Accueil

Page de Titre

Sommaire

Page 1 de 25

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

GEOMETRIE AFFINE
Document de travail pour la préparation au CAPES
Deuxième partie : BARYCENTRES

Marie-Claude DAVID, Frédéric HAGLUND, Daniel PERRIN

Marie-Claude.David@math.u-psud.fr

8 décembre 2003

Dans cette deuxième partie nous étudions la notion de barycentre qui est la traduction en affine du concept de combinaison linéaire dans un espace vectoriel. Le lecteur verra que c'est un outil très efficace pour faire de la géométrie et notamment pour montrer que des points sont alignés ou que des droites sont concourantes.

Faites des dessins, encore des dessins, toujours des dessins !

Dans l'introduction, vous trouverez le mode d'emploi de ce document et les conseils de navigation.

Dans cette partie, E est un espace affine.

Table des matières

Accueil
Page de Titre
Sommaire
Page 4 de 25
Retour
Plein écran
Fermer
Quitter

1. Définitions et propriétés

1.1. Définition. On appelle **point pondéré** un couple (a, λ) où a est un point de E et λ un réel. Le nombre λ est appelé le **poids** ou la **masse** de a.

> $\triangle$ L'intuition de points affectés de masses est excellente, mais attention, contrairement à ce qui se passe en physique, ici les masses peuvent être négatives.

1.2. Définition. Le réel $\Lambda = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i$ est dit **masse totale** de la famille de points pondérés $\{(a_1, \lambda_1), (a_2, \lambda_2), \ldots (a_r, \lambda_r)\}$.

1.3. Théorème et définition. Soit $\{(a_1, \lambda_1), (a_2, \lambda_2), \ldots (a_r, \lambda_r)\}$ une famille de points pondérés de **masse totale non nulle**. Il existe un unique point g de E qui vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes : [1]

i) $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \overrightarrow{ga_i} = \overrightarrow{0}$,
ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}^* \quad \sum_{i=0}^{r} \alpha \lambda_i \overrightarrow{ga_i} = \overrightarrow{0}$,
iii) $\exists a \in E \quad (\sum_{i=0}^{r} \lambda_i) \overrightarrow{ag} = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \overrightarrow{aa_i}$,
iv) $\forall b \in E \quad (\sum_{i=0}^{r} \lambda_i) \overrightarrow{bg} = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \overrightarrow{ba_i}$.

---

[1] Chacune de ces conditions doit être sue et utilisée selon le contexte, il est maladroit de se contenter d'en apprendre une et de redémontrer les autres quand celles-ci donnent le résultat directement. Chacune correspond à un choix particulier d'origine dans (iv).

Le point g est appelé **barycentre des points** a_i **affectés des masses** λ_i ou **barycentre de la famille** $\{(a_1, \lambda_1), (a_2, \lambda_2), \ldots, (a_r, \lambda_r)\}$.

Démonstration : Montrons d'abord que les conditions sont équivalentes. Il est clair que i) et ii) sont équivalentes et que iv) implique iii). Pour voir que i) implique iv) on écrit la relation de Chasles avec un point b quelconque :

$$\vec{0} = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \overrightarrow{ga_i} = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i (\overrightarrow{gb} + \overrightarrow{ba_i}) = (\sum_{i=0}^{r} \lambda_i)\overrightarrow{gb} + \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \overrightarrow{ba_i},$$

d'où le résultat. La démonstration du fait que iii) implique i) s'obtient en lisant le calcul précédent à l'envers.

L'existence et l'unicité du point g sont claires avec iii) : si on choisit $a \in E$ quelconque et si on pose $\lambda = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i$, on a $g = a + \sum_{i=0}^{r} \frac{\lambda_i}{\lambda} \overrightarrow{aa_i}$. $\square$

1.3.1. ♠ Soient a, b et c trois points non alignés d'un plan affine. Soient g le barycentre de $\{(a, 6), (b, -2)\}$ et ω le barycentre de $\{(a, 2), (b, -1/2), (c, -1/2)\}$. Sur une figure, placer les points a, b, c, g et ω.

1.3.2. ♠ Montrer que les triangles abc et $a'b'c'$ ont même isobarycentre si et seulement si $\overrightarrow{aa'} + \overrightarrow{bb'} + \overrightarrow{cc'} = \vec{0}$.

1.4. Remarques

1.4.1. Le barycentre est une “moyenne” des points pondérés : la “barycentration” est analogue à une intégration et s'utilise souvent de manière analogue.

1.4.2. Le barycentre ne dépend pas de l'ordre des points pondérés.

1.4.3. On ne demande pas que les points a_i soient deux à deux distincts.

1.4.4. ♠ Existe-t-il dans le plan affine quatre points a, b, c et m tels que m soit barycentre du système $\{(a,1),(b,1),(c,1)\}$ et barycentre du système $\{(a,2),(b,0),(c,2)\}$?

1.4.5. Si λ_n est nulle, alors le barycentre de la famille $\{(a_1,\lambda_1),(a_2,\lambda_2),\dots,(a_n,\lambda_n)\}$ est le barycentre de la famille $\{(a_1,\lambda_1),(a_2,\lambda_2),\dots,(a_{n-1},\lambda_{n-1})\}$

1.4.6. *Très important* Grâce à (ii), on voit qu'on ne change pas le barycentre quand on multiplie chaque masse λ_i par un même nombre α non nul. On peut donc supposer que la masse totale $\Lambda = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i$ de la famille est 1 en prenant $\alpha = \frac{1}{\Lambda}$.

1.4.7. *Notation* Lorsque $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$, on notera parfois le barycentre $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i.a_i$. Cela revient à considérer les points comme des vecteurs en vectorialisant E à partir d'un quelconque de ses points. (C'est la formule (iv)).

1.4.8. ♠ Soit $\{(a_1,\lambda_1),(a_2,\lambda_2),\dots(a_r,\lambda_r)\}$ une famille de points pondérés de $\mathbb{R}^2$ où a_i est le couple (x_i,y_i) et où la masse totale $\Lambda = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i$ n'est pas nulle. Alors le barycentre de la famille $\{(a_1,\lambda_1),(a_2,\lambda_2),\dots,(a_r,\lambda_r)\}$ est le point (x,y) tel qu'on ait

$$x = \frac{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i.x_i}{\Lambda} \quad \text{et} \quad y = \frac{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i.y_i}{\Lambda}.$$

1.4.9. ♣ Généralisez ce dernier résultat à $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$.

1.4.10. ♠ Dans l'espace affine de l'exemple I.1.2, déterminer le point m barycentre des points $i=(1,0,0)$, $j=(0,1,0)$ et $k=(0,0,1)$ affectés des coefficients a, b, c avec $a+b+c=1$.

1.4.11. ♡ Les fonctions scalaires (c'est-à-dire $m \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {ma_i}^2$) et vectorielle (c'est-à-dire $m \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{ma_i}$) de Leibniz, que vous avez rencontrées dans le secondaire et qui se calculent à l'aide de barycentres, sont au programme du CAPES (et notamment de l'oral). Vous devrez donc les avoir revues pour le concours.

1.5. Segment

Grâce aux barycentres, on peut définir la notion de segment donc donner un sens précis à l'expression : m est entre a et b.

Définition : Soient a et b deux points de E. Le **segment** $[ab]$ est l'ensemble des barycentres des points a et b affectés de masses positives. Les points a et b sont appelés les extrémités du segment $[ab]$.

1.5.1. ♠ Montrez que le point m appartient à $[ab]$ si et seulement si il existe un réel α de $[0, 1]$ tel que m soit le barycentre de $\{(a, \alpha), (b, 1 - \alpha)\}$. ✠

1.5.2. ♠ On dit parfois que $[ab]$ est le segment **fermé** d'extrémités a et b. Définir les notions de segments (ou intervalles) ouverts et semi-ouverts. ✠

1.6. Isobarycentre

Définition : Si toutes les masses des points pondérés considérés sont égales et non nulles, le barycentre est appelé **isobarycentre**. L'isobarycentre de deux points a et b distincts est appelé **milieu** [2] du segment $[ab]$.

1.6.1. ♠ Le milieu m d'un segment $[ab]$ appartient au segment $[ab]$ et il est caractérisé par la relation $\overrightarrow{am} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ab}$ ou par la relation équivalente $\overrightarrow{am} = \overrightarrow{mb}$.

[2] On notera que cette notion de milieu est purement affine : elle peut se définir indépendamment de l'existence d'une distance sur l'espace affine considéré. Dans un problème de géométrie purement affine (sans introduction d'une distance), on ne peut pas caractériser le milieu par les relations $ma = mb = \frac{1}{2}\,ab$: cela n'a aucun sens. Bien entendu, en géométrie euclidienne, cette caractérisation est très importante.

1.6.2. ♠ Donnez les coordonnées du milieu de deux points de $\mathbb{R}^2$, puis de l'isobarycentre de n points de $\mathbb{R}^2$. Déterminer l'isobarycentre des points i, j, k de 1.4.10.

1.7. Parallélogramme

1.7.1. ♣ Montrez que $aba'b'$ est un parallélogramme (cf. I.6.4) si et seulement si les segments $[aa']$ et $[bb']$ ont même milieu.

1.7.2. ♣ Soient trois points non alignés a, b et c et un point d dans $[bc]$. Construire un point m sur la droite (ab) tel que le milieu n de $[cm]$ soit sur la droite (ad).

1.8. Associativité du barycentre

Le résultat suivant permet de remplacer dans la recherche d'un barycentre un groupe de points pondérés par leur barycentre, affecté de la somme de leurs masses (si elle n'est pas nulle).

Proposition : Soit $I = \{0, 1, \cdots, n\}$. Supposons qu'on ait une partition de I, soit $I = J_0 \cup \cdots \cup J_r$ (les J_k étant disjoints). Soient $a_0, \cdots, a_n$ des points de E et $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ des scalaires de somme non nulle. Pour chaque $k = 0, 1, \cdots, r$ on suppose que $\mu_k = \sum_{i \in J_k} \lambda_i$ est non nul et on note b_k le barycentre de la famille $\{(a_i, \lambda_i), i \in J_k\}$. Alors $\sum_{k=0}^{r} \mu_k$ est non nul et le barycentre b des points b_k affectés des masses μ_k ($k = 0, \ldots, r$) est aussi le barycentre de la famille $\{(a_i, \lambda_i),\ i \in I\}$.

Démonstration : On a $\sum_{k=0}^{r} \mu_k = \sum_{k=0}^{r} \sum_{i \in J_k} \lambda_i = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i$ et cette quantité est non nulle par hypothèse.

Par définition du barycentre on a $\sum_{k=0}^{r}\mu_k\overrightarrow{bb_k}=\overrightarrow{0}$, soit encore $\sum_{k=0}^{r}\left[\sum_{i\in J_k}\lambda_i\overrightarrow{bb_k}\right]=\overrightarrow{0}$. En appliquant la relation de Chasles : $\overrightarrow{bb_k}=\overrightarrow{ba_i}+\overrightarrow{a_ib_k}$ pour $i\in J_k$ on obtient

$$\overrightarrow{0}=\sum_{k=0}^{r}\sum_{i\in J_k}\lambda_i\overrightarrow{ba_i}+\sum_{k=0}^{r}\sum_{i\in J_k}\lambda_i\overrightarrow{a_ib_k}=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\overrightarrow{ba_i}+\sum_{k=0}^{r}\sum_{i\in J_k}\lambda_i\overrightarrow{a_ib_k}.$$

Comme b_k est le barycentre de la famille $\{(a_i,\lambda_i), i\in J_k\}$, on a $\sum_{i\in J_k}\lambda_i\overrightarrow{a_ib_k}=\overrightarrow{0}$ pour tout k. On en déduit $\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\overrightarrow{ba_i}=\overrightarrow{0}$, d'où le résultat.

□

Cette proposition a de très nombreuses applications : outre les récurrences qu'elle permet, elle entraîne l'identité d'un grand nombre de barycentres (autant qu'il y a de partitions $I=J_0\cup\cdots\cup J_r$ comme dans la proposition). Les applications directes suivantes doivent être connues.

1.8.1. ♣. *Isobarycentre de trois points* Soient a,b,c trois points non alignés d'un plan affine, g l'isobarycentre de a,b,c et a',b',c' les milieux de $[bc],[ca],[ab]$. Montrer que g est le point d'intersection des **médianes** $[aa'],[bb'],[cc']$ et qu'il est situé au tiers de chacune d'elles : par exemple on a $\overrightarrow{a'g}=\frac{1}{3}\overrightarrow{a'a}$.

1.8.2. ♣. *Construire un triangle à partir de ses médianes* Etant donné trois droites concourantes construire un triangle admettant ces droites comme médianes (utiliser 1.7.1).

1.8.3. ♣. *Centre de gravité d'un tétraèdre.* Soient a, b, c et d quatre points non coplanaires de E (ces points déterminent un *tétraèdre*, leur enveloppe convexe (cf. III.2.1) dont ils sont les sommets) et g leur isobarycentre. On note i, j, k, i', j', k' les milieux des segments $[ab]$, $[ac]$, $[ad]$, $[cd]$, $[bd]$ et $[bc]$.

Montrer que les droites (ii'), (jj') et (kk') sont concourantes en g.

Que dire des droites joignant un sommet du tétraèdre au centre de gravité de la face opposée à ce sommet ?

Que dire des 6 plans $\mathrm{Aff}\{abi'\}$, $\mathrm{Aff}\{acj'\}$, $\mathrm{Aff}\{adk'\}$, $\mathrm{Aff}\{cdi\}$, $\mathrm{Aff}\{bdj\}$, $\mathrm{Aff}\{bck\}$?

Donner des constructions géométriques du centre de gravité d'un tétraèdre.

1.9. Le théorème de double associativité

Proposition : Soient $a_0, \cdots, a_n$ et $b_0, \cdots, b_r$ deux familles de points de E. Pour tout $j = 0, \cdots, r$, on suppose que b_j est barycentre des points a_i affectés des masses λ_{ij} avec $\sum_{i=0}^n \lambda_{ij} = 1$ pour tout j. Soit g le barycentre des points b_j affectés des masses μ_j avec $\sum_{j=0}^r \mu_j = 1$. Alors g est barycentre des points a_i affectés des masses $\nu_i = \sum_{j=0}^r \mu_j \lambda_{ij}$ (supposées non nulles).

*Démonstration :*Notons déjà qu'on a :

$$\sum_{i=0}^n \nu_i = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^r \mu_j \lambda_{ij} = \sum_{j=0}^r \mu_j \sum_{i=0}^n \lambda_{ij} = \sum_{j=0}^r \mu_j = 1.$$

On a aussi les relations :

$$\sum_{i=0}^n \nu_i \overrightarrow{ga_i} = \sum_{i=0}^n \Big(\sum_{j=0}^r \mu_j \lambda_{ij}\Big)\overrightarrow{ga_i} = \sum_{j=0}^r \mu_j \Big(\sum_{i=0}^n \lambda_{ij} \overrightarrow{ga_i}\Big).$$

Comme b_j est le barycentre des (a_i, λ_{ij}) on a $\sum_{i=0}^n \lambda_{ij} \overrightarrow{ga_i} = \overrightarrow{gb_j}$ en vertu de 1.3 iii). Mais, comme g est le barycentre des (b_j, μ_j), on en déduit que le vecteur $\sum_{i=0}^n \nu_i \overrightarrow{ga_i}$ est nul, d'où la conclusion par 1.3 i).

□

1.9.1. ♠ Soit g l'isobarycentre d'un triangle abc. Ecrire le milieu de $[ag]$ comme barycentre des points a, b et c.

1.9.2. ♠ En utilisant 1.3.2 ou la double associativité du barycentre, montrer que les triangles abc et $a'b'c'$ ont même isobarycentre si a' (resp. b', c') est le milieu de $[bc]$ (resp. $[ca]$, $[ab]$).

L'exercice suivant sera repris tout au long de ce chapitre :

1.9.3. ♣ Soient abc un triangle, a' un point du segment $[bc]$, b' un point du segment $[ac]$ et c' un point du segment $[ab]$. On veut déterminer l'ensemble F des isobarycentres des points a', b' et c'.

a) Ecrire ces hypothèses comme en 1.5 : a' un point du segment $[bc]$ *i.e* a' est barycentre de $(b, \alpha), (c, 1-\alpha) \ldots$

b) Ecrire l'isobarycentre de a', b' et c' comme un barycentre de a, b et c. (à suivre en 4.5)

2. Barycentres et sous-espaces affines

2.1. Caractérisation des sous-espaces affines

Proposition : Soit V un sous-espace affine de E. Alors V est stable par barycentration (*i*.e. le barycentre de toute famille finie de points de V pondérée de façon quelconque est encore dans V). Réciproquement, si V est une partie (non vide) de E stable par barycentration, alors V est un sous-espace affine de E.

*Démonstration :*1) Supposons V affine de direction $\overrightarrow{V}$. Soient $a_1, \cdots, a_n$ des points de V et soit g le barycentre de la famille (a_i, λ_i), avec $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Soit a un point de V. On a donc $\overrightarrow{ag} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{aa_i}$. Comme a et les a_i sont dans V, les vecteurs $\overrightarrow{aa_i}$ sont dans $\overrightarrow{V}$, donc aussi leur combinaison linéaire $\overrightarrow{ag}$. Comme a est dans V, il en résulte que g est dans V.

2) Réciproquement, supposons V stable par barycentration. Soient a, x, y des points de V et λ un scalaire. Définissons les points z et t de E par les formules : $\overrightarrow{az} = \overrightarrow{ax} + \overrightarrow{ay}$ et $\overrightarrow{at} = \lambda\,\overrightarrow{ax}$. Par définition d'un sous-espace affine, il s'agit de montrer que z et t sont dans V. Mais, en utilisant la relation de Chasles, on obtient les formules $-\overrightarrow{za} + \overrightarrow{zx} + \overrightarrow{zy} = \overrightarrow{0}$ et $(1-\lambda)\overrightarrow{ta} + \lambda\overrightarrow{tx} = \overrightarrow{0}$ qui montrent que z et t sont des barycentres des points a, x, y, donc sont dans V. $\square$

> Ainsi, les sous-espaces affines sont exactement les parties stables par barycentration. Cela fournit une nouvelle méthode pour montrer qu'une partie est un sous-espace affine.

2.1.1. ♣ Soit V une partie non vide de E, telle que pour tous a, b distincts dans V, la droite (ab) est contenue dans V. Montrer que V est un sous-espace affine. ✠

2.2. Sous-espace affine engendré. Les barycentres permettent une nouvelle description du sous-espace engendré par un nombre fini de points :

Proposition : Soient $a_0, \cdots, a_r \in E$. L'ensemble des barycentres des a_i (avec toutes les masses possibles de somme 1) est égal au sous-espace affine $\mathrm{Aff}\{a_0, \cdots, a_r\}$ engendré par les a_i.

Démonstration :

1) Si g est le barycentre des a_i affectés des masses λ_i (de somme 1) on écrit :

$$g = a_0 + \overrightarrow{a_0 g} = a_0 + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{a_0 a_i}$$

de sorte que g est bien dans le sous-espace engendré par les a_i.

2) Réciproquement si g est dans le sous-espace engendré par les a_i on écrit :

$$g = a_0 + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{a_0 a_i} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a_0 g} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{a_0 a_i}$$

et en décomposant chaque vecteur $\overrightarrow{a_0 a_i}$ en $\overrightarrow{a_0 g} + \overrightarrow{g a_i}$ on obtient

$$(1 - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i)\, \overrightarrow{g a_0} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{g a_i} = \vec{0}$$

et donc g est le barycentre des a_i affectés des masses $(1 - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i), \lambda_1, \cdots, \lambda_r$. $\square$

2.2.1. ♠ Interpréter la proposition précédente dans le cas où E est l'espace affine de I.1.2 et où les points a_i sont les points i, j, k de 1.4.10.

2.2.2. ♡ Soit A une partie quelconque de E. Montrer que $\operatorname{Aff} A$ est l'ensemble X des barycentres des familles finies de points de A affectés de masses quelconques. ✠

En particulier, si a et b sont deux points distincts de E, la droite (ab) est l'ensemble de tous les barycentres de a et b. Ainsi, trois droites (ab), $(a'b')$, $(a''b'')$ sont concourantes en un point g si et seulement si g est barycentre de a et b, de a' et b', de a'' et de b'' : il n'est pas étonnant que la propriété d'associativité du barycentre entraîne des résultats de concourance.

3. Repères affines et coordonnées

3.1. La remarque de base

Proposition : Soient $k+1$ points $a_0, a_1, \cdots, a_k$ de E. Le sous-espace affine $\mathrm{Aff}\{a_0, a_1, \cdots, a_k\}$ est de dimension au plus k.

Démonstration :

Par définition, la dimension de $\mathrm{Aff}\{a_0, a_1, \cdots, a_k\}$ est celle de sa direction. D'après I.4.3, la direction de $\mathrm{Aff}\{a_0, a_1, \cdots, a_k\}$ est le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{a_0a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_0a_k})$ qui admet donc un système générateur de k vecteurs : $\{\overrightarrow{a_0a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_0a_k}\}$, sa dimension est alors au plus k. □

3.1.1. *Remarque* On notera la différence avec les espaces vectoriels : il faut $k+1$ points pour engendrer un sous-espace affine de dimension k (c'est normal, il faut une origine en plus).

3.2. Points affinement indépendants

Définition : Soient $a_0, a_1, \cdots, a_k$ des points de E. On dit que $a_0, a_1, \cdots, a_k$ sont **affinement indépendants** si le sous-espace affine engendré par les a_i est de dimension k.

3.2.1. *Remarque* On notera que cette notion est indépendante de l'ordre des a_i.

3.2.2. *Exemples*

i) Deux points distincts sont affinement indépendants.

ii) Trois points non alignés sont affinement indépendants.

♠. Démontrez (i) et (ii).

3.3. Critères d'indépendance affine

Proposition : Les assertions suivantes sont équivalentes

i) Les points $a_0, a_1, \cdots, a_k$ sont affinement indépendants.

ii) $\forall i = 0, \cdots, k, \quad a_i \notin \mathrm{Aff}\{a_0, \cdots, \widehat{a_i}, \cdots, a_k\}$ (où la notation $\widehat{a_i}$ signifie qu'on omet le point a_i).

ii bis) $\forall i = 0, \cdots, k$, a_i n'est pas barycentre des points $\{a_0, \cdots, \widehat{a_i}, \cdots, a_k\}$,

iii) Les points $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$ sont affinement indépendants et a_k n'appartient pas à $\mathrm{Aff}\{a_0, \cdots, a_{k-1}\}$ (*i*.e. n'est pas barycentre des points $\{a_0, \cdots, a_{k-$

iv) Pour tout $i \in \{0, \cdots, k\}$, les vecteurs $\overrightarrow{a_0a_i}, \overrightarrow{a_1a_i}, \cdots, \overrightarrow{a_{i-1}a_i}, \overrightarrow{a_{i+1}a_i}, \cdots$ sont linéairement indépendants.

v) Il existe $i \in \{0, \cdots, k\}$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{a_0a_i}, \overrightarrow{a_1a_i}, \cdots, \overrightarrow{a_{i-1}a_i}, \overrightarrow{a_{i+1}a_i}, \cdot$ soient linéairement indépendants.

*Démonstration :*L'équivalence de *ii)* et *ii bis)* résulte de 2.2.

Montrons $i) \Longrightarrow ii)$. On a vu en 3.1 ci-dessus que le sous-espace

$$X_i = \mathrm{Aff}\{a_0, \cdots, \widehat{a_i}, \cdots, a_k\},$$

engendré par k points, est de dimension $\leq k-1$. Si a_i est aussi dans X_i, le sous espace engendré par $a_0, \cdots, a_k$ est égal à X_i donc de dimension $\leq k-1$ ce qui contredit *i)*.

$iii) \Longrightarrow i)$ Comme les points $a_0, \cdots, a_{k-1}$ sont affinement indépendants, l'espace $X_0 = \mathrm{Aff}\{a_0, \cdots, a_{k-1}\}$ est de dimension $k-1$. Mais alors, comme a_k n'est pas dans X_0, l'espace X engendré par $a_0, \cdots, a_k$ est strictement plus grand que X_0, donc de dimension $\geq k$, donc égale à k en vertu de 3.1 et on a prouvé que les points sont affinement indépendants.

$ii) \Longrightarrow i)$ On raisonne par récurrence sur k. Pour $k = 1$ la propriété est évidente grâce à 3.2.2 i). Passons de $k-1$ à k. Pour $i > 0$, le point a_i n'est pas dans le sous-espace affine engendré par $a_1, \cdots, \widehat{a_i}, \cdots, a_k$. Par l'hypothèse de récurrence les points $a_1, \cdots, a_k$ sont donc affinement indépendants. L'implication $iii) \Longrightarrow i)$ permet alors de conclure.

En vertu de 4.3 on a, pour tout i,

$$(*) \qquad X = \mathrm{Aff}\{a_0, \cdots, a_k\} = a_i + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{a_i a_j}, j \neq i) = a_i + \overrightarrow{V_i}.$$

Cela montre aussitôt $i) \Longrightarrow iv)$. L'implication $iv) \Longrightarrow v)$ est évidente. Enfin, si on a $v)$ avec l'indice i on applique la formule $(*)$. L'espace vectoriel $\overrightarrow{V_i}$ est de dimension k et on en déduit que X est un sous-espace affine de dimension k ce qui montre *i)*.

Les propriétés $iv)$ ou $v)$ montrent que si les points $a_0, \cdots, a_k$ sont affinement indépendants il en est de même de toute sous-famille de points. Combiné avec $i) \Longrightarrow ii)$ cela achève de montrer $i) \Longrightarrow iii)$. $\square$

3.3.1. ♠ Expliciter les conditions dans le cas de quatre points.

3.3.2. *Remarque* L'assertion "$\exists i \in \{0, \cdots, k\} \quad a_i \notin \mathrm{Aff}\{a_0, \cdots, \widehat{a_i}, \cdots, a_k\}$" n'implique pas l'indépendance affine des $k+1$ points.
♠. Donnez un exemple

3.4. Définition Soient E un espace affine de dimension n et V un sous-espace affine de dimension k. Un **repère affine** de V consiste en la donnée d'une **suite** de $k+1$ points $a_0, \cdots, a_k$ affinement indépendants de V.

3.4.1. ♠ Montrez qu'alors le sous-espace affine $\mathrm{Aff}\{a_0, \cdots, a_k\}$ est égal à V.

3.4.2. ♠ Vérifiez que les points i, j, k forment un repère affine de E (cf. I.1.2 et 1.4.10).

> Comme dans les espaces vectoriels un repère est donc "libre et générateur", mais attention, il faut un point de plus.
> Attention, un repère affine est une suite ordonnée de points.

3.4.3. ♠ Montrez qu'un repère affine d'une droite est un couple de points distincts de la droite, un repère affine d'un plan un triplet de points non alignés du plan, un repère affine de l'espace de dimension 3 un quadruplet de points non coplanaires de cet espace.

3.5. Proposition. Soient V un espace affine de dimension k et $a_0, \cdots, a_k$ des points de V. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $a_0, \cdots, a_k$ forment un repère affine de V,

ii) $\overrightarrow{a_0a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_0a_k}$ forment une base de $\vec{V}$,

iii) Pour tout $i = 0, \cdots, k$ le point a_i n'appartient pas à $\mathrm{Aff}\{a_0, \cdots, \widehat{a_i}, \cdots a_k\}$ (n'est pas barycentre des points $\{a_0, \cdots, \widehat{a_i}, \cdots, a_k\}$).

Démonstration : Cela résulte immédiatement de 3.3. □

3.5.1. ♠ Soit $V = \mathrm{Aff}\{a_0, \cdots, a_k\}$. Montrez qu'on peut extraire de $\{a_0, \cdots, a_k\}$ un repère de V. Montrez que tout espace affine admet (au moins) un repère affine.

3.6. Coordonnées cartésiennes selon un repère

Dans ce paragraphe on utilise un repère affine $a_0, a_1, \cdots, a_n$ de E mais on fait jouer un rôle particulier au point a_0 : c'est **l'origine** du repère.

Définition : Soit $m \in E$. On a l'égalité : $m = a_0 + \overrightarrow{a_0m}$, puis, comme les $\overrightarrow{a_0a_i}$ forment une base de $\vec{E}$, on écrit $\overrightarrow{a_0m} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{a_0a_i}$. Les λ_i sont appelées **coordonnées (cartésiennes)** du point m dans le repère $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$, d'origine a_0, de E.

Choisir un repère dans un espace affine E de dimension n permet d'associer à chaque point m ses n coordonnées cartésiennes dans le repère, et ainsi d'identifier E avec $\mathbb{R}^n$.
L'emploi des coordonnées cartésiennes permet toutes les opérations usuelles de la géométrie analytique. Son intérêt est de ramener un problème de géométrie à un calcul. C'est une méthode très puissante qu'on doit toujours penser à employer si on ne voit pas de solution géométrique plus rapide. On se reportera aux exercices pour voir comment écrire en termes de coordonnées des équations de droites, plans, etc.
Cependant les coordonnées cartésiennes font jouer un rôle particulier à l'origine : cette dissymétrie peut compliquer inutilement une démonstration. Pour traiter analytiquement un problème où tous les points jouent le même rôle, il vaut mieux utiliser les coordonnées barycentriques que nous introduisons ci-dessous.

3.7. Coordonnées barycentriques

Proposition et définition : Soient $a_0, \cdots, a_r$ des points de E **affinement indépendants**, de sorte que $a_0, \cdots, a_r$ est un repère du sous-espace affine engendré $V = \mathrm{Aff}\{a_0, \cdots, a_r\}$. Alors tout point m de V s'écrit, de manière unique, comme barycentre des points a_i affectés de masses λ_i vérifiant $\sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$. Les réels λ_i s'appellent les **coordonnées barycentriques** de m sur le repère $a_0, \cdots, a_r$ de V.

*Démonstration :*Il reste à prouver l'unicité de l'écriture de m comme barycentre. D'après la définition (iv) du barycentre, supposons qu'on ait à la fois :

$$\overrightarrow{a_0m} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i.\overrightarrow{a_0a_i} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a_0m} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i.\overrightarrow{a_0a_i} \quad \text{où} \quad \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = \sum_{i=0}^{r} \mu_i = 1$$

Alors, comme $a_0, \cdots, a_r$ est un repère, les vecteurs $\overrightarrow{a_0 a_i}$ sont linéairement indépendants, de sorte que l'on a $\lambda_i = \mu_i$ pour $i = 1, \cdots, r$. Enfin on en déduit $\lambda_0 = \mu_0$ grâce à la relation $\sum_{i=0}^r \lambda_i = \sum_{i=0}^r \mu_i = 1$. $\square$

3.7.1. ♣ Voici le genre de manipulations qu'il faut savoir effectuer :

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère les trois points $a = (3, 1)$, $b = (-1, 2)$ et $c = (0, -1)$. Montrez que (a, b, c) est un repère affine de $\mathbb{R}^2$.

Déterminez les points p et q de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées barycentriques dans (a, b, c) sont respectivement $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Quelles sont les coordonnées barycentriques dans (a, b, c) du point r de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées cartésiennes dans $(a; \overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$ sont $(2, 1)$?

Enfin, donnez les coordonnées barycentriques dans (a, b, c) du point g, barycentre de $\{(p, 1), (q, 2), (r, 5)\}$.

3.7.2. Le théorème de double associativité sur les barycentres (cf. 1.9) se traduit en termes de coordonnées barycentriques sous la forme suivante :

Proposition : Soit $(a_0, \cdots, a_n)$ un repère affine de E et soient $b_0, \cdots, b_r$ des points de E. On suppose que b_j a pour coordonnées barycentriques $\lambda_{ij}, i = 0, \cdots, n$ sur le repère $(a_0, \cdots, a_n)$. Soit g le barycentre des b_j affectés des coefficients μ_j avec $\sum_{j=0}^r \mu_j = 1$. Alors les coordonnées barycentriques de g sur le repère $(a_0, \cdots, a_n)$ sont les nombres $\nu_i = \sum_{j=0}^r \mu_j \lambda_{ij}$ $(*)$.

Si, de plus, on a $r = n$ et si $(b_0, \cdots, b_n)$ est aussi un repère affine de E (de sorte que les μ_j sont les coordonnées barycentriques de g sur le repère $(b_0, \cdots, b_n)$), la formule $(*)$ décrit comment varient les coordonnées barycentriques de g dans le changement de repère.

3.7.3. ♣ Soit E le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x+y+z=1$, cf. I.1.2 et 1.4.10. Si $m=(x,y,z)$ est un point de E, quelles sont ses coordonnées barycentriques dans (i,j,k) ?

3.7.4. *Coordonnées barycentriques et triangle.* [3]

On note α,β,γ les coordonnées barycentriques d'un point m du plan sur le repère a,b,c.

a) On suppose que m n'est pas situé sur les droites $(bc),(ca),(ab)$. Traduire cette condition sur α,β,γ.

b) On suppose les droites $(am),(bm),(cm)$ respectivement non parallèles à (bc), (ca), (ab). Traduire cette condition sur α,β,γ.

c) Sous les hypothèses précédentes, on désigne par a',b',c' les intersections de $(am),(bm),(c$ avec $(bc),(ca),(ab)$. Calculer les coordonnées barycentriques de a',b',c' sur a,b,c, puis celles de m sur a,a' ; b,b' ; c,c'.

3.7.5. ♣. *Théorème de Céva.* Soient a, b et c trois points affinement indépendants d'un plan affine E (i.e. tels que $\dim(\mathrm{Aff}\{a,b,c\})=2$, cf. 3.2). On considère trois points a', b' et c' sur les droites (bc), (ac) et (ab) ; on suppose

$$a'\notin\{b,c\},\quad b'\notin\{a,c\}\quad\text{et}\quad c'\notin\{a,b\}.$$

Montrer que les droites (aa'), (bb') et (cc') sont concourantes ou parallèles si et seulement si le produit $\dfrac{\overrightarrow{a'b}}{\overrightarrow{a'c}}\times\dfrac{\overrightarrow{b'c}}{\overrightarrow{b'a}}\times\dfrac{\overrightarrow{c'a}}{\overrightarrow{c'b}}$ vaut -1. (cf. IV.4.1 pour la définition du rapport de deux vecteurs)

Lorsque chaque rapport vectoriel vaut -1, on retrouve un résultat connu. Lequel ?

---

[3]Les techniques de ce paragraphe sont très utiles pour résoudre de nombreux problèmes de concours de droites.

Contrairement au théorème de Thalès, le résultat précédent n'est pas explicitement au programme du CAPES. Il apparaît cependant très fréquemment dans les épreuves écrites (sous une forme plus ou moins dissimulée).

3.7.6. ♣. *Application.* Soit (a, b, c) un repère du plan affine. On considère les points a', b' et c' de coordonnées barycentriques respectives $(0, 2/3, 1/3)$, $(3/4, 0, 1/4)$ et $(3/5, 2/5, 0)$. Les droites (aa'), (bb') et (cc') sont-elles concourantes ? Si oui, donner les coordonnées barycentriques du point de concours.

3.7.7. ♣. *Théorème de Gergonne.* Même situation que Céva, on suppose $(aa'), (bb'), (cc')$ concourantes en m. Montrer que l'on a :

$$\frac{\overrightarrow{a'm}}{\overrightarrow{a'a}} + \frac{\overrightarrow{b'm}}{\overrightarrow{b'b}} + \frac{\overrightarrow{c'm}}{\overrightarrow{c'c}} = 1.$$

4. Compléments sous forme d'exercices

4.1. ♣ Equation barycentrique d'une droite. Soient E un plan affine et (a, b, c) un repère de E. On appelle x et y les coordonnées cartésiennes d'un point m de E dans ce repère ($\overrightarrow{am} = x\overrightarrow{ab} + y\overrightarrow{ac}$) et (α, β, γ) les coordonnées barycentriques de m sur ce repère ($\alpha + \beta + \gamma = 1$). On considère trois points m_1, m_2, m_3 du plan. Posons

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Montrer que les trois points m_1, m_2, m_3 sont alignés si et seulement si D ou Δ est nul.

En déduire que l'équation barycentrique d'une droite (c'est-à-dire la relation qui lie les coordonnées barycentriques de ses points) est de la forme $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$ avec λ, μ, ν non tous égaux.

> Beaucoup de figures géométriques (comme la droite, cf. ci-dessus) sont définies par une (ou plusieurs) relation(s) portant sur les coordonnées cartésiennes. En passant aux coordonnées barycentriques, on voit qu'on peut aussi définir la figure par une (ou plusieurs) relation(s) sur les coordonnées barycentriques. Pour certains problèmes le système de relations ainsi obtenu est plus simple en barycentrique qu'en cartésien.

4.1.1. ♠ On reprend les notations de 3.7.4. Donner l'équation barycentrique de la droite (aa') puis de la droite parallèle à (bc) passant par m.

4.1.2. ♣ On appelle D_a, D_b, D_c respectivement les droites passant par a, b, c et parallèles à $(bc), (ca), (ab)$. Caractériser sur leurs coordonnées barycentriques les points de de ces droites.

Soit a' le point d'intersection de D_b et D_c et, de même, b', c'. Calculer les coordonnées barycentriques de a', b', c' sur (a, b, c). Déterminer le milieu de $[b'c']$ et l'isobarycentre de a', b', c'.

Interpréter ces résultats et les comparer avec 1.9.2.

4.1.3. ♣. Utiliser un déterminant pour donner une démonstration du Théorème de Ménélaus (IV.7.7.2).

4.2. Demi-droites

Définition : Soient a et b deux points distincts de E. La demi-droite $[ab)$

est l'ensemble des points p de (ab) tels que le segment semi-ouvert $[bp[$ ($= [bp] - \{p\}$) ne contienne pas a.

♣. Soit m un point de (ab). On a donc $\overrightarrow{am} = \lambda.\overrightarrow{ab}$ avec λ réel.

a) Montrez que $[ab)$ est l'ensemble des points m de (ab) tels que λ soit positif ou nul (on note $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{am}}{\overrightarrow{ab}}$, cf. IV.4.1).

b) Montrez que $[ab)$ est l'ensemble des points de (ab) dont la coordonnée barycentrique sur b dans le repère (a, b) est positive.

c) Montrez enfin que si (a, b, c) est un repère affine d'un plan affine E, alors $[ab)$ est l'ensemble des points m dont les coordonnées barycentriques sont de la forme $(\alpha, \beta, 0)$, avec $\beta \geq 0$.

4.3. Demi-plans

Définition : Soient a, b et c trois points non alignés d'un plan affine E. Le demi-plan (fermé) délimité par (bc) et contenant a (noté E^+ dans la suite) est l'ensemble des points m de E tels que (bc) ne coupe pas $[am[$ (*i.e.* $(bc) \cap [am[= \emptyset$).

4.3.1. ♠ Faites un dessin pour vous convaincre que cette définition correspond bien géométriquement à l'intuition d'un demi-plan. Qu'obtiendrait-on si dans la définition on remplaçait “ne coupe pas $[am[$” par “ne coupe pas $[am]$” ? Remarquez que a appartient à E^+.

Notre but est maintenant de transformer cette définition géométrique en une définition analytique ; nous nous donnons un repère affine (a', b', c') de E où a' est choisi comme origine. Nous allons caractériser les points de E^+, d'abord par leurs coordonnées cartésiennes, puis par leurs coordonnées barycentriques dans le repère (a', b', c').

4.3.2. ♣ Dans le repère affine (a', b', c'), on suppose que l'équation de la droite (bc) est donnée par la forme affine f (cf. IV.2.6.5) :

$$m \in (bc) \Leftrightarrow f(m) = 0$$

et que $f(a)$ est positif. On veut montrer :

$$m \in E^+ \Leftrightarrow f(m) \geq 0$$

Soient m un point de E et ϕ_m la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\phi_m(t) = f(a + t\overrightarrow{am}).$$

(i) Montrez que ϕ_m est une fonction polynôme de degré au plus 1. Pour quels points m est-elle constante ? En déduire qu'une équation de la droite Δ passant par a et parallèle à (bc) est $f(m) = f(a)$.

(ii) Soit m tel que ϕ_m n'est pas constante, quand ϕ_m s'annule-t-elle ? Etudier son signe. En déduire que si m n'appartient pas à Δ, la droite (am) rencontre (bc) en un point unique p et que E^+ est l'ensemble des points m qui vérifient $f(m) \geq 0$. Explicitez cette écriture en coordonnées cartésiennes.

(iii) Montrez, à l'aide des définitions géométriques, que, si m n'est pas sur Δ, on a l'équivalence :

$$m \in E^+ \iff m \in [pa).$$

On cherche maintenant une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées barycentriques (α, β, γ) de m dans le repère (a, b, c) pour que m appartienne à E^+.

e) Appliquer les résultats précédents au cas où le repère choisi est (b, c, a) : déterminer f et $f(a)$.

f) Caractériser les points de Δ et de E^+ par leurs coordonnées barycentriques.

g) Décrire l'ensemble des points vérifiant $\alpha = \frac{2}{3}$.

4.4. Barycentres, aires et triangle Soit un triangle abc dans un plan affine P. Soit m un point du plan. Une base $\mathcal{B}$ de $\vec{P}$ étant donnée, on appelle **aire algébrique du triangle** construite sur les vecteurs $\overrightarrow{ma}$ et $\overrightarrow{mb}$ dans cet ordre le nombre réel $\frac{1}{2}\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{ma}, \overrightarrow{mb})$ que l'on notera $\mathcal{A}\mathrm{alg}\,(\mathrm{mab})$. On pose :

$$\alpha_0 = \mathcal{A}\mathrm{alg}(\mathrm{mbc}) \quad , \quad \beta_0 = \mathcal{A}\mathrm{alg}(\mathrm{mca}) \quad \text{et} \quad \gamma_0 = \mathcal{A}\mathrm{alg}(\mathrm{mab}).$$

4.4.1. Montrer que m est barycentre de (a, α_0), (b, β_0) et (c, γ_0).

4.4.2. On se place maintenant dans le plan affine euclidien et on suppose que m est dans l'intérieur du triangle. Pour retrouver le résultat précédent :
- Utiliser le produit vectoriel en Terminale.
- Utiliser la définition de l'aire géométrique d'un triangle à l'aide de la hauteur au collège. (On pourra commencer par le cas où m est sur un côté du triangle.)

4.4.3. *Application.* Montrer que les médianes et les côtés d'un triangle définissent six petits triangles de même aire.

4.5. ♣ *Suite de 1.9.3*. Pour k égal à 1 ou 2, on pose :

$$a_k = b + \frac{k}{3}\overrightarrow{bc}, \quad b_k = c + \frac{k}{3}\overrightarrow{ca}, \quad c_k = a + \frac{k}{3}\overrightarrow{ab}$$

c) Montrer que F contient les points $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$.

d) Donner un encadrement des coordonnées d'un point g de F dans le repère affine (a, b, c). Montrez que F est contenu dans un hexagone (intersection de 6 demi-plans) que l'on dessinera. (A suivre en III.2.6.4.)