7.3. ♣ Soit g une application linéaire d'un espace vectoriel $\vec{E}$ dans un espace vectoriel $\vec{F}$ et $\vec{v}$ un vecteur de $\operatorname{Im} g$. Montrez que l'image réciproque par g de $\vec{v}$ est un sous-espace affine de $\vec{E}$. Précisez sa direction.

3.7.4. ♣ Soit E l'espace affine des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, polynomiales de degré inférieur ou égal à 4, telles que $\int_0^1 f(t)dt = 1$. Montrez que la partie V de E formée des polynômes divisibles par $(x - \frac{1}{2})^2$ est un plan de E.

3.8. Système d'équations cartésiennes d'un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$.

D'après 3.7.3 , si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est une application linéaire et si $\vec{v} = (y_1, \cdots, y_p)$, l'image réciproque $V = f^{-1}(\vec{v})$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$. Soient $f_1, \cdots, f_p$ les p fonctions coordonnées de f : alors, par définition de l'image réciproque, V est l'ensemble des $(x_1, \cdots, x_n)$ tels que $f_1(x_1, \cdots, x_n) = y_1, \cdots, f_p(x_1, \cdots, x_n) = y_p$. Autrement dit, V est l'ensemble des solutions du système linéaire suivant à p équations aux inconnues $x_1, \cdots, x_n$:

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, \cdots, x_n) = y_1 \\ f_2(x_1, \cdots, x_n) = y_2 \\ \cdots \\ f_p(x_1, \cdots, x_n) = y_p \end{array} \right.$$

On dit que (S) est un **système d'équations cartésiennes** de V. Un point de V est une solution particulière de (S), la direction de V est le sous-espace vectoriel $\ker f$ de $\mathbb{R}^n$, c'est l'ensemble des solutions de (S_0), le système homogène associé à (S). Le sous-espace affine V est donc la somme d'une solution particulière de (S) et du sous-espace vectoriel des solutions de (S_0). On rappelle que la dimension de V est égale à $n - r$ où r est le rang du système (S).

3.8.1. Tout sous-espace affine V de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des solutions d'un système linéaire à n inconnues. En effet, si $\overrightarrow{W}$ est un supplémentaire de $\vec{V}$, considérons la projection p de $\mathbb{R}^n$ sur $\overrightarrow{W}$ parallèlement à $\vec{V}$ ($\vec{V}$ est donc le noyau de p). Par le choix d'une base, $\overrightarrow{W}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^k$ et p s'écrit $p = (p_1, \cdots, p_k)$ où les p_i sont des formes linéaires. Soit $a = (a_1, a_2, \dots a_n)$ un point de V ; V est alors l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} p_1(x_1, \cdots, x_n) = p_1(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ p_2(x_1, \cdots, x_n) = p_2(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ \dots \\ p_k(x_1, \cdots, x_n) = p_k(a_1, a_2, \dots, a_n) \end{cases}$$

3.8.2. *Equations d'une droite affine.* Dans $\mathbb{R}^n$, si (S) est un système d'équations linéaires définissant une droite affine, son rang r vérifie $n - r = 1$, donc le système doit comporter au moins $r = n - 1$ équations. Une droite affine dans $\mathbb{R}^2$ est définie par au moins une équation, dans $\mathbb{R}^3$, il en faut au moins deux.

3.8.3. *Remarque.* Un sous-espace affine a toujours une infinité de systèmes d'équations cartésiennes. Par exemple, on ne peut parler de **l**'équation d'une droite de $\mathbb{R}^2$: si $D = \{(x, y), 2x+3y = 2\}$, on a aussi bien $D = \{(x, y), 4x+6y = 4\}$, $D = \{(x, y), 6x+9y = 6\}$ ...

3.9. Equation différentielle linéaire.

Soient $a_0, \cdots, a_n, b$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, a_n ne s'annulant jamais. Alors l'ensemble des fonctions y de classe $\mathcal{C}^n$ solutions de l'équation différentielle linéaire $\sum_{k=0}^{k=n} a_k(t).y^{(k)}(t) = b(t)$ est un sous-espace affine (non vide) de l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont le sous-espace vectoriel sous-jacent est l'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène associée. Une solution particulière de l'équation est un point de ce sous-espace affine.

3.10. Suites arithmético-géométriques

3.10.1. ♣ ✠ Montrer que les lois $\oplus$ et $\bullet$ définies ci-dessous permettent de munir $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, l'ensemble des suites de réels d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Pour tout entier n, on note u_n le terme de rang n de la suite u.

$$(u \oplus v)_n = u_n + v_n \qquad (u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$$
$$(\lambda \bullet u)_n = \lambda . u_n \qquad (\lambda \in \mathbb{R},\ v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$$

3.10.2. ♣ Soient a un réel et $\mathcal{G}(a)$ l'ensemble des suites géométriques de raison a. Montrer que $\mathcal{G}(a)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?

3.10.3. ♣ Soient b un réel et $\mathcal{H}(b)$ l'ensemble des suites arithmétiques de raison b. Si u appartient à $\mathcal{H}(b)$, exprimer u_n en fonction de u_0 et de b. En déduire que $\mathcal{H}(b)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Quelle est sa direction ?

3.10.4. ♣ Pour deux réels a et b, on pose :

$$\mathcal{C}(a, b) = \{u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), u_{n+1} = au_n + b, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

En utilisant la définition, montrer que $\mathcal{C}(a, b)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Quelle est sa direction ?

3.10.5. *Recherche d'un point particulier de $\mathcal{C}(a, b)$ quand a est différent de 1. Première méthode :* ♣ Chercher une suite constante c dans $\mathcal{C}(a, b)$. Si u appartient à $\mathcal{C}(a, b)$, déterminer le terme général de $u - c$ puis celui de u.

3.10.6. *Recherche d'un point particulier de $\mathcal{C}(a, b)$ quand a est différent de 1. Deuxième méthode :* ♣ Soit u un élément de $\mathcal{C}(a, b)$, on définit la suite $\bar{u}$ par : $(\bar{u})_n = u_{n+1}$ pour tout entier n. Montrer que $\bar{u}$ appartient à $\mathcal{C}(a,b)$, $v = \bar{u} \ominus u$ appartient à $\mathcal{G}(a)$ et calculer u_n en fonction de u_0 et a. Ecrire u comme somme d'une suite fixée de $\mathcal{C}(a,b)$ et d'un élément de $\mathcal{G}(a)$ dépendant de u_0.

3.10.7. *Recherche d'un point particulier de $\mathcal{C}(a,b)$ quand a est différent de 1. Troisième méthode :* ♣ Soit u un élément de $\mathcal{C}(a,b)$, on définit la suite $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_n = \lambda_n \alpha_n$. Déterminer le terme général de λ puis celui de u.

4. Intersection de sous-espaces affines, sous-espace affine engendré

4.1. Intersection de sous-espaces affines.

4.1.1. *Proposition.*

Une intersection quelconque de sous-espaces affines V_i, $(i \in I)$, est ou bien vide ou un sous-espace affine dont la direction est l'intersection des directions :

$$\overrightarrow{\bigcap_{i\in I} V_i} = \bigcap_{i\in I} \vec{V_i}.$$

Démonstration : Si l'intersection n'est pas vide, on choisit un point a dans l'intersection et on peut écrire :

$$\Phi_a(\bigcap_{i\in I} V_i) = \{\overrightarrow{ax}, x \in \bigcap_{i\in I} V_i\} = \bigcap_{i\in I} \vec{V_i}$$

Donc l'intersection des V_i, $(i \in I)$ est un sous-espace affine de direction $\bigcap_{i\in I} \vec{V_i}$.

□

4.1.2. ♠ ✠ Une condition nécessaire pour que l'intersection des sous-espaces affines A et B soit réduite à un point est que les sous-espaces vectoriels $\vec{A}$ et $\vec{B}$ soient en somme directe.

♠ Cette condition est-elle suffisante ?

4.1.3. ♠ Deux plans distincts et non disjoints de l'espace de dimension 3 ont pour intersection une droite.

4.1.4. ♣ Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, on donne trois plans affines P_1, P_2 et P_3 par leurs équations cartésiennes et on note F leur intersection. Préciser pour quelles valeurs des paramètres, F est vide. Dans les autres cas, déterminer sa dimension, donnez-en un système d'équations cartésiennes les moins nombreuses possibles puis un système d'équations paramétriques.

1. ✠♣ Soient α, β, a, b et c des réels.
   P_1 a pour équation $x + 2y + \beta z = a$,
   P_2 a pour équation $2x + 4y = b$,
   P_3 a pour équation $\alpha x + (\alpha + 1)y = c$.
   (*Utiliser la méthode de Gauss.*)
2. ✠ ♣ Soient b et α des réels.
   P_1 a pour équation $2x + 7y + z = 3$,
   P_2 a pour équation $x + 2y + 3z = b$,
   P_3 a pour équation $-3x + 9y - (\alpha + 3)z = 2$.
   (*Utiliser les déterminants.*)

4.1.5. *Proposition.*
Si V et W sont deux sous-espaces affines d'un espace affine E tels que $\vec{V} \oplus \overrightarrow{W} = \vec{E}$, alors $V \cap W$ est réduit à un point.

*Démonstration :*Comme les directions $\vec{V}$ et $\overrightarrow{W}$ sont en somme directe, l'intersection de V et W est vide ou réduite à un point.

Montrons qu'elle est non vide. Soient a un point de V et b un point de W, le vecteur $\overrightarrow{ab}$ se décompose comme somme d'un vecteur $\vec{v}$ de $\vec{V}$ et d'un vecteur $\vec{w}$ de $\overrightarrow{W}$. Le point $c = a + \vec{v}$ est un point de V or de $\overrightarrow{ac} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{ab} = \vec{v} + \vec{w}$, on tire $\vec{w} = \overrightarrow{cb}$, donc $c = b + (-\vec{w})$ est aussi un point de $\overrightarrow{W}$.

□

4.1.6. Si V est une droite et W un hyperplan et que la direction de V n'est pas contenue dans celle de W, leurs directions sont supplémentaires, donc leur intersection est réduite à un point.

4.1.7. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire, et $\vec{v} = (y_1, \cdots, y_p)$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$. On note $f_1, \cdots, f_p$ les formes linéaires coordonnées de f et on suppose que $V = f^{-1}(\vec{v})$ est non vide. Alors $H_i = f_i^{-1}(y_i)$ est l'hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$ d'équation $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_i$ et V est l'intersection des H_i.

4.2. Sous-espace affine engendré - définition.

Corollaire et définition : Si A est une partie non vide de E il existe un plus petit sous-espace affine contenant A. Ce sous-espace est appelé **sous-espace affine engendré** par A et il est noté $\mathrm{Aff}\, A$.

Démonstration : On obtient $\mathrm{Aff}\, A$ comme l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant A (il y a au moins E tout entier). □

4.2.1. *Remarque.* Pour déterminer $\mathrm{Aff}\, A$, on choisit un candidat F, sous-espace affine contenant A et pas trop gros et on conclut avec un argument de dimension. Voici deux exemples :

4.2.2. ♠ Soient a, b et c trois points distincts de l'espace affine $\mathbb{R}^3$. Déterminer Aff A quand

i) $A = \{a, b\}$
ii) $A = \{a, b, c\}$ et a, b et c sont alignés
iii) $A = \{a, b, c\}$ et a, b et c ne sont pas alignés.

Conclusion : Par deux points a et b distincts passe une et une seule droite que l'on notera (ab). Par trois points non alignés passe un et un seul plan.

4.2.3. ♠ ✠ Dans l'exemple test, montrez que E est le sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ engendré par $i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0), k = (0, 0, 1)$.

4.3. Sous-espace affine engendré - description.

4.3.1. *Proposition.*

Avec les notations précédentes on a, si $a \in A$,

$$\mathrm{Aff}\, A = a + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{am} \mid m \in A\}.$$

Autrement dit, la direction de Aff A est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{am}$ où a et m sont des points de A.

Démonstration :

Posons $W = a + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{am} \mid m \in A\}$. C'est un sous-espace affine qui contient A (en vertu de la relation $m = a + \overrightarrow{am}$). W contient donc aussi Aff A car Aff A est le plus petit sous-espace affine contenant A. On a montré l'inclusion Aff $A \subset W$.

Réciproquement, comme Aff A est un sous-espace affine, on peut l'écrire sous la forme Aff $A = a + \vec{V}$ et $\vec{V}$ est, par définition, un sous-espace vectoriel qui contient au moins tous les vecteurs $\overrightarrow{am}$ où a et m sont des points de A, il contient donc le sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel $\overrightarrow{W}$ et W est contenu dans Aff A. □

4.3.2. ♠ Vous avez dû montrer en 4.2.2 que le sous-espace affine engendré par deux points a et b est la droite affine passant par a et b, retrouvez ce résultat en utilisant la description de Aff A de ce paragraphe.

4.3.3. ♠ *Suite de* 4.2.3. A l'aide de ce qui précède, retrouvez le fait que $\vec{E} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{ij}, \overrightarrow{ik})$.

5. Parallélisme

5.1. Définitions.

Soient V et W deux sous-espaces affines de E. On dit que V et W sont **parallèles** s'ils ont même direction, i.e., si on a $\vec{V} = \overrightarrow{W}$. On note $V \parallel W$ (on dit parfois que V et W sont strictement parallèles).

On dit que V est **faiblement parallèle** à W si $\vec{V}$ est contenu dans $\overrightarrow{W}$.

5.1.1. △ La relation de parallélisme est une relation d'équivalence, mais pas celle de parallélisme faible (elle n'est pas symétrique).

♠. Dans votre espace vital familier, avec deux stylos et deux feuilles de papier, simulez deux droites parallèles, deux plans parallèles, une droite faiblement parallèle à un plan et envisagez les résultats de la proposition suivante.

5.2. Proposition.

i) Si V et W sont parallèles, V et W sont confondus ou bien leur intersection est vide.

ii) Si V est faiblement parallèle à W, V est contenu dans W ou V ne rencontre pas W.

*Démonstration :*i) Si $V \cap W$ n'est pas vide, il contient un point a. On peut écrire $V = a + \overrightarrow{V}$

et $W = a + \overrightarrow{W}$, donc, puisque $\vec{V} = \overrightarrow{W}$, V et W sont égaux.

ii) Si $V \cap W$ n'est pas vide, il contient un point a. On peut écrire $V = a + \overrightarrow{V}$ et $W = a + \overrightarrow{W}$, donc, puisque $\vec{V} \subset \overrightarrow{W}$, V est contenu dans W. □

5.3. Remarques.

5.3.1. ♠ Vous pouvez maintenant démontrer ces affirmations qui ont bercé votre enfance :

(i) Par tout point d'un plan, il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée (postulat d'Euclide).

(ii) Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.

(iii) Deux droites parallèles d'un plan ne se coupent pas ou sont confondues.

(iv) Deux droites disjointes d'un plan sont parallèles.

5.3.2. △ Deux droites disjointes dans l'espace ne sont pas nécessairement parallèles.

5.3.3. ♠ ✠ Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont mêmes vecteurs directeurs ou encore si et seulement si elles ont un vecteur directeur commun.

5.3.4. ♣ Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, trouvez une équation du plan affine passant par le point $(1, 2, 3)$ et parallèle au plan d'équation $x + y + z = -1$. Donnez un système d'équations d'une droite affine passant par le point $(1, 2, 3)$ et faiblement parallèle au plan d'équation $x + y + z = -1$.

5.3.5. ♡ Soient E un espace affine de direction $\vec{E}$ et $\vec{V}$ un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$. On définit sur E la relation ν :

$$\forall (a, b) \in E^2 \quad a \,\nu\, b \Longleftrightarrow \overrightarrow{ab} \in \vec{V}$$

Montrer que ν est une relation d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence ?

6. Exercices

6.1. Principe. Pour étudier le parallélisme ou l'intersection de deux sous-espaces affines, on commence par traiter le problème vectoriel analogue (c'est un principe général de géométrie affine de commencer par l'aspect vectoriel), puis on regarde si l'espace considéré est vide ou pas.

6.2. ♣ a) Dans l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ sur $\mathbb{R}$, on considère le sous-ensemble :

$$V = \{A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall i = 1, \ldots, n \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 0, \quad \forall j = 1, \ldots, n \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 0\}.$$

Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ (pour éviter de répéter les mêmes calculs, on pourra utiliser la forme linéaire $c_{k,l}$ qui à la matrice $(a_{i,j})$ associe son coefficient $a_{k,l}$). Quelle est la dimension de V ?

b) On munit $M_n(\mathbb{R})$ de sa structure canonique d'espace affine. Posons

$$F = \{A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall i = 1, \ldots, n \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1, \quad \forall j = 1, \ldots, n \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1\}.$$

Montrer que F est un sous-espace affine de $M_n(\mathbb{R})$ dont on précisera la direction.

6.3. ♣ Soient V, W deux sous-espaces affines de E. Montrer qu'on a $\vec{V} \oplus \overrightarrow{W} = \vec{E}$ si et seulement si $V \cap W$ est un singleton et $\mathrm{Aff}(V \cup W) = E$.

6.4. ♣ **Parallélogramme.** Soient a, b, a', b' des points d'un espace affine E. On suppose que a, a', b sont affinement indépendants (c'est-à-dire, cf. II. 3.2, que les vecteurs $\overrightarrow{aa'}$ et $\overrightarrow{ab}$ sont linéairement indépendants). Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $abb'a'$ est un parallélogramme (*i.e.* on a $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{a'b'}$ ou $\overrightarrow{aa'} = \overrightarrow{bb'}$),

ii) $\overrightarrow{ab'} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{aa'}$,

iii) Les droites (ab) et $(a'b')$ ainsi que (aa') et (bb') sont parallèles.

Exprimer les propriétés caractéristiques du parallélogramme dans le langage de la géométrie (faire un dessin).

6.5. ♣ Déterminer, dans $\mathbb{R}^3$, l'intersection d'un plan P et d'une droite D.

6.6. ♣ Déterminer, dans $\mathbb{R}^3$, l'intersection de deux plans.

6.7. ♣ Déterminer le sous-espace affine engendré par deux droites affines dans un espace affine de dimension finie.

6.8. Généralisation ♡ Soient V et W deux sous-espaces affines d'un espace affine E et T le sous-espace affine engendré par leur réunion.

a) Soient $a \in V$ et $b \in W$. Montrer l'égalité : $\vec{T} = \vec{V} + \vec{W} + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{ab}\}$.

b) Soient $a \in V$ et $b \in W$. Montrer que $V \cap W$ est non vide si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{ab}$ appartient à $\vec{V} + \vec{W}$.

c) En déduire que l'on a l'égalité

- $\dim T = \dim(\vec{V} + \vec{W}) + 1$ dans le cas $V \cap W = \emptyset$
- $\dim T = \dim(\vec{V} + \vec{W})$ dans le cas $V \cap W \neq \emptyset$