

# Variétés différentielles et formes différentielles

Frédéric Paulin

Version préliminaire



Département de Mathématiques d'Orsay

Cours accéléré de seconde année de master

Université Paris-Saclay

Année 2018-2019

université  
PARIS-SACLAY

Fondation mathématique  
**FMJH**  
Jacques Hadamard

UNIVERSITÉ  
PARIS  
SUD  
FACULTÉ  
DES SCIENCES  
D'ORSAY

## Table des matières

<b>1 Variétés différentielles</b>	<b>5</b>
1.1 Variétés topologiques	5
1.2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$	11
1.3 La catégorie des variétés différentielles	13
Objets	13
Flèches	16
Le point de vue des faisceaux	18
1.4 Exemples de variétés différentielles	20
1.4.1 Exemples triviaux, contre-exemples et culture	20
1.4.2 Exemples familiaux	24
Sous-variétés	24
Plongements	26
Images réciproques	28
Sommes disjointes	29
Produits	29
Homéomorphismes locaux	30
Revêtements	30
1.4.3 Exemples cruciaux	33
Les sphères	33
Les tores	35
Les espaces projectifs	36
Les variétés grassmanniennes	38
Les groupes classiques	39
<b>2 Fibrés vectoriels</b>	<b>41</b>
2.1 Sous-espaces tangents d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$	41
2.2 Fibrés vectoriels	44
2.3 Fibré tangent	46
2.4 Application tangente	49
2.5 Exemples	52
Sous-variétés	52
Plongements	54
Images réciproques	54
Sommes disjointes	54
Produits	54
Revêtements	55
2.6 Fibrations	55
2.7 Le fibré des formes alternées	58
2.8 Opérations sur les fibrés vectoriels	60
Préimage	60
Produit	61
Somme directe	61

<b>3</b>	<b>Champs de vecteurs et feuilletages</b>	<b>63</b>
3.1	Champs de vecteurs . . . . .	63
3.2	Opérations sur les champs de vecteurs . . . . .	64
3.2.1	Addition. . . . .	64
3.2.2	Multiplication par une fonction. . . . .	65
3.2.3	Restriction. . . . .	65
3.2.4	Image réciproque. . . . .	65
3.2.5	Expression d'un champ de vecteurs dans une carte. . . . .	67
3.3	Flot local d'un champ de vecteurs . . . . .	68
3.4	Dérivations . . . . .	70
3.5	Dérivations et champs de vecteurs . . . . .	73
3.6	Crochets de champs de vecteurs . . . . .	76
3.7	Champs de plans . . . . .	78
3.8	Feuilletages . . . . .	81
3.9	Théorème de Frobenius . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Formes différentielles</b>	<b>88</b>
4.1	Formes différentielles . . . . .	88
	Structure d'algèbre . . . . .	88
	Image réciproque . . . . .	90
	Différentielle extérieure . . . . .	93
	Produit intérieur et dérivée de Lie . . . . .	98
	Gradient, divergence, rotationnel . . . . .	101
4.2	Cohomologie de de Rham . . . . .	102
	Algèbre de cohomologie de de Rham . . . . .	103
	Invariance par homotopie . . . . .	106
	Suite exacte de Mayer-Vietoris . . . . .	110
	Calcul de la cohomologie des sphères . . . . .	114
	Autres calculs de cohomologie de de Rham . . . . .	116
4.3	Intégration des formes différentielles . . . . .	123
	Intégration dans les ouverts de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	123
	Orientation des variétés . . . . .	124
	Intégration de formes différentielles . . . . .	129
	Le théorème de Stokes . . . . .	131
	Régularité . . . . .	135
4.4	Cohomologie à support compact . . . . .	136
	Invariance par homotopie . . . . .	138
	Suite exacte de Mayer-Vietoris . . . . .	139
4.5	Dualité de Poincaré . . . . .	140
	Cohomologie de de Rham des espaces projectifs réels . . . . .	145
4.6	Théorie du degré . . . . .	146
4.6.1	Degré d'une application entre variétés de même dimension. . . . .	146
4.6.2	Indice d'un champ de vecteurs en un zéro isolé. . . . .	152
4.6.3	Nombre d'enlacement. . . . .	153

<b>5</b>	<b>Exercices de dérouillage de neurones et d'incitation à l'apprentissage</b>	<b>158</b>
5.1	Énoncés . . . . .	158
5.2	Indications pour la résolution des exercices . . . . .	159
<b>A</b>	<b>Annexes : rappels divers</b>	<b>161</b>
A.1	Rappels de topologie . . . . .	161
A.2	Rappels sur les actions de groupes . . . . .	166
A.3	Rappels de calcul différentiel . . . . .	168
A.4	Rappels sur les revêtements . . . . .	173
	Revêtements . . . . .	173
	Homotopie . . . . .	175
	Revêtements universels . . . . .	177
A.5	Rappels d'algèbre multilinéaire . . . . .	179
	Algèbre tensorielle . . . . .	179
	Algèbre extérieure . . . . .	180
A.6	Rappels d'algèbre homologique . . . . .	189
	Catégories, foncteurs . . . . .	189
	Complexes de cochaînes . . . . .	191
A.7	Indications pour la résolution des exercices . . . . .	196

<b>Index</b>	<b>204</b>
--------------	------------

<b>Bibliographie</b>	<b>209</b>
----------------------	------------

# 1 Variétés différentielles

Pour des explications historiques sur l'invention de la notion de variété et ses motivations, nous renvoyons aux textes originaux de Riemann [Rie, Spi], H. Poincaré [Poi], E. Cartan [Car], ainsi qu'aux ouvrages d'histoire des mathématiques comme l'excellent [Die4].

## 1.1 Variétés topologiques

Avant de définir les variétés topologiques, donnons deux résultats de topologie générale. Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , l'ensemble  $\mathbb{R}^n$  est muni de sa topologie usuelle.

**Théorème 1.1 (Théorème d'invariance du domaine de Brouwer)** *Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue et injective. Alors  $f(U)$  est ouvert, et  $f : U \rightarrow f(U)$  est un homéomorphisme.*  $\square$

En particulier, un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$  n'est pas homéomorphe à un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^m$  si  $n$  et  $m$  sont distincts. Notons que si l'on remplace « homéomorphe » par «  $C^1$ -difféomorphe », alors cette dernière assertion est évidente. Dans le cadre différentiel de ce cours, le théorème d'inversion locale (voir l'appendice A.3) est en général un outil suffisant pour remplacer le théorème d'invariance du domaine de Brouwer.

Nous admettrons le théorème 1.1. Les démonstrations les plus naturelles utilisent des outils élémentaires de topologie algébrique, ce qui constituerait une diversion un peu longue (voir [God, Spa, Hat, Pau1]). Il existe aussi des démonstrations plus directes, mais moins éclairantes (voir avec précautions la démonstration originelle [Brou]).

La proposition suivante servira à comprendre les propriétés topologiques globales (qui sont minimes) que nous demanderons aux variétés topologiques. Nous renvoyons à l'appendice A.1 pour les définitions des notions topologiques utilisées.

**Proposition 1.2** *Soit  $X$  un espace topologique, dont tout point admet un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert d'un espace  $\mathbb{R}^n$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $X$  est séparé et à base dénombrable,
- (2)  $X$  est  $\sigma$ -compact,
- (3)  $X$  est dénombrable à l'infini,
- (4)  $X$  est métrisable séparable,
- (5) il existe un plongement topologique de  $X$  dans  $\ell^2(\mathbb{R})$ .

**Démonstration.** Un espace topologique séparé dans lequel tout point admet un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert d'un  $\mathbb{R}^n$  est localement compact. En

particulier, tout point d'un tel espace admet un système fondamental de voisinages fermés métrisables (pour la topologie induite).

Il est immédiat qu'un espace localement compact à base dénombrable admet une base dénombrable d'ouverts d'adhérences compactes, donc est  $\sigma$ -compact, et qu'un espace  $\sigma$ -compact, dans lequel tout point admet un voisinage ouvert qui est à base dénombrable (pour la topologie induite), est à base dénombrable. Donc (1) et (2) sont équivalents.

Il est immédiat qu'un espace dénombrable à l'infini est  $\sigma$ -compact, et qu'un espace localement compact et  $\sigma$ -compact est dénombrable à l'infini. Donc (2) et (3) sont équivalents.

L'espace de Hilbert  $\ell^2(\mathbb{R})$  est métrisable et à base dénombrable (l'ensemble des boules ouvertes de rayons rationnels centrées aux suites presque nulles de rationnels est une base dénombrable d'ouverts). Tout sous-espace d'un espace métrisable et à base dénombrable l'est encore. Un espace topologique à base dénombrable est séparable, car si  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une base d'ouverts non vides, et  $x_i$  un point de  $U_i$ , alors  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est dense. Donc (5) implique (4).

Un espace métrique séparable est séparé et à base dénombrable (en prenant les boules ouvertes de rayons rationnels centrées aux points d'une partie dénombrable dense). Donc (4) implique (1).

Un espace topologique  $X$ , séparé, à base dénombrable, et dont tout point admet un système fondamental de voisinages fermés métrisables, se plonge dans  $\ell^2(\mathbb{R})$ . En effet, soit  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une base dénombrable d'ouverts de  $X$ . Nous pouvons supposer que  $\overline{U_i}$  est métrisable (pour la topologie induite), car si  $J$  est l'ensemble des  $i$  tels que  $\overline{U_i}$  est métrisable, alors  $(U_j)_{j \in J}$  est encore une base d'ouverts. Notons  $d_i$  une distance sur l'espace  $\overline{U_i}$  compatible avec sa topologie. Considérons la fonction  $\varphi_i : X \rightarrow [0, 1]$  définie par  $\varphi_i(x) = \min\{1, d_i(x, \partial U_i)\}$  si  $x$  est dans  $U_i$  et  $\varphi_i(x) = 0$  sinon. Il est facile de vérifier que  $\varphi_i$  est continue et non nulle exactement sur  $U_i$ . Alors l'application  $f : x \mapsto (\frac{1}{i+1}\varphi_i(x))_{i \in \mathbb{N}}$  est un homéomorphisme de  $X$  sur son image dans  $\ell^2(\mathbb{R})$ . En effet, l'injectivité découle du fait que  $X$  soit séparé et que  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  soit une base d'ouverts. La continuité vient du fait que les  $\varphi_i$  soient continues et bornées en valeur absolue par 1. Enfin, l'application  $f : X \rightarrow f(X)$  est fermée, car si  $F$  est un fermé de  $X$  et si  $x$  n'est pas dans  $F$ , alors il existe  $i$  tel que  $x \subset U_i \subset X - F$ , et donc  $d(f(x), f(F)) \geq \varphi_i(x)/(i+1) > 0$ . Donc (1) implique (5).  $\square$

Une *variété topologique* (ou par abus *variété*) est un espace topologique  $M$  tel que

- l'espace  $M$  soit séparé et à base dénombrable,
- tout point de  $M$  admette un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert d'un espace  $\mathbb{R}^n$ .

En particulier, par la proposition 1.2, une variété topologique est un espace localement compact, métrisable, séparable, dénombrable à l'infini. Au lieu de demander que  $M$  soit séparé à base dénombrable, nous pourrions demander, de manière équivalente par la proposition 1.2, que  $M$  soit métrisable séparable. Il est souvent plus facile de vérifier les conditions séparé à base dénombrable que les conditions métri-

sable séparable (lorsque l'on veut montrer qu'un objet est une variété), et c'est pour cela que nous mettons en avant les premières. Par contre, les secondes sont souvent plus utiles lorsque l'on travaille sur une variété donnée.

Mais ces propriétés globales des variétés topologiques sont minimales, et en pratique faciles à vérifier (cette vérification étant parfois omise). Ce qui est important est qu'une variété topologique admette les mêmes propriétés topologiques locales qu'un espace  $\mathbb{R}^n$ . Par exemple, elle est, entre autres, (voir les appendices A.1 et A.4 pour des définitions)

- localement compacte (ce qui n'est pas uniquement une condition locale à cause de l'hypothèse de séparation),
- localement connexe par arcs (donc elle est connexe par arcs si elle est connexe),
- localement contractile.

Soit  $M$  une variété topologique. Pour tout  $x$  dans  $M$ , l'entier  $n$  tel qu'il existe un voisinage ouvert de  $x$  homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  est uniquement défini, par le théorème d'invariance du domaine de Brouwer 1.1, et il est localement constant (donc constant sur toute composante connexe de  $M$ ). Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , une variété topologique est dite *de dimension  $n$*  si tout point admet un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Toute composante connexe de  $M$  possède donc une dimension bien définie. Dans la littérature comme dans ce cours, on ne considère en général que des variétés topologiques dont les dimensions des composantes connexes sont égales. On appelle souvent *courbe* une variété topologique de dimension 1, et *surface* une variété topologique de dimension 2.

Par exemple, les variétés topologiques de dimension 0 sont les espaces discrets dénombrables.

**Exercice E.1** *Montrer qu'une variété topologique compacte connexe de dimension 1 est homéomorphe au cercle  $\mathbb{S}_1$ . Montrer qu'une variété topologique connexe non compacte de dimension 1 est homéomorphe à  $\mathbb{R}$ . En déduire qu'une variété topologique de dimension 1 est somme disjointe d'un ensemble dénombrable d'espaces homéomorphes à  $\mathbb{R}$  ou à  $\mathbb{S}_1$ .*

La collection des variétés topologiques forme une sous-catégorie de la catégorie des espaces topologiques, notée TOP, et de même pour les variétés topologiques de dimension  $n$ , dont la collection est notée TOP $_n$ . Voir l'appendice A.6 pour la définition d'une catégorie.

L'outil principal qui permet le passage du local au global dans les variétés topologiques est celui de partition de l'unité, que nous introduisons maintenant. Nous renvoyons à l'appendice A.1 pour les définitions de topologie générale utilisées, en particulier celle de famille localement finie de parties.

Soit  $X$  un espace topologique. Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, on appelle *support* de  $f$  l'adhérence de  $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ , et on le note  $\text{Supp}(f)$ . C'est le plus petit fermé en dehors duquel  $f$  est nulle.

Une *partition de l'unité* de  $X$  est une famille  $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  de fonctions continues de  $X$  dans  $[0, 1]$ , dont la famille des supports est localement finie, et qui vérifie  $\sum_i \varphi_i = 1$  (remarque qu'alors  $(\varphi_\alpha^{-1}([0, 1]))_{\alpha \in \mathcal{A}}$  est un recouvrement ouvert, et que la somme  $\sum_i \varphi_i(x)$  ne possède qu'un nombre fini de termes non nuls pour tout  $x$  dans  $X$ ). Soit  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $X$ . Une *partition de l'unité subordonnée à  $\mathcal{U}$*  est une partition de l'unité  $(\varphi_i)_{i \in I}$  de  $X$ , telle que, pour tout  $i \in I$ , le support de  $\varphi_i$  soit contenu dans  $U_i$ .

**Remarque.** Supposons que l'on ait une partition de l'unité  $(\varphi'_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  de  $X$ , telle que, pour tout  $\alpha \in \mathcal{A}$ , il existe un élément de  $\mathcal{U}$  contenant le support de  $\varphi'_\alpha$ . Il est alors facile de modifier cette partition de l'unité pour la rendre subordonnée à  $\mathcal{U}$ . En effet, si  $f : \mathcal{A} \rightarrow I$  est n'importe quelle application telle que le support de  $\varphi'_\alpha$  soit contenu dans  $U_{f(\alpha)}$  pour tout  $\alpha$ , posons

$$\varphi_i : x \mapsto \sum_{\alpha \in f^{-1}(i)} \varphi'_\alpha(x),$$

avec la convention usuelle  $\sum_\emptyset = 0$ . Alors  $(\varphi_i)_{i \in I}$  est une partition de l'unité subordonnée à  $\mathcal{U}$ . En effet,

- (1) l'application  $\varphi_i$  est bien définie et continue, car sur un voisinage de tout point,  $\varphi_i$  est somme d'un nombre fini de  $\varphi'_\alpha$ ;
- (2)  $\sum_i \varphi_i = \sum_\alpha \varphi'_\alpha = 1$ ;
- (3) la famille de fermés  $(\text{Supp } \varphi_i)_{i \in I}$  est localement finie, car pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,

$$\{i \in I : (\text{Supp } \varphi_i) \cap U \neq \emptyset\} \subset f(\{\alpha \in \mathcal{A} : (\text{Supp } \varphi'_\alpha) \cap U \neq \emptyset\}),$$

et l'image d'un ensemble fini par une application est finie;

- (4) nous avons

$$(\text{Supp } \varphi_i) \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in f^{-1}(i)} \text{Supp } \varphi'_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in f^{-1}(i)} \text{Supp } \varphi'_\alpha \subset U_i,$$

car une union localement finie de fermés est fermée.

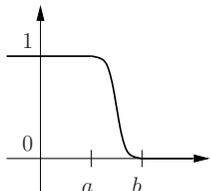
**Proposition 1.3** *Une variété topologique  $M$  est paracompacte, et tout recouvrement ouvert de  $M$  admet une partition de l'unité qui lui est subordonnée. Si de plus  $M$  est compacte, alors tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini et une partition de l'unité finie qui est subordonnée à ce sous-recouvrement.*

En fait, tout recouvrement ouvert d'un espace topologique paracompact admet une partition de l'unité subordonnée (voir [Dug, page 170]), mais nous ne montrerons ce résultat que dans les cas des variétés, et nous aurons besoin de sa version différentiable (c'est-à-dire de la proposition 1.9) au chapitre 4.

**Lemme 1.4** *Pour tout  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^n$  et tout voisinage  $U$  de  $x_0$ , il existe une fonction  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , de support contenu dans  $U$ , constante égale à 1 sur un voisinage de  $x_0$ , et à valeurs dans  $[0, 1]$ .*

**Démonstration.** Rappelons que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^n} e^{-\frac{1}{t}} = 0$  pour tout  $n$  dans  $\mathbb{R}$ . Il est alors facile de vérifier que, pour tous  $a < b$ , l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$

$$f_{a,b} : t \mapsto \begin{cases} \left(1 + e^{\frac{2t-(a+b)}{(b-t)(t-a)}}\right)^{-1} & \text{si } a < t < b \\ 1 & \text{si } t \leq a \\ 0 & \text{si } t \geq b \end{cases}$$



est  $C^\infty$ . Alors, pour  $\epsilon > 0$  suffisamment petit, l'application  $x \mapsto f_{\epsilon/2, \epsilon}(\|x - x_0\|)$  convient, pour  $\|\cdot\|$  la norme usuelle.  $\square$

**Démonstration de la proposition 1.3.** Comme  $M$  est dénombrable à l'infini, il existe par définition une suite exhaustive de compacts  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  (voir l'appendice

A.1). Posons  $K_{-1} = \emptyset$ , et  $K'_n = K_{n+1} - \overset{\circ}{K}_n$ , qui est un sous-espace compact de  $M$ .

Soit  $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  un recouvrement ouvert. Posons

$$V_{n,\alpha} = U_\alpha \cap \left( K_{n+2}^\circ - K_{n-1} \right).$$

Alors  $(V_{n,\alpha})_{\alpha \in \mathcal{A}}$  est un recouvrement ouvert de  $K'_n$ , donc admet un sous-recouvrement fini  $(V_{n,\alpha})_{\alpha \in \mathcal{A}_n}$ . Alors  $(V_{n,\alpha})_{n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathcal{A}_n}$  est un recouvrement ouvert de  $M$ , plus fin que  $\mathcal{U}$ , et localement fini. Donc  $M$  est paracompacte.

Pour tout  $x$  dans  $K'_n$ , soit  $W_x$  un voisinage ouvert de  $x$ , contenu dans  $V_{n,\alpha}$  pour un  $\alpha$  dans  $\mathcal{A}$ , et homéomorphe à un ouvert d'un espace  $\mathbb{R}^k$ . Par le lemme précédent, il existe donc (en prolongeant par 0 en dehors de  $W_x$ ) une application continue  $\varphi_x$  de  $M$  dans  $[0, 1]$ , de support contenu dans  $W_x$ , constante égale à 1 sur un voisinage  $W'_x$  de  $x$ . Comme  $(W'_x)_{x \in K'_n}$  recouvre  $K'_n$ , il existe une partie finie  $B_n$  de  $K'_n$  telle que  $(W'_x)_{x \in B_n}$  recouvre  $K'_n$ . Posons

$$\varphi : y \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}, x \in B_n} \varphi_x(y),$$

qui est une somme n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls (car pour  $x$  dans  $B_n$ , l'application  $\varphi_x$  est nulle sur  $K_{n-1}$ , donc sur  $y$  si  $n$  est assez grand), et qui est strictement positive (en fait supérieure ou égale à 1) pour tout  $y$  dans  $M$ . Posons  $\varphi'_x = \varphi_x / \varphi$ . Alors  $(\varphi'_x)_{n \in \mathbb{N}, x \in B_n}$  est une partition de l'unité que l'on peut rendre subordonnée à  $\mathcal{U}$  en utilisant la remarque précédant la proposition 1.3.

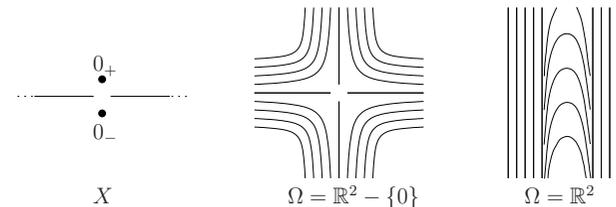
La dernière assertion découle immédiatement de la première.  $\square$

**Exercice E.2** Soit  $M$  un espace topologique paracompact, dont tout point admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $M$  est métrisable.

Il découle de la proposition 1.3 et de l'exercice ci-dessus que l'on peut rajouter la condition «  $X$  est paracompact séparable » dans la liste des conditions équivalentes de la proposition 1.2.

Il existe des espaces topologiques localement homéomorphes à  $\mathbb{R}^n$ , mais non séparés, que nous appellerons *variétés topologiques non séparées* (de dimension  $n$ ). De tels exemples apparaissent assez naturellement quand on considère des quotients de variétés topologiques (il est donc important de ne pas oublier d'étudier la propriété de séparation des quotients, lorsque l'on veut construire des variétés topologiques comme espaces quotients d'espaces topologiques!), voir les exemples en exercice ci-dessous. Il existe des espaces topologiques localement homéomorphes à  $\mathbb{R}^n$ , mais non paracompacts, que nous appellerons *variétés topologiques non paracompactes* (de dimension  $n$ ). Mais de tels exemples sont la plupart du temps très artificiels, voir les exemples en exercice ci-dessous.

**Exercice E.3** (1) Soit  $X$  l'ensemble  $(\mathbb{R} - \{0\}) \amalg \{0_-, 0_+\}$ . Montrer qu'il existe une unique structure d'espace topologique sur  $X$  telle que les deux applications  $\varphi_\pm : \mathbb{R} \rightarrow X$  définies par  $\varphi_\pm(t) = t$  si  $t \neq 0$ , et  $\varphi_\pm(0) = 0_\pm$  soient des homéomorphismes sur leurs images. Montrer que  $X$  est une variété topologique non séparée (voir ci-dessous).



(2) On considère un champ de vecteurs de classe  $C^1$  ne s'annulant pas sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ , dont toute courbe intégrale est fermée dans  $\Omega$ . Soit  $\sim$  la relation d'équivalence sur  $\Omega$  définie par  $x \sim y$  si et seulement s'il existe une courbe intégrale de  $X$  passant par  $x$  et  $y$ . Montrer que l'espace topologique quotient  $\Omega/\sim$  est localement homéomorphe à  $\mathbb{R}$ . Plus généralement (voir le paragraphe 3.8 pour les définitions), si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage  $C^1$  de codimension  $k$  à feuilles fermées dans une variété différentielle  $\Omega$  de classe  $C^1$ , alors l'espace des feuilles de  $(\Omega, \mathcal{F})$  (c'est-à-dire l'espace topologique quotient de  $\Omega$  par la relation d'équivalence « être dans la même feuille ») est localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^k$ . Dans les deux exemples de la figure ci-dessus, montrer que  $\Omega/\sim$  est une variété topologique non séparée de dimension 1 (mais séparable).

**Exercice E.4** (Voir l'appendice A.1 pour des rappels sur les ordres.) Soit  $\beta$  un ordinal, et  $\beta_-$  l'ensemble ordonné des ordinaux strictement inférieurs à  $\beta$ . On considère l'ensemble  $X = (\beta_- \times [0, 1]) - \{(0, 0)\}$  muni de la topologie de l'ordre induite par l'ordre lexicographique. Montrer que si  $\beta$  est l'ordinal de l'ordre usuel sur  $\mathbb{N}$ , alors  $X$  est homéomorphe à  $]0, +\infty[$ . Montrer que si  $\beta$  est le plus petit ordinal non dénombrable, alors  $X$  est une variété topologique non paracompacte (mais séparable), appelée la longue (demi-)droite.

## 1.2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

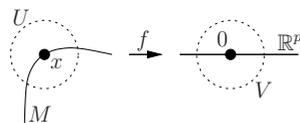
Nous renvoyons par exemple à [Ave, CarH, Die1] pour des rappels de calcul différentiel, ainsi qu'à l'appendice A.3. Sauf mention explicite du contraire, on identifie  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$  de manière usuelle par  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto ((x_1, \dots, x_p), (x_{p+1}, \dots, x_n))$  pour  $0 \leq p \leq n$  (avec convention immédiate pour  $p = 0$  ou  $p = n$ ).

Le premier exemple, et celui qu'il faut garder en tête, de sous-variété d'un espace vectoriel de dimension finie est un sous-espace vectoriel, par exemple  $\mathbb{R}^p \times \{0\}$  contenu dans  $\mathbb{R}^n$ . Nous allons définir une sous-variété générale comme obtenue par difféomorphismes locaux ambiants à partir un tel exemple, et donner des caractérisations équivalentes. Rappelons que le *graphe* d'une application  $f : A \rightarrow B$  est la partie de  $A \times B$  formée des couples  $(x, f(x))$  pour  $x$  dans  $A$ .

**Théorème 1.5** *Soit  $n \geq p$  dans  $\mathbb{N}$  et  $k$  dans  $(\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$ . Les propriétés suivantes d'une partie  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  sont équivalentes :*

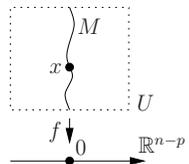
- **(Définition locale par redressement)**

Pour tout  $x$  dans  $M$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$ , un voisinage  $V$  de 0 dans  $\mathbb{R}^p$  et un  $C^k$ -difféomorphisme  $f : U \rightarrow V \times \mathbb{R}^{n-p}$  tels que  $f(U \cap M) = V \times \{0\}$ .



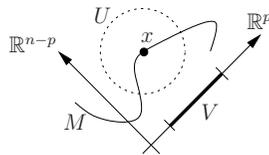
- **(Définition locale par fonction implicite)**

Pour tout  $x$  dans  $M$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  et une application  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$  de classe  $C^k$  qui est une submersion en  $x$ , tels que  $U \cap M = f^{-1}(0)$ .



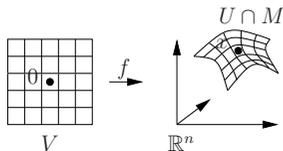
- **(Définition locale par graphe)**

Pour tout  $x$  dans  $M$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$ , une identification par un automorphisme linéaire  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ , un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^p$  et une application  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$  de classe  $C^k$  tels que  $U \cap M = \text{graphe}(f)$ .



- **(Définition locale par paramétrage)**

Pour tout  $x$  dans  $M$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$ , un voisinage  $V$  de 0 dans  $\mathbb{R}^p$  et une application  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  tels que  $f(0) = x$ ,  $f$  soit une immersion en 0, et  $f$  soit un homéomorphisme de  $V$  sur un voisinage ouvert de  $U \cap M$ .



**Démonstration.** Numérotons de (1) à (4) ces assertions dans cet ordre.

Montrons que (1) implique (2). Si  $x, U, f$  sont comme dans (1), alors on peut supposer que  $f(x) = 0$ , et en notant  $f_1, \dots, f_n$  les composantes de  $f$ , et  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$  l'application de composantes  $f_{p+1}, \dots, f_n$ , alors  $g$  est une submersion de classe  $C^k$  telle que  $g^{-1}(0) = U \cap M$ .

Montrons que (1) implique (4). Si  $x, U, V, f$  sont comme dans (1), alors on peut supposer que  $f(x) = 0$ , et la restriction de  $f^{-1}$  à l'ouvert  $W = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$  de  $\mathbb{R}^p \times \{0\}$  est une application de classe  $C^k$  envoyant 0 sur  $x$ , qui est une immersion en 0, et qui est un homéomorphisme de  $W$  sur  $U \cap M$ .

Montrons que (4) implique (1) (cette implication est parfois utilisée sous le nom de théorème des immersions dans les exercices). Si  $x, U, V, f$  sont comme dans (4), alors par le théorème A.5 de forme normale locale des immersions, quitte à restreindre  $U$  et  $V$ , il existe un  $C^k$ -difféomorphisme  $\psi$  de  $U$  sur un voisinage ouvert  $W$  de 0 dans  $\mathbb{R}^n$  tel que, sur  $V$ , on ait l'égalité  $\psi \circ f(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$ , et donc en particulier  $\psi(U \cap M) = \psi \circ f(V) = W \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ .

Le fait que (2) implique (1) (cette implication est parfois utilisée sous le nom de théorème des submersions dans les exercices) se montre de même, en utilisant le théorème A.6 de forme normale locale des submersions.

Le fait que (3) implique (4) est immédiat, car si  $x, U, V, f$  sont comme dans (3), alors on peut supposer que  $x = 0$  et que  $f(0) = 0$ , et l'application  $F : y \mapsto (y, f(y))$  est alors un homéomorphisme de  $V$  sur  $U \cap M$ , qui est une immersion  $C^k$  en 0 avec  $F(0) = 0$ .

Montrons pour terminer que (2) implique (3). Soient  $x, U, f$  comme dans (2), et notons  $f_1, \dots, f_{n-p}$  les composantes de  $f$ . On peut supposer que  $x = 0$ . Quitte à permuter les coordonnées, comme  $f$  est une submersion en  $x$ , on peut supposer que la matrice  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{j+p}}(x)\right)_{1 \leq i, j \leq n-p}$  (extraite de la matrice jacobienne de  $f$  en  $x$ ) soit inversible. Notons  $pr_1$  la projection sur le premier facteur de  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ . La différentielle en  $x$  de l'application  $F : y \mapsto (pr_1(y), f(y))$  est inversible. Donc par le théorème A.2 d'inversion locale,  $F$  est un difféomorphisme local en 0. L'inverse de  $F$  est de la forme  $y \mapsto (pr_1(y), G(y))$  avec  $G$  une application d'un voisinage  $W$  de 0 dans  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n-p}$ . Donc, quitte à restreindre  $U$ , la partie  $U \cap M = f^{-1}(0) = F^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$  est le graphe de la fonction  $G$  restreinte à  $W \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ .  $\square$

On dit qu'une partie  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  est une *sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $p$  et de classe  $C^k$*  (et tout simplement *sous-variété* par abus, par exemple quand  $k$  est sous-entendu) si elle vérifie l'une des propriétés du théorème 1.5. On dit alors que la *codimension* de  $M$  dans  $\mathbb{R}^n$  est  $n - p$ . Si  $p = 1, 2, n - 1$ , on dit que  $M$  est une courbe, surface, hypersurface (différentielle) de  $\mathbb{R}^n$  respectivement.

Si  $x \in M$ , un *paramétrage local* de classe  $C^k$  de  $M$  en  $x$  est une application  $f : V \rightarrow M$ , où  $V$  est un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^p$ , telle que  $f(0) = x$ ,  $f$  soit une immersion  $C^k$  sur  $V$ , et  $f$  soit un homéomorphisme de  $V$  sur un voisinage ouvert de  $x$  dans  $M$  (voir la définition locale par paramétrage (4)).

**Exercice E.5** *Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  une application de classe  $C^k$*

et de rang constant  $r$ . Montrer que pour tout  $y_0$  dans  $f(U)$ , l'ensemble des solutions de l'équation  $f(x) = y_0$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  de dimension  $n - r$ .

**Remarques.** (i) La définition locale par redressement (1) fait encore sens lorsque  $k = 0$ . On parle alors de *sous-variété topologique* (ou de classe  $C^0$ ). La définition (3) fait encore sens aussi, mais elle est strictement plus forte que la première, car l'exemple ci-dessous est une sous-variété topologique de  $\mathbb{R}^2$  (c'est-à-dire elle vérifie la définition (1)), mais ne peut pas s'écrire localement comme le graphe d'une fonction continue (c'est-à-dire elle ne vérifie pas la définition (3)).



(ii) En remplaçant  $\mathbb{R}$  par  $\mathbb{C}$ , et « de classe  $C^k$  » par « analytique complexe », ces définitions sont encore équivalentes, on parle alors de *sous-variété complexe* de dimension (complexe)  $p$  et de codimension (complexe)  $n - p$  dans  $\mathbb{C}^n$ .

Nous donnerons des exemples de sous-variétés dans le paragraphe 1.4, car ce seront aussi des exemples de variétés différentielles, que nous définissons maintenant.

### 1.3 La catégorie des variétés différentielles

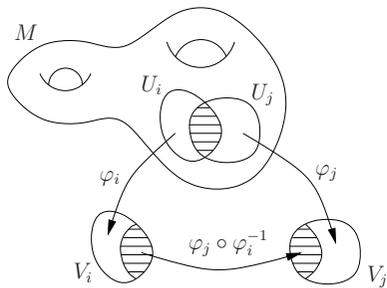
Soient  $k$  dans l'ensemble  $\mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$  (muni de l'ordre  $p \leq \infty \leq \omega$  pour tout  $p$  dans  $\mathbb{N}$ ), et  $n$  dans  $\mathbb{N}$ .

#### • Objets.

Un *atlas de cartes*  $C^k$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  sur un espace topologique  $M$  est un ensemble  $\mathcal{A}$  de couples  $(U, \varphi)$  où  $\varphi : U \rightarrow V = \varphi(U)$  est un homéomorphisme d'un ouvert  $U$  de  $M$  sur un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^n$ , tel que les ouverts  $U$  recouvrent  $M$ , et que pour tous les couples  $(U, \varphi)$  et  $(U', \varphi')$  dans  $\mathcal{A}$ , l'application

$$\varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \rightarrow \varphi'(U \cap U')$$

soit un  $C^k$ -difféomorphisme d'un ouvert de  $\varphi(U)$  sur un ouvert de  $\varphi'(U')$ .



Nous ferons souvent l'abus de noter de la même manière une application et sa restriction à une partie de son domaine de définition. Nous utiliserons souvent par abus des familles indexées  $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ , quitte à indexer les atlas par eux-mêmes.

Un tel couple  $(U_i, \varphi_i)$  (et l'application  $\varphi_i$ ) est appelé une *carte* (ou *carte locale*) de  $\mathcal{A}$  (ou de  $M$  par abus), et une *carte (locale) en  $x$*  si  $x \in U_i$ ; l'ouvert  $U_i$  est appelé le *domaine* de cette carte. L'application  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$  est appelée une *application de transition*, ou un *changement de carte*, de  $\mathcal{A}$  (ou de  $M$  par abus).

**Remarque 1.6** Si dans la définition ci-dessus, nous demandons seulement que les  $U_i$  soient des sous-ensembles de  $M$  et que les  $\varphi_i$  soient des bijections, alors l'existence d'un tel atlas de cartes permet de munir  $M$  d'une unique topologie, pour laquelle les  $U_i$  sont des ouverts, et les  $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$  des homéomorphismes. Cette topologie est la topologie la moins fine (voir l'appendice A.1) rendant continues les cartes, c'est-à-dire une partie  $V$  de  $M$  est déclarée ouverte si et seulement si pour toute carte  $(U, \varphi)$  de  $M$ , la partie  $\varphi(U \cap V)$  est un ouvert de  $\varphi(U)$ . Pour tout espace topologique  $X$ , une application  $f : X \rightarrow M$  est alors continue si et seulement si pour toute carte  $(U, \varphi)$  de  $M$ , l'application  $\varphi \circ f$  est continue. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les  $U_i$  sont ouverts, que les  $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$  sont des homéomorphismes, et que cette topologie est la seule qui convienne. Voir l'exercice E.50 de l'appendice A.1.

**Lemme 1.7** Soit  $M$  un espace topologique. Tout atlas de cartes  $C^k$  de  $M$  est contenu dans un unique atlas de cartes  $C^k$  maximal (pour l'inclusion).

**Démonstration.** Deux atlas de cartes  $C^k$  sont dit  $C^k$ -compatibles si leur réunion est encore un atlas de cartes  $C^k$  (ou de manière équivalente si l'application de transition entre toute carte de l'un et toute carte de l'autre est un  $C^k$ -difféomorphisme). La relation « être  $C^k$ -compatible » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des atlas de cartes  $C^k$ . La réunion de tous les atlas de cartes  $C^k$  qui sont  $C^k$ -compatibles à un atlas de cartes  $C^k$  donné est alors l'unique atlas maximal cherché contenant ce dernier.  $\square$

On appelle *variété différentielle* de classe  $C^k$  et de dimension  $n$  tout espace topologique

- séparé à base dénombrable,
- muni d'un atlas maximal de cartes  $C^k$  (ou de manière équivalente, d'une classe d'équivalence d'atlas de cartes  $C^k$ ), à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

Lorsque  $k$  et  $n$  sont sous-entendus, on parlera de variété différentielle, voire même par abus de *variété*. On dit une *variété lisse* lorsque  $k = \infty$ , et une *variété analytique réelle* lorsque  $k = \omega$ . Lorsque  $n = 1$  (respectivement  $n = 2$ ), on parle de *courbe* (respectivement *surface*), différentielle (lisse si  $k = \infty$ , analytique réelle si  $k = \omega$ ),

et par abus lorsque le contexte est clair, de courbe (respectivement surface) tout court, mais il vaut mieux préciser.

Une variété topologique  $M$  de dimension  $n$  admet un unique atlas de cartes  $C^0$  maximal, l'ensemble de tous les homéomorphismes entre un ouvert de  $M$  et un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Munie de cet atlas,  $M$  est alors une variété différentielle de classe  $C^0$ . Réciproquement, une variété différentielle de classe  $C^0$ , privée de son atlas maximal, est une variété topologique. Nous identifierons ainsi dans la suite de ce texte les variétés différentielles de classe  $C^0$  et les variétés topologiques.

La définition fait sens lorsque l'on remplace  $\mathbb{R}^n$  par un espace de Banach  $\mathcal{H}$ , et l'on parle de *variété modélée sur  $\mathcal{H}$* , ou *variété banachique* lorsque  $\mathcal{H}$  est sous-entendu. Par exemple, si  $\mathcal{H}$  est un espace vectoriel réel de dimension  $n$  muni d'une norme quelconque (elles sont toutes équivalentes), alors en composant un atlas de cartes (maximal) à valeurs dans  $\mathcal{H}$  par n'importe quel isomorphisme linéaire de  $\mathcal{H}$  sur  $\mathbb{R}^n$ , on obtient un atlas de cartes (maximal) à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Le choix de l'isomorphisme linéaire est indifférent, car tout automorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^n$  est analytique réel. Donc une variété de classe  $C^k$  modélée sur un espace vectoriel réel de dimension  $n$ , est naturellement muni d'une structure de variété de classe  $C^k$  de dimension  $n$ , et nous nous autoriserons parfois à définir des atlas de cartes à valeurs dans d'autres espaces vectoriels réels de dimension  $n$  que  $\mathbb{R}^n$ .

Lorsque  $k = \omega$ , on peut remplacer  $\mathbb{R}^n$  par  $\mathbb{C}^n$  (ou par n'importe quel espace vectoriel complexe de dimension  $n$ , car tout automorphisme linéaire de  $\mathbb{C}^n$  est analytique complexe), et demander que les changements de cartes soient analytiques complexes. On parle alors de *variété analytique complexe* (ou *variété holomorphe*) de dimension complexe  $n$ . Une variété analytique complexe  $M$  de dimension complexe  $n$  admet, après oubli de son atlas de cartes holomorphes maximal  $\mathcal{A}$ , une structure de variété analytique réelle (dite obtenue par *appauvrissement de structure* et encore notée  $M$ ) de dimension réelle  $2n$ , en la munissant de l'atlas de cartes  $C^\omega$  maximal contenant  $\mathcal{A}$ .

Soit  $K$  un corps local (c'est-à-dire une extension finie du corps  $\mathbb{Q}_p$  des nombres  $p$ -adiques, ou le corps  $\mathbb{F}_q((X))$  des séries formelles de Laurent en une indéterminée sur le corps fini  $\mathbb{F}_q$  à  $q$  éléments, munis de leur valeur absolue, voir [Ser1]). Lorsque  $k = \omega$ , on peut remplacer  $\mathbb{R}^n$  par  $K^n$  dans la définition ci-dessus, en demandant que les changements de cartes soient analytiques sur  $K$ . On parle alors de *variété analytique rigide*, voir [Sch, Rob, FP] pour plus d'informations.

Une variété différentielle, si l'on oublie qu'elle est munie d'un atlas maximal, est en particulier une variété topologique. On peut remplacer « séparé à base dénombrable » par « métrisable séparable », ou « dénombrable à l'infini », ou « paracompact séparable » dans la définition de variété différentielle, par la proposition 1.2 et l'alinéa suivant l'exercice E.2.

Tout atlas de cartes  $C^k$  d'un espace topologique est aussi un atlas de cartes  $C^{k'}$  pour  $k' \leq k$ . Si  $M$  est une variété différentielle  $C^k$ , d'atlas maximal  $\mathcal{A}$ , alors l'espace topologique  $M$  peut être, et sera, muni d'une structure de variété différentielle  $C^{k'}$  (dite obtenue par *appauvrissement de structure*, et notée par abus de la même manière), en munissant  $M$  de l'atlas maximal de cartes  $C^{k'}$  contenant  $\mathcal{A}$ .

• **Flèches.**

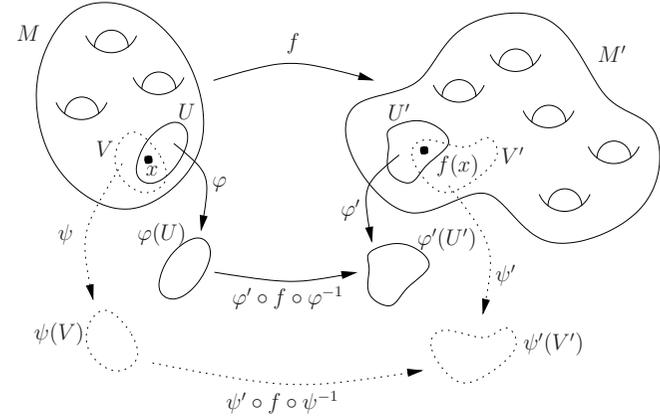
Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $M, M'$  deux variétés  $C^k$  (par exemple obtenues par appauvrissement des structures de deux variétés  $M, M'$  de classe  $C^{k'}, C^{k''}$  avec  $k', k'' \geq k$ ) et  $f : M \rightarrow M'$  une application.

Soient  $(U, \varphi)$  et  $(U', \varphi')$  des cartes de  $M$  et  $M'$  respectivement ; l'application

$$\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(U')) \rightarrow \varphi'(U')$$

s'appelle *l'application  $f$  lue dans les cartes  $(U, \varphi)$  et  $(U', \varphi')$* .

L'application  $f$  est dite *de classe  $C^k$*  en un point  $x$  de  $M$  s'il existe des cartes  $(U, \varphi)$  et  $(U', \varphi')$  de  $M$  et  $M'$  en  $x$  et  $f(x)$  respectivement, telles que  $f(U) \subset U'$  et que l'application  $f$  lue dans les cartes  $(U, \varphi)$  et  $(U', \varphi')$  soit de classe  $C^k$  en  $\varphi(x)$ .



Par le théorème de composition des applications différentiables, l'application  $f$  est de classe  $C^k$  en un point  $x$  de  $M$  si et seulement si elle est continue en  $x$  et si pour toutes les cartes  $(U, \varphi)$  et  $(U', \varphi')$  de  $M$  et  $M'$  en  $x$  et  $f(x)$  respectivement, l'application  $f$  lue dans ces cartes est de classe  $C^k$  en  $\varphi(x)$ .

Notons que si  $k > 0$ , le rang (voir l'appendice A.3) de l'application lue dans des cartes en l'image de  $x$  ne dépend pas de ces cartes, et sera donc appelé le *rang* de  $f$  en  $x$ .

On dit qu'une application  $f : M \rightarrow M'$  est *de classe  $C^k$*  si elle est de classe  $C^k$  en tout point de  $M$ . Une application de classe  $C^k$  est en particulier continue. On note  $C^k(M, M')$  l'ensemble des applications de classe  $C^k$  de  $M$  dans  $M'$ . Si  $0 \leq k' \leq k$ , alors  $C^k(M, M') \subset C^{k'}(M, M')$ .

Le théorème de composition des applications différentiables s'étend aux variétés différentielles : si  $M, M', M''$  sont trois variétés  $C^k$ , et si  $f : M \rightarrow M'$  et  $g : M' \rightarrow M''$  sont des applications de classe  $C^k$  en  $x$  et en  $f(x)$  respectivement, alors  $g \circ f : M \rightarrow M''$  est de classe  $C^k$  en  $x$ ; donc si  $f : M \rightarrow M', g : M' \rightarrow M''$  sont des applications

de classe  $C^k$ , alors  $g \circ f : M \rightarrow M''$  est de classe  $C^k$ . Ceci découle immédiatement du cas des ouverts des espaces  $\mathbb{R}^n$  en considérant des applications lues dans des cartes.

Pour  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$  (munis de leur structure de variété  $C^k$  évidente, voir paragraphe 1.4.1), l'ensemble  $C^k(M, K)$  est une sous-algèbre de la  $K$ -algèbre de toutes les applications de  $M$  dans  $K$  (munie des opérations d'addition et de multiplications points par points).

La collection des variétés  $C^k$ , la collection des ensembles d'applications  $C^k$  entre deux variétés  $C^k$ , les applications identités des variétés  $C^k$  et la composition des applications  $C^k$  forment donc une catégorie (voir l'appendice A.6).

Soit  $f : M \rightarrow M'$  une application de classe  $C^k$ . Nous renvoyons à l'appendice A.3 pour des rappels de terminologie du calcul différentiel.

On dit que  $f$  est un  $C^k$ -difféomorphisme (ou difféomorphisme tout court lorsque  $k$  est sous-entendu – dans les exercices et en pratique,  $k = \infty$  est souvent sous-entendu) si  $f$  est bijective et si son inverse est aussi de classe  $C^k$ . Remarquons que  $f$  est de classe  $C^0$  si et seulement si elle est continue, et que  $f$  est un  $C^0$ -difféomorphisme si et seulement si  $f$  est un homéomorphisme. Deux variétés différentielles de classe  $C^k$  sont dites  $C^k$ -difféomorphes (ou *isomorphes* lorsque  $k$  est sous-entendu) s'il existe un  $C^k$ -difféomorphisme de l'une dans l'autre.

Si  $x \in M$ , on dit que  $f$  est une *immersion* en  $x$  si  $k > 0$  et s'il existe des cartes locales en  $x$  et en  $f(x)$  telles que l'application  $f$  lue dans ces cartes soit une immersion en l'image de  $x$ . Ceci ne dépend pas des cartes locales choisies en  $x$  et  $f(x)$ . On dit que  $f$  est une *immersion* si  $f$  est une immersion en tout point de  $M$ . On définit de même une *submersion en un point*, une *submersion*, une *application de rang constant* au voisinage d'un point, et une *application de rang constant* (aussi appelée *subimmersion*). Remarquons que la composée de deux immersions est une immersion, que la composée de deux submersions est une submersion, mais que la composée de deux applications de rang constant n'est pas forcément de rang constant.

Les définitions précédentes s'étendent aussi au cas où  $M$  et  $M'$  sont des variétés analytiques complexes. En particulier, une application continue  $f : M \rightarrow M'$  est dite *analytique complexe* ou *holomorphe* si les applications lues dans les cartes le sont.

Les corollaires A.5, A.6 et A.7 de l'appendice, donnant des formes normales locales des immersions, submersions et applications de rang constant, sont des résultats locaux, donc on obtient immédiatement leur extension pour les variétés :

**Théorème 1.8** Soient  $M, N$  deux variétés de classe  $C^k$  de dimensions  $p, q$ , soit  $x$  un point de  $M$  et  $f : M \rightarrow N$  une application de classe  $C^k$ .

**(Forme normale locale des immersions)** Si  $f$  est une immersion en  $x$ , alors pour toute carte locale  $\varphi$  en  $x$  telle que  $\varphi(x) = 0$ , il existe une carte locale  $\psi$  en  $f(x)$  avec  $\psi(f(x)) = 0$  telle que, au voisinage de 0, on ait

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0).$$

**(Forme normale locale des submersions)** Si  $f$  est une submersion en  $x$ , alors pour toute carte locale  $\psi$  en  $f(x)$  telle que  $\psi(f(x)) = 0$ , il existe une carte locale  $\varphi$  en  $x$  avec  $\varphi(x) = 0$ , telle que, au voisinage de 0, on ait

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_q).$$

**(Forme normale locale des applications de rang constant)** Si  $f$  est une application de rang constant  $r \leq \min\{p, q\}$  sur un voisinage de  $x$ , alors il existe une carte locale  $\psi$  en  $f(x)$  avec  $\psi(f(x)) = 0$  et une carte locale  $\varphi$  en  $x$  avec  $\varphi(x) = 0$ , telles que, au voisinage de 0, on ait

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0). \quad \square$$

Comme tout recouvrement ouvert d'une variété différentielle admet un recouvrement plus fin formé de domaines de cartes, et par une démonstration analogue, la proposition 1.3 d'existence de partition de l'unité s'étend pour donner des partitions de l'unités de classe  $C^k$  (c'est-à-dire dont chaque application est de classe  $C^k$ ), pour  $k$  dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Attention ce résultat n'est pas valable en analytique réel (ni complexe), le lemme clef 1.4 n'étant plus vérifié.

**Proposition 1.9** Soient  $k$  dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , et  $M$  une variété de classe  $C^k$ . Tout recouvrement ouvert de  $M$  admet une partition de l'unité de classe  $C^k$  qui lui est subordonnée. Si de plus  $M$  est compacte, alors tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini et une partition de l'unité finie de classe  $C^k$  qui est subordonnée à ce sous-recouvrement.  $\square$

## • Le point de vue des faisceaux

Le point de vue des faisceaux, ou point de vue fonctionnel, défend l'idée que bien comprendre un objet, c'est bien comprendre les fonctions qui sont définies sur cet objet. Ainsi Platon dans sa caverne aurait-il pu penser à faire varier les sources d'éclairages pour étudier un objet par ses ombres projetées.

Soit  $X$  un espace topologique. Un *faisceau d'espaces vectoriels de fonctions réelles* sur  $X$  (ou par abus *faisceau* dans ce qui suit) est la donnée, notée  $\mathcal{F}$ , pour tout ouvert  $U$  de  $X$  d'un sous-espace vectoriel  $\mathcal{F}(U)$  de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^U$  des fonctions réelles sur  $U$ , telle que

- (1) pour tous les ouverts  $U \subset V$ , l'application de restriction  $\varphi \mapsto \varphi|_U$  de  $\mathbb{R}^V$  dans  $\mathbb{R}^U$  envoie  $\mathcal{F}(V)$  dans  $\mathcal{F}(U)$ ,
- (2) pour toute famille d'ouverts  $(U_i)_{i \in I}$  de  $X$  de réunion  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ , si  $(f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i)$  vérifie la condition de compatibilité

$$\forall i, j \in I, \quad f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j},$$

alors l'unique  $f$  dans  $\mathbb{R}^U$  tel que  $f|_{U_i} = f_i$  appartient à  $\mathcal{F}(U)$ .

La première condition s'appelle la *stabilité par restriction*. La seconde condition s'appelle la *condition de localité*. Elle est présente pour donner du sens au fait que les fonctions qui vont nous intéresser sont celles dont la définition est « locale ». Par exemple, si, pour tout ouvert  $U$ , on note  $C_X^0(U) = C^0(U, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur  $U$ , alors  $C_X^0$  est un faisceau. Si  $X$  est une variété différentielle de classe  $C^k$ , si  $C_X^k(U)$  est l'espace vectoriel des applications réelles de classe  $C^k$ , de  $U$  (muni de sa structure de variété  $C^k$  évidente, voir le paragraphe 1.4.2) dans  $\mathbb{R}$ , pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , alors  $C_X^k$  est un faisceau. Si  $X$  est une variété holomorphe, si  $C_X(U)$  est l'espace vectoriel des applications holomorphes de  $U$  dans  $\mathbb{C}$ , alors  $C_X$  est un faisceau d'espaces vectoriels de fonctions complexes (pour la définition évidente analogue au cas réel).

C'est parce que le fait d'être continu ou d'être de classe  $C^k$  est une propriété locale que ces exemples sont bien des faisceaux. Par contre, si  $X = \mathbb{R}$  et si  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ , alors  $U \mapsto \mathbb{L}^1(U, \lambda|_U)$  n'est pas un faisceau d'espaces vectoriels de fonctions réelles sur  $X$ , car l'intégrabilité n'est pas une notion locale. Nous renvoyons par exemple à [Godel] pour une étude plus approfondie des faisceaux.

Soient  $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$  deux faisceaux sur des espaces topologiques  $X, X'$ . Un *isomorphisme* de  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{F}'$  est un homéomorphisme  $\psi : X \rightarrow X'$  tel que, pour tout ouvert  $U$  de  $X'$ , l'application  $f \mapsto f \circ \psi$  soit un isomorphisme d'espaces vectoriels de  $\mathcal{F}'(U)$  sur  $\mathcal{F}(\psi^{-1}(U))$ . Si  $\psi$  est un isomorphisme de  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{F}'$ , alors  $\psi^{-1}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{F}'$  sur  $\mathcal{F}$ . Les faisceaux  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  sont dits *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de l'un dans l'autre.

Si  $\Omega$  est un ouvert de  $X$ , et si  $\mathcal{F}$  est un faisceau, alors en posant  $\mathcal{F}|_\Omega(U) = \mathcal{F}(U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $\Omega$ , on obtient un faisceau  $\mathcal{F}|_\Omega$  d'espaces vectoriels de fonctions réelles sur  $\Omega$ .

Par exemple, si  $M$  est une variété différentielle de classe  $C^k$  et de dimension  $n$ , et  $(U, \varphi)$  une carte de  $M$ , alors  $\varphi$  est un isomorphisme de  $C_{M|U}^k$  dans  $C_{\mathbb{R}^n|\varphi(U)}^k$ . Ainsi,  $(M, C_M^k)$  est *localement isomorphe* (en un sens évident que nous n'explicitons pas ici) à  $(\mathbb{R}^n, C_{\mathbb{R}^n}^k)$ .

**Remarque 1.10** Soient  $M, N$  deux variétés différentielles de classe  $C^k$ , et  $f : M \rightarrow N$  une application continue. Alors  $f$  est de classe  $C^k$  si et seulement si, pour tout ouvert  $U$  de  $N$  et pour tout  $\sigma$  dans  $C_N^k(U)$ , l'application  $f^*\sigma = \sigma \circ f$  appartient à  $C_M^k(f^{-1}(U))$ .

En effet, le sens direct découle de la composition des applications  $C^k$ . Le sens réciproque découle, en prenant des cartes locales, du fait qu'une application d'un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^q$  est  $C^k$  si ses composantes le sont.

Ainsi, les  $C^k$ -difféomorphismes de  $M$  vers  $N$  sont exactement les isomorphismes de  $(M, C_M^k)$  sur  $(N, C_N^k)$ , et deux variétés  $C^k$  sont  $C^k$ -difféomorphes si et seulement si leurs faisceaux de fonctions  $C^k$  sont isomorphes. En particulier, si  $M$  est de dimension  $n$ , alors les cartes  $C^k$  de  $M$  sont exactement les isomorphismes entre des couples  $(U, C_{M|U}^k)$  et  $(V, C_V^k)$  pour  $U$  un ouvert de  $M$  et  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

**Remarque 1.11** Si  $X$  est un espace topologique séparé à base dénombrable et si  $\mathcal{F}$  est un faisceau sur  $X$  tel que  $(X, \mathcal{F})$  soit localement isomorphe à  $(\mathbb{R}^n, C_{\mathbb{R}^n}^k)$ , alors il existe une unique structure de variété  $C^k$  sur  $X$  telle que  $\mathcal{F} = C_X^k$ .

En effet, l'ensemble des couples  $(U, \varphi)$ , avec  $U$  un ouvert de  $X$  et  $\varphi$  un isomorphisme de  $(U, \mathcal{F}|_U)$  sur  $(V, C_{\mathbb{R}^n|V}^k)$  pour  $V$  un certain ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , forme un atlas de cartes  $C^k$  sur  $X$ , et la structure de variété  $C^k$  sur  $X$  définie par cet atlas convient.

On peut donc définir une variété  $C^k$  de dimension  $n$  comme un espace topologique  $X$  séparé à base dénombrable muni d'un faisceau  $\mathcal{F}$  tel que  $(X, \mathcal{F})$  soit localement isomorphe à  $(\mathbb{R}^n, C_{\mathbb{R}^n}^k)$ .

Par exemple, si  $N$  est une partie localement fermée d'une variété  $M$  de classe  $C^k$ , alors on peut définir un faisceau  $\mathcal{F}_N$  sur l'espace topologique  $N$ , où, pour tout ouvert  $\Omega$  de  $N$ , l'espace vectoriel  $\mathcal{F}_N(\Omega)$  est l'espace des applications de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ , qui sont localement sur  $N$  restriction d'une application  $C^k$  réelle sur un ouvert de  $M$ .

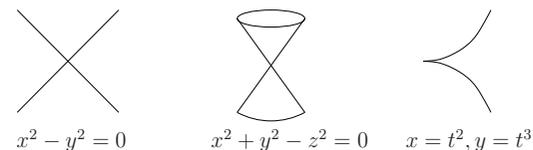
**Exercice E.6** Avec les notations ci-dessus, et la définition de sous-variété du paragraphe 1.4.2 suivant, montrer que le couple  $(N, \mathcal{F}_N)$  est une variété  $C^k$  si et seulement si  $N$  est une sous-variété  $C^k$  de  $M$ . De plus, si ces conditions sont réalisées, montrer que  $\mathcal{F}_N = C_N^k$ .

## 1.4 Exemples de variétés différentielles

### 1.4.1 Exemples triviaux, contre-exemples et culture

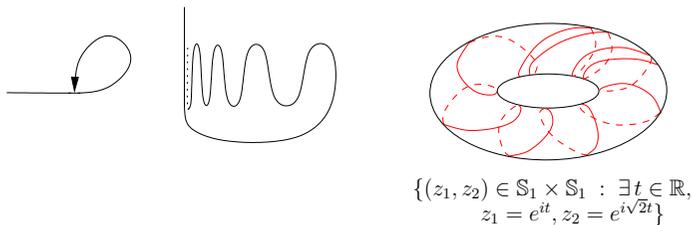
Commençons par donner des exemples d'espaces topologiques qui ne sont pas des (sous)-variétés différentielles.

La démonstration du fait que chacun des exemples ci-dessous n'est pas une sous-variété différentielle  $C^1$  est laissée au lecteur. (Par contre, le dessin de droite est une sous-variété topologique du plan.)



Alors que la préimage d'un point par une submersion est une sous-variété (voir le corollaire 1.22), il n'est pas vrai que l'image d'une immersion (même injective) est une sous-variété. Chaque dessin ci-dessous représente une *sous-variété immergée*, c'est-à-dire l'image d'une variété par une immersion injective dans une variété (attention à la terminologie, une sous-variété immergée n'est pas toujours une sous-variété). La démonstration du fait qu'aucune d'entre elles n'est une sous-variété différentielle  $C^1$  est laissée au lecteur. Mais notons que la raison pour laquelle l'exemple de

gauche ci-dessous n'est pas une variété est la même que celle pour laquelle l'exemple de gauche ci-dessus ne l'est pas, et qu'une sous-variété différentielle est en particulier localement fermée (voir la remarque 1.15).



Passons aux exemples triviaux. Tout espace topologique discret dénombrable  $M$  admet une unique structure de variété  $C^k$  (qui est de dimension 0) : l'atlas maximal (indépendant de  $k$ ) est l'ensemble des (uniques) applications des singletons de  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ . Dans ce texte, tout espace topologique discret dénombrable sera muni de cette structure de variété différentielle.

Tout ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  admet une structure de variété différentielle de classe  $C^\omega$ , pour l'atlas  $C^\omega$  maximal contenant l'application identité de l'espace topologique  $U$  dans l'ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Bien sûr cet exemple est trivial, mais on peut remplacer  $\mathbb{R}^n$  par n'importe quel espace vectoriel réel  $E$  de dimension  $n$ , celui-ci étant (sauf mention contraire) muni dans ce texte de la topologie définie par n'importe laquelle de ses normes. Ainsi, tout ouvert  $V$  de  $E$  admet une structure naturelle de variété  $C^\omega$  modelée sur  $E$ . La structure de variété  $C^\omega$  obtenue sur  $V$  est celle dont l'atlas est l'atlas maximal contenant la restriction à  $V$  de n'importe quel isomorphisme linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{R}^n$ . De même, tout ouvert de  $\mathbb{C}^n$ , ou de n'importe quel espace vectoriel complexe de dimension finie, admet une structure de variété analytique complexe. Sauf mention explicite du contraire, un ouvert dans un tel espace vectoriel sera muni de cette structure de variété différentielle, dite *standard*.

Par exemple, les ouverts  $GL_n(\mathbb{R})$  et  $GL_n(\mathbb{C})$  des espaces vectoriels réels de matrices  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  respectivement sont des variétés différentielles de classe  $C^\omega$  (et  $GL_n(\mathbb{C})$  est aussi une variété analytique complexe en tant qu'ouvert de l'espace vectoriel complexe  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ).

Soit  $M$  un espace topologique séparé et à base dénombrable. Le groupe noté  $\text{Homeo}(M)$  des homéomorphismes  $f$  de  $M$  agit sur l'ensemble des structures de variétés différentielles de classe  $C^k$  sur  $M$ , en associant à l'atlas de cartes  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  l'atlas  $(f^{-1}(U_i), \varphi_i \circ f)_{i \in I}$  (qui vérifie clairement les conditions voulues). Par définition d'un isomorphisme de variété  $C^k$ , deux structures de variétés  $C^k$  sur  $M$  sont isomorphes si et seulement si elles sont dans la même orbite de  $\text{Homeo}(M)$  pour cette action. En terme de faisceaux, c'est un cas particulier du fait que le groupe des homéomorphismes d'un espace topologique, qui agit de manière évidente sur la

collection des faisceaux d'espaces vectoriels de fonctions réelles sur  $X$ , préserve les faisceaux localement isomorphes au faisceau  $(\mathbb{R}^n, C_{\mathbb{R}^n}^k)$ .

Une orbite de cette action de  $\text{Homeo}(M)$  est souvent non dénombrable. Par exemple, considérons la variété différentielle  $C^1$  standard  $\mathbb{R}$ . L'homéomorphisme  $t \mapsto t^3$  de  $\mathbb{R}$  envoie la structure usuelle sur une structure différentielle  $C^1$  différente sur  $\mathbb{R}$ . Une variation sur cet exemple montre qu'il existe un ensemble non dénombrable de structures (deux à deux distinctes) de variété analytique réelle sur  $\mathbb{R}$ . Par contre pour tout  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ , le groupe  $\text{Homeo}(\mathbb{R})$  agit transitivement sur l'ensemble des structures de variété différentielle  $C^k$  sur  $\mathbb{R}$  (voir l'exercice E.7 et le théorème 1.12 suivants).

**Exercice E.7** *Montrer qu'il n'existe, à difféomorphisme analytique réel près, qu'une et une seule structure analytique réelle sur une variété topologique de dimension 1.*

Enfin, concluons ce paragraphe en donnant quelques résultats de culture générale, dont nous n'aurons pas besoin dans ce cours, mais qu'il est utile de connaître pour éviter les pièges.

Le premier résultat, pour lequel nous renvoyons à [Hir, Chap. 2], dit que le problème de classification des variétés  $C^1$  ou analytiques réelles est le même.

**Théorème 1.12** (Voir par exemple [Hir]) *Soient  $k \leq k'$  dans  $(\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$ . Toute variété de classe  $C^k$  est  $C^k$ -difféomorphe à une variété de classe  $C^{k'}$ . Si deux variétés de classe  $C^{k'}$  sont  $C^k$ -difféomorphes, alors elles sont  $C^{k'}$ -difféomorphes.  $\square$*

Ceci justifie a priori que nous nous intéressons dans ce cours surtout aux variétés lisses. Mais cela ne veut pas dire que la notion d'application  $C^k$  avec  $k < \infty$  n'a pas d'intérêt ! Certains problèmes de systèmes dynamiques, par exemple concernant l'itération d'applications  $C^k$ , ou de feuilletages  $C^k$  (au sens du paragraphe 3.8), ont des comportements très différents suivant leur degré  $k$  de différentiabilité (voir par exemple [Arn, page 105] [KH]). La démonstration du théorème 1.12 est très différente suivant que l'on regarde le cas analytique réel ou pas. En particulier elle est beaucoup plus difficile si  $k' = \omega$ , par l'absence de partitions de l'unité en analytique réel.

Comme le montre le résultat ci-dessous, en petite dimension (voir par exemple [Moi]), il n'y a pas de différence entre la classification des variétés topologiques et celle des variétés lisses.

Mais le tore (c'est-à-dire l'espace topologique produit  $S_1 \times S_1$  de deux copies du cercle), qui n'admet à isomorphisme près qu'une seule structure de variété analytique réelle de dimension (réelle) 2, possède une infinité non dénombrable de structures de variété analytique complexe de dimension (complexe) 1 deux à deux non isomorphes, voir par exemple [Rey] : par exemple les variétés analytiques complexes quotients (au sens de la partie 1.4.2)  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[\tau]$  et  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[\tau']$  pour  $\text{Im } \tau, \text{Im } \tau' > 0$  sont isomorphes si et seulement si  $\tau = \gamma\tau'$  pour  $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ , où  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  agit par homographies

$$\left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

sur le demi-plan supérieur de  $\mathbb{C}$ .

**Théorème 1.13** (Voir par exemple [Moi]) Toute variété topologique de dimension 2 ou 3 admet une structure de variété analytique réelle. Deux variétés analytiques réelles de dimension 2 ou 3, qui sont homéomorphes, sont  $C^\omega$ -difféomorphes.  $\square$

Par contre, il existe des variétés topologiques qui n'admettent pas de structure de variété  $C^1$  (voir par exemple [Kerv]). Il existe aussi de nombreuses variétés topologiques qui admettent des structures  $C^1$  (donc des structures analytiques réelles) non isomorphes.

Par exemple, voici pour  $n \leq 18$  le nombre  $\kappa(n)$  de classes d'isomorphisme de structures différentiables  $C^1$  (donc de classes d'isomorphisme de structures analytiques réelles) sur l'espace topologique  $\mathbb{S}_n$  (la sphère unité de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ), voir [KeM] :

$n$	$\leq 6$	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\kappa(n)$	1	28	2	9	6	992	1	3	2	16256	2	16	16

Dès la dimension 4, la classification des variétés topologiques et celle des variétés lisses différent. Voir par exemple [Fre] et [Gom], cette dernière référence construisant des structures différentielles sur  $\mathbb{R}^4$  non isomorphes à la structure différentielle standard de  $\mathbb{R}^4$ .

En dimension 1, une classification des variétés topologiques (à homéomorphisme près) est un exercice (voir l'exercice E.1).

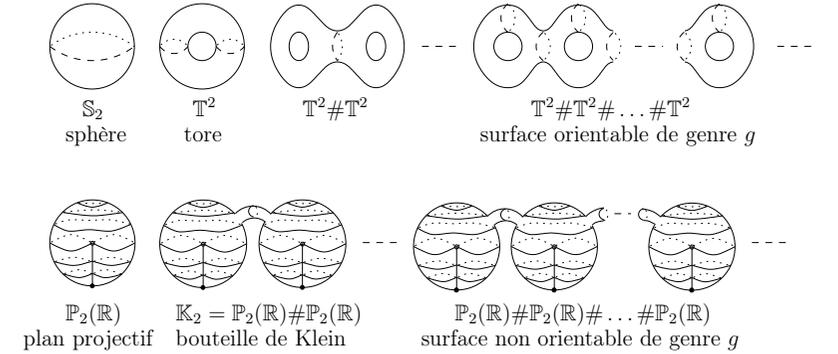
En dimension 2, une classification des surfaces topologiques (à homéomorphisme près) est bien connue (voir par exemple [Gra] [Hir, Chap. 9] [Moi] et surtout [Rey] pour le cas compact, et [Kere, Ric] pour le cas général). Nous donnons ci-dessous la classification (topologique, donc différentiable d'après le théorème 1.13) des surfaces compactes connexes, après une définition.

Soient  $M, M'$  deux variétés topologiques connexes de dimension  $n \geq 1$ . Notons  $B$  la boule unité ouverte de  $\mathbb{R}^n$ , et  $B_{\frac{1}{2}}$  la boule ouverte concentrique de rayon moitié, de bord  $S_{\frac{1}{2}}$ . Soient  $\varphi : B \rightarrow M, \varphi' : B \rightarrow M'$  deux homéomorphismes sur leur image, et  $f : \varphi(S_{\frac{1}{2}}) \rightarrow \varphi'(S_{\frac{1}{2}})$  la restriction de  $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ . On appelle *somme connexe* de  $M$  et  $M'$  l'espace topologique obtenu par recollement de  $M - \varphi(B_{\frac{1}{2}})$  et de  $M' - \varphi(B'_{\frac{1}{2}})$  par  $f$  (voir l'appendice A.1 pour une définition) :

$$M \# M' = (M - \varphi(B_{\frac{1}{2}})) \amalg_f (M' - \varphi(B'_{\frac{1}{2}})) .$$

Il est facile de voir que  $M \# M'$  est une variété topologique de dimension  $n$ . On montre qu'à homéomorphisme près, elle ne dépend pas du choix de  $\varphi, \varphi'$ , et que la somme connexe de  $M$  avec la sphère  $\mathbb{S}_n$  est homéomorphe à  $M$ . Donc sur l'ensemble des classes d'homéomorphisme de variétés topologiques de dimension  $n$ , la somme connexe induit une opération associative et commutative, admettant la classe de la sphère  $\mathbb{S}_n$  comme élément neutre. Par convention, la somme connexe de  $k$  copies de  $M$  est  $M$  si  $k = 1$ , et  $\mathbb{S}_n$  si  $k = 0$ . Nous renvoyons au paragraphe 1.4.3 pour la définition du tore  $\mathbb{T}^2$  et du plan projectif réel  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , et leurs représentations graphiques.

**Théorème 1.14** (Voir par exemple [Rey]) Toute surface topologique compacte connexe est homéomorphe à la somme connexe de  $g \geq 0$  copies du tore  $\mathbb{T}^2$  ou à la somme connexe de  $g \geq 1$  copies du plan projectif réel  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , et deux telles surfaces ne sont pas homéomorphes.  $\square$



En dimension 3, une classification des variétés topologiques (à homéomorphisme près) est toujours ouverte. Nous renvoyons à l'excellent article de survol de J. Milnor [Mil2] pour un état de l'art concernant cette classification, des travaux de Poincaré à ceux de Perelman, en passant par les résultats de Thurston. Nous renvoyons par exemple à [KIL, BBBMP10, MorTia14] pour des démonstrations de la conjecture de géométrisation de Thurston permettant de décrire les variétés topologiques compactes de dimension 3.

#### 1.4.2 Exemples familiaux

Nous donnons dans ce paragraphe quelques grandes méthodes pour construire des variétés différentielles, qui produisent souvent des familles intéressantes de tels objets. Nous étudierons les grandes classes ensemblistes des sous-ensembles, images directes, images réciproques, somme, produit, quotient.

• **Sous-variétés.** Soient  $k \leq k'$  dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ ,  $p$  dans  $\mathbb{N}$  et  $M$  une variété  $C^{k'}$ . Une partie  $N$  de  $M$  est une *sous-variété*  $C^k$  de dimension  $p$  de  $M$  si pour tout  $x$  dans  $N$  et pour toute carte locale  $(U, \varphi)$  de classe  $C^k$  de  $M$  en  $x$ , le sous-espace  $\varphi(U \cap N)$  est une sous-variété (au sens du paragraphe 1.2) de classe  $C^k$  et de dimension  $p$  de  $\varphi(U)$  au voisinage de  $\varphi(x)$ . Il suffit en fait de demander l'existence d'au moins une telle carte locale. Si  $M$  est de dimension  $n$ , on dit alors que la sous-variété  $N$  est de *codimension*  $n - p$ .

Par exemple, les ouverts d'une variété sont des sous-variétés, et les sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$  (au sens du paragraphe 1.2) sont des sous-variétés de la variété  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercice E.8** Quelles sont les sous-variétés de dimension  $n$  de  $\mathbb{R}^n$  ?

**Remarque 1.15** Une sous-variété  $N$  d'une variété  $M$  est localement fermée dans  $M$  (c'est-à-dire tout point de  $N$  admet un voisinage  $U$  dans  $M$  tel que  $N \cap U$  soit fermé dans  $U$ , voir l'appendice A.1 et l'exercice E.49).

En effet,  $\mathbb{R}^p \times \{0\}$  est (localement) fermé dans  $\mathbb{R}^n$ , et la propriété est invariante par homéomorphismes (locaux), donc cette remarque est immédiate avec la définition par redressement des sous-variétés (si  $k > 0$ , c'est encore plus évident en utilisant la définition par fonctions implicites.) Par contre, une sous-variété n'est en général pas fermée (penser à un intervalle ouvert borné non vide dans  $\mathbb{R}$ ).

Les couples  $(U \cap N, \varphi|_{U \cap N})$ , avec  $U$  un ouvert de  $M$  et  $\varphi$  une carte de classe  $C^k$  de  $M$  telle que  $\varphi(U \cap N)$  soit contenu dans  $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ , forment alors (par le théorème 1.5) un atlas de cartes  $C^k$  de  $N$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$  (après identification évidente de  $\mathbb{R}^p$  et de  $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ ). Notons qu'un sous-espace topologique d'un espace topologique séparé et à base dénombrable l'est encore. Si  $k > 0$ , si  $M = \mathbb{R}^n$  et si  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  est l'ensemble des paramétrages locaux  $C^k$  de  $N$ , alors  $((\varphi_\alpha(U_\alpha), \varphi_\alpha^{-1}))_{\alpha \in A}$  est un atlas de cartes sur  $N$ , qui est  $C^k$ -compatible au précédent, donc définit la même structure de variété  $C^k$  sur  $N$ .

Nous munirons toujours une sous-variété  $C^k$  de cette structure de variété différentielle de classe  $C^k$ , dite *standard*. Cette structure de variété différentielle de classe  $C^k$  est uniquement caractérisée par la propriété universelle suivante (voir aussi l'exercice E.6).

**Proposition 1.16** Soient  $k$  dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ ,  $M$  une variété  $C^k$ ,  $N$  une sous-variété  $C^k$  de  $M$  et  $i : N \rightarrow M$  l'inclusion. Alors  $i$  est une immersion injective de classe  $C^k$ , et la structure de variété différentielle  $C^k$  sur  $N$  ci-dessus est l'unique structure de variété différentielle sur  $N$  vérifiant la propriété suivante :

pour toute variété  $P$  de classe  $C^k$ , une application  $f : P \rightarrow N$  est de classe  $C^k$  si et seulement si  $i \circ f : P \rightarrow M$  l'est.

**Démonstration.** Pour toute telle structure de variété différentielle sur  $N$ , cette propriété universelle, appliquée à l'application identité de  $N$  dans  $N$ , implique que  $i$  est  $C^k$ . L'unicité se montre, comme souvent pour les propriétés universelles, en considérant l'application identité de  $N$  dans  $N$ , et en munissant la source d'une telle structure et le but d'une autre telle structure, la propriété universelle disant qu'elle est de classe  $C^k$  car  $i : N \rightarrow M$  l'est, et donc par symétrie, un  $C^k$ -difféomorphisme, donc les structures coïncident.

Le fait que la structure construite vérifie cette propriété universelle, ainsi que le fait que  $i$  soit une immersion, est évident, en prenant des cartes locales.  $\square$

**Exercice E.9** Montrer que si  $N$  est une sous-variété  $C^k$  de  $M$ , si  $P$  est une variété  $C^k$ , et si  $f : N \rightarrow P$  est la restriction d'une application  $C^k$  d'un voisinage ouvert de  $N$  dans  $M$ , alors  $f$  est  $C^k$ .

Il est immédiat que toute sous-variété d'une sous-variété de  $M$  est une sous-variété de  $M$ . Comme cas particulier du fait que toute sous-variété  $C^k$  d'une variété  $C^k$  est une variété  $C^k$ , toute sous-variété  $C^k$  d'un espace  $\mathbb{R}^n$  est une variété différentielle de classe  $C^k$ . En fait, la réciproque de ce résultat est vraie, voir ci-dessous après quelques définitions.

• **Plongements.** Soient  $k$  dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$  et  $M, N$  deux variétés  $C^k$ . Une application  $f$  de  $M$  dans  $N$  est un  $C^k$ -*plongement* (ou plongement tout court quand le degré de différentiabilité est sous-entendu) si

- $f : M \rightarrow f(M)$  est un homéomorphisme (où  $f(M)$  est muni de la topologie induite) et,
- lorsque  $k > 0$ , l'application  $f$  est une immersion  $C^k$ .

Attention, il y a bien deux conditions dans cette définition, et les exemples 1.4.1 montrent qu'une immersion injective n'est en général pas un plongement, la demande que  $f$  soit un homéomorphisme sur son image est cruciale. Attention, l'image d'un plongement n'est pas toujours fermée. Par exemple, l'application d'inclusion d'un intervalle ouvert borné non vide dans  $\mathbb{R}$  est un plongement d'image non fermée.

Nous renvoyons à l'appendice A.1 pour la définition d'une application propre et ses propriétés, dont le résultat suivant découle immédiatement.

**Proposition 1.17** Soient  $M$  et  $N$  deux variétés de classe  $C^k$ . Toute immersion  $C^k$  (application continue si  $k = 0$ ) injective et propre de  $M$  dans  $N$  est un homéomorphisme sur son image, donc un  $C^k$ -plongement, d'image fermée. En particulier, si  $M$  est compacte, toute immersion  $C^k$  (application continue si  $k = 0$ ) injective de  $M$  dans  $N$  est un  $C^k$ -plongement.  $\square$

La proposition suivante dit en particulier que l'image d'une variété par un plongement  $C^k$  avec  $k > 0$  est une sous-variété, donc une variété.

**Proposition 1.18** Soient  $M, N$  deux variétés  $C^k$ , avec  $k \geq 1$ . Une application  $f$  de  $M$  dans  $N$  est un  $C^k$ -plongement si et seulement si

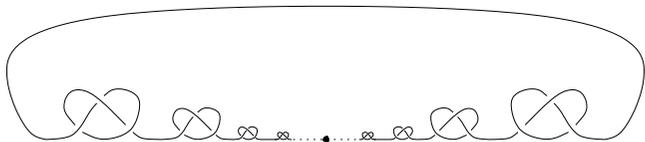
- (1)  $f(M)$  est une sous-variété  $C^k$  de  $N$ , et
- (2)  $f : M \rightarrow f(M)$  est un  $C^k$ -difféomorphisme.

**Démonstration.** Comme l'injection d'une sous-variété  $C^k$  de  $N$  dans  $N$  est une immersion  $C^k$ , il est immédiat que si ces deux conditions sont vérifiées, alors  $f$  est un  $C^k$ -plongement. Réciproquement, soit  $f : M \rightarrow N$  un  $C^k$ -plongement.

Comme  $f$  est un homéomorphisme sur son image, il suffit de vérifier que  $f(M)$  est une sous-variété  $C^k$  de  $N$ , et que, pour tout point  $x$  de  $M$ , l'application  $f$  est un  $C^k$ -difféomorphisme d'un voisinage ouvert de  $x$  dans  $M$  sur un voisinage ouvert de  $f(x)$  dans  $f(M)$ . Mais ces deux propriétés sont des propriétés locales, et il suffit donc de les vérifier au voisinage de tout point  $f(x)$  et  $x$  respectivement. Soient  $U$  un voisinage ouvert de  $x$  dans  $M$ , et  $V$  un voisinage ouvert de  $f(x)$  dans  $N$ , qui sont des domaines de cartes. Comme  $f$  est un homéomorphisme sur son image, on peut

supposer que  $f(U) \subset f(M) \cap V$ . En remplaçant  $f$  par une application lue dans les cartes, on se ramène au cas où  $M, N$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$  respectivement. Le résultat découle alors du théorème 1.5 (qui nécessite  $k \geq 1$ ).  $\square$

Comme le montre le *nœud sauvage* suivant, image d'un plongement topologique du cercle  $\mathbb{S}_1$  dans  $\mathbb{R}^3$ , l'image d'une variété topologique par un plongement topologique n'est pas toujours une sous-variété.



Comme énoncé dans la remarque (1) ci-dessous, toute variété différentielle est difféomorphe à une sous-variété d'un espace  $\mathbb{R}^n$ . Mais ce résultat ne justifie pas de n'étudier que les sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ . En effet, de nombreux objets mathématiques ont une structure différentielle « naturelle » qui n'est pas une structure de sous-variété « naturelle », voir par exemple ci-dessous les espaces projectifs et les variétés grassmanniennes, ainsi que les objets construits par quotients comme dans le paragraphe ci-dessous intitulé **Revêtements**. En pratique en mathématiques, il y a plus d'objets qui sont construits par quotients d'objets que par sous-objets.

Dans ces notes, nous ne démontrerons que le résultat suivant.

**Théorème 1.19** *Pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$  et toute variété compacte  $M$  de classe  $C^k$ , il existe  $m$  dans  $\mathbb{N}$  et un  $C^k$ -plongement de  $M$  dans  $\mathbb{R}^m$ .*

**Démonstration.** Soit  $n$  la dimension de  $M$ . Par compacité,  $M$  admet un atlas de cartes fini  $(U_i, \varphi_i)_{1 \leq i \leq p}$ . Par la proposition 1.9 et sa démonstration, il existe une partition de l'unité  $(f_j)_{1 \leq j \leq q}$  de classe  $C^k$ , avec  $f_j$  constante non nulle sur un ouvert  $V_j$ , et de support contenu dans  $U_{i_j}$ , de sorte que  $(V_j)_{1 \leq j \leq q}$  recouvre  $M$ . L'application  $f_j \varphi_{i_j}$ , prolongée par 0 en dehors de  $U_{i_j}$ , est de classe  $C^k$ . L'application  $\psi = (f_1 \varphi_{i_1}, \dots, f_q \varphi_{i_q}, f_1, \dots, f_q)$  de  $M$  dans  $\mathbb{R}^{(n+1)q}$  est une immersion  $C^k$  (car tout point  $x$  appartient à l'un des ouvert  $V_j$  sur lequel  $f_j$  est constant et  $\varphi_{i_j}$  est une immersion). Elle est injective (car si  $\psi(x) = \psi(y)$ , et si  $x \in V_j \subset U_{i_j}$ , alors  $f_j(y) = f_j(x) > 0$ , donc  $y \in U_{i_j}$ , et  $\varphi_{i_j}$  étant injective sur  $U_{i_j}$ , on a donc  $x = y$ ). Donc  $\psi$  est un  $C^k$ -plongement par la proposition 1.17.  $\square$

Encore une fois, l'utilisation de partitions de l'unité empêche la démonstration de marcher pour le cas analytique réel. Voici quelques remarques de nature culturelle, pour laquelle nous renvoyons aux livres de [Hir, Ada].

**Remarque.** (1) Pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ , un résultat de Whitney [Whi] montre que toute variété  $C^k$  de dimension  $n > 0$  admet un  $C^k$ -plongement dans  $\mathbb{R}^{2n}$ , et que toute variété  $C^k$  de dimension  $n > 1$  admet une immersion  $C^k$  dans  $\mathbb{R}^{2n-1}$ . Comme

tout sous-espace d'un espace séparé et à base dénombrable l'est aussi, la condition imposée aux variétés différentielles d'être séparées et à base dénombrable est donc nécessaire pour la validité du théorème de Whitney.

(2) Ce résultat de Whitney est optimal, car le plan projectif réel  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  (qui est de dimension 2, voir ci-dessous) ne se plonge pas dans  $\mathbb{R}^3$  (et l'espace projectif  $\mathbb{P}_{2n}(\mathbb{R})$  ne se plonge pas dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$  pour  $n \geq 1$ ), voir par exemple [Hir, page 108]. De plus, comme il est facile à montrer, la sphère  $\mathbb{S}_2$  n'admet pas d'immersion  $C^1$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

• **Images réciproques.** Fixons un élément  $k$  dans  $(\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$ , deux variétés  $M$  et  $N$  de classe  $C^k$  et de dimension  $m$  et  $n$  respectivement, et une application  $f : M \rightarrow N$  de classe  $C^k$ .

**Proposition 1.20** *Soit  $y \in f(M)$ . Si  $f$  est de rang constant  $r$  sur un voisinage de  $f^{-1}(y)$ , alors  $f^{-1}(y)$  est une sous-variété  $C^k$  de  $M$ , de dimension  $m - r$ , qui est fermée.*

**Démonstration.** Comme le fait d'être une sous-variété est un problème local, par le théorème 1.8 de forme normale des applications de rang constant, en prenant des cartes locales, on se ramène au cas où  $M$  et  $N$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$  respectivement contenant 0, où  $f(0) = 0$  et  $y = 0$  et où  $f$  est une restriction de l'application linéaire  $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ . Le résultat en découle.  $\square$

Un point  $x$  de  $M$  est une *point critique* de  $f$  si  $f$  n'est pas une submersion en  $x$ . Un point  $y$  de  $N$  est une *valeur critique* s'il existe un point critique  $x$  tel que  $f(x) = y$ . Un point de  $N$  qui n'est pas une valeur critique est une *valeur régulière*. (Attention, une valeur régulière n'est pas forcément une valeur, en fait tout point de  $N$  n'appartenant pas à l'image de  $f$  est une valeur régulière!)

Soit  $M$  une variété de classe  $C^1$  et de dimension  $n$ . Une partie  $A$  de  $M$  est dite *de mesure nulle* si pour toute carte locale  $(U, \varphi)$  de  $M$ , la partie  $\varphi(A \cap U)$  de  $\mathbb{R}^n$  est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^n$ . Tout  $C^1$ -difféomorphisme entre ouverts de  $\mathbb{R}^n$  préserve les ensembles de mesure nulle, par le théorème de changement de variable pour la mesure de Lebesgue. Donc une partie  $A$  de  $M$  est de mesure nulle si et seulement si pour tout  $x$  dans  $A$ , il existe une carte locale  $(U, \varphi)$  de  $M$  en  $x$  telle que la partie  $\varphi(A \cap U)$  de  $\mathbb{R}^n$  soit de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^n$ .

Notons qu'une sous-variété de classe au moins  $C^1$  et de codimension au moins 1 d'une variété  $M$  est de mesure nulle dans  $M$ , par redressement.

L'abondance des valeurs régulières vient du résultat suivant, dont nous n'aurons pas besoin dans ces notes sous cette forme générale, mais que nous énonçons pour la culture générale (voir par exemple [Hir, page 69], ainsi que le très joli petit livre [Mil]).

**Théorème 1.21 (Théorème de Sard)** *Soient  $M$  et  $N$  deux variétés de dimensions  $m$  et  $n$ , et  $f : M \rightarrow N$  une application de classe  $C^k$ . Si  $k > \max\{0, m - n\}$ , alors l'ensemble des valeurs critiques de  $f$  est de mesure nulle, et en particulier l'ensemble des valeurs régulières est dense.*  $\square$

Les valeurs régulières permettent de construire des sous-variétés par image réciproque, comme indiqué dans le résultat suivant.

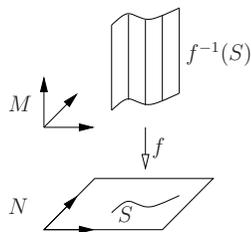
**Porisme 1.22** *Si  $y$  est une valeur régulière de  $f$  et si  $y \in f(M)$ , alors  $f^{-1}(y)$  est une sous-variété  $C^k$  de  $M$ , de dimension  $m - n$ . En particulier, si  $f : M \rightarrow N$  est une submersion  $C^k$ , alors  $f^{-1}(y)$  est une sous-variété  $C^k$  de  $M$  pour tout  $y$  dans  $N$ .*

**Démonstration.** Comme l'ensemble des points de  $M$  en lesquels  $f$  est une submersion est un ouvert, et qu'une submersion à valeurs dans  $N$  est une application de rang constant  $n$ , le résultat découle de la proposition 1.20.  $\square$

Une telle sous-variété  $f^{-1}(y)$  est appelée une *surface de niveau régulière* (ou *ligne de niveau régulière* si  $m - n = 1$ ). Plus généralement, on a le résultat suivant.

**Proposition 1.23** *Si  $f : M \rightarrow N$  est une submersion  $C^k$ , si  $S$  est une sous-variété  $C^k$  de  $N$  de dimension  $p$ , alors  $f^{-1}(S)$  est une sous-variété  $C^k$  de  $M$ , de dimension  $m - n + p$ .*

**Démonstration.** Soit  $x$  dans  $f^{-1}(S)$  et  $y = f(x)$ . Soit  $U$  un voisinage ouvert de  $y$  et  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$  une submersion  $C^k$  telle que  $S \cap U = g^{-1}(g(y))$ . Alors  $g \circ f$  est une submersion en  $x$ , et si  $z = g \circ f(x)$ , alors  $f^{-1}(S) \cap f^{-1}(U) = (g \circ f)^{-1}(z)$ , ce qui montre le résultat.  $\square$



- **Sommes disjointes.** Soient  $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$  une famille au plus dénombrable de variétés différentielles de classe  $C^k$  et de dimension  $n$ , et  $(U_{\alpha,i}, \varphi_{\alpha,i})_{i \in I_\alpha}$  un atlas de cartes de  $M_\alpha$  pour tout  $\alpha$ . Notons  $X$  l'espace topologique somme disjointe des  $M_\alpha$  (voir l'appendice A.1), qui est séparé et à base dénombrable. Identifions  $M_\alpha$  avec son image dans  $X$ . Alors il est facile de vérifier que  $(U_{\alpha,i}, \varphi_{\alpha,i})_{\alpha \in A, i \in I_\alpha}$  est un atlas de cartes  $C^k$  sur  $X$ , donc définit une structure de variété différentielle de classe  $C^k$  et de dimension  $n$  sur  $X$ . Sauf mention explicite du contraire, une somme disjointe de variétés sera toujours munie de cette structure, dite de *variété somme disjointe*.

Il est immédiat de voir que cette structure sur  $X$  est l'unique structure de variété  $C^k$  telle que pour toute variété  $P$  de classe  $C^k$ , une application de  $X$  dans  $P$  est de classe  $C^k$  si et seulement si sa restriction à chaque  $M_\alpha$  est  $C^k$ . En particulier, les inclusions canoniques des  $M_\alpha$  dans  $X$  sont des  $C^k$ -plongements.

- **Produits.** Si  $M, N$  sont deux variétés différentielles de classe  $C^k$ , et si  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}, (V_j, \psi_j)_{j \in J}$  sont deux choix d'atlas définissant leur structure différentielle, posons  $\phi_{ij} : U_i \times V_j \rightarrow \varphi_i(U_i) \times \psi_j(V_j)$  l'application définie par  $(x, y) \mapsto (\varphi_i(x), \psi_j(y))$ . Alors il est immédiat de vérifier que  $(U_i \times V_j, \phi_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$  est un atlas de cartes  $C^k$  sur l'espace topologique produit  $M \times N$ , dont la classe d'équivalence ne dépend pas des choix. Un produit de deux espaces topologiques séparés et à base dénombrable l'est encore. Sauf mention explicite du contraire, le produit de deux variétés sera toujours muni de cette structure de variété, dite de *variété produit*.

Remarquons que si  $M$  et  $N$  sont de dimension  $m$  et  $n$  respectivement, alors la dimension de la variété produit  $M \times N$  est  $m + n$ . Il est immédiat que les projections  $pr_1 : M \times N \rightarrow M$  et  $pr_2 : M \times N \rightarrow N$  sont des submersions surjectives de classe  $C^k$ . Notons que par l'identification usuelle d'une fonction à valeurs dans un produit avec le couple de ses deux composantes, on a

$$C^k(M, N_1 \times N_2) = C^k(M, N_1) \times C^k(M, N_2)$$

pour toutes les variétés  $M, N_1, N_2$  de classe  $C^k$  : une application d'une variété à valeurs dans une variété produit est  $C^k$  si et seulement si ses composantes le sont.

**Exercice E.10** *Montrer que la structure de variété produit est l'unique structure de variété  $C^k$  sur l'espace topologique produit telle que ceci soit vérifié.*

Dans la fin de ce paragraphe, nous montrons comment utiliser les revêtements (voir l'appendice A.4) pour construire des variétés différentielles, soit en « tirant en arrière » des structures de variété différentielle, soit en « passant au quotient » des structures de variété différentielle.

Le bon outil pour transférer des propriétés locales dans les deux sens est celui des morphismes étales, au sens suivant. Soient  $M, N$  deux variétés de classe  $C^k$ . Une application  $f : M \rightarrow N$  est un *morphisme étale* de classe  $C^k$  (ou un  *$C^k$ -difféomorphisme local*) si pour tout  $x$  dans  $M$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  dans  $M$  et un voisinage ouvert  $V$  de  $f(x)$  dans  $N$  tel que  $f : U \rightarrow V$  soit un  $C^k$ -difféomorphisme. Par le théorème d'inversion locale A.2, si  $M, N$  sont de dimension  $m, n$  respectivement, alors une application  $f : M \rightarrow N$  est un  $C^k$ -difféomorphisme local si et seulement si  $f$  est une immersion  $C^k$  et  $m = n$ . On définit de même une application étale holomorphe entre deux variétés holomorphes.

- **Homéomorphismes locaux.** Les homéomorphismes locaux permettent de « tirer en arrière » des structures de variété différentielle. Plus précisément, soient  $X$  et  $B$  deux espaces topologiques séparés à base dénombrable, et  $p : X \rightarrow B$  un homéomorphisme local. Si  $B$  est muni d'une structure de variété  $C^k$ , alors  $X$  admet une unique structure de variété  $C^k$  telle que  $p$  soit un  $C^k$ -difféomorphisme local.

En effet, l'ensemble des couples  $(V, \varphi)$  tels que  $V$  soit un ouvert de  $X$ , la partie  $p(V)$  soit un ouvert de  $B$ , l'application  $p|_V : V \rightarrow p(V)$  soit un homéomorphisme et le couple  $(p(V), \varphi)$  soit une carte locale de  $B$ , forme un atlas de cartes  $C^k$  sur  $X$ . La structure de variété  $C^k$  définie par cet atlas sur  $X$  convient.

Localement, l'application  $p$  induit un isomorphisme entre les faisceaux  $C^k_X$  et  $C^k_B$  (c'est-à-dire pour tout point  $x$  de  $X$ , il existe des ouverts  $U$  dans  $X$  et  $V$  dans  $B$ , tels que  $x \in U$  et  $p$  soit un isomorphisme de  $C^k_{x|U}$  sur  $C^k_{p(x)|V}$ ).

- **Revêtements.** Nous renvoyons à l'appendice A.2 pour le vocabulaire des actions de groupes, et à l'appendice A.4 pour les notions de base sur les revêtements.

Soient  $X, B$  deux variétés  $C^k$ , et  $f : X \rightarrow B$  une application  $C^k$ . On dit que  $f$  est un *revêtement  $C^k$*  si pour tout  $y \in B$ , il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $y$ , un espace

discret dénombrable  $D$  non vide et  $h : V \times D \rightarrow f^{-1}(V)$  un  $C^k$ -difféomorphisme (pour la structure produit à la source) tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} V \times D & \xrightarrow{h} & f^{-1}(V) \\ & \searrow p_{r1} & \downarrow f \\ & & V \end{array}$$

Si  $X, B$  sont des variétés analytiques complexes, on définit de même la notion de *revêtement holomorphe* en demandant que  $h$  soit un difféomorphisme analytique complexe.

Deux revêtements  $C^k$ ,  $f : X \rightarrow B$  et  $f' : X' \rightarrow B$ , sont *isomorphes* s'il existe un  $C^k$ -difféomorphisme  $\phi : X \rightarrow X'$  tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & X' \\ f \searrow & & \swarrow f' \\ & B & \end{array}$$

Une propriété fondamentale des revêtements  $C^k$  est celle de relèvement unique d'applications  $C^k$ , que nous énonçons ci-dessous. Comme un revêtement  $C^k$  est en particulier un  $C^k$ -difféomorphisme local, la proposition suivante est une conséquence immédiate de la proposition A.10 de l'appendice A.4.

**Proposition 1.24 (Théorème du relèvement)** *Si  $p : X \rightarrow B$  est un revêtement  $C^k$  et  $Y$  est une variété  $C^k$  simplement connexe, pour tous  $x$  dans  $X$  et  $y$  dans  $Y$  tels que  $p(x) = f(y)$ , pour toute application  $f : Y \rightarrow B$  de classe  $C^k$ , il existe un et un seul relèvement  $\tilde{f} : Y \rightarrow X$  de classe  $C^k$  de  $f$  tel que  $\tilde{f}(y) = x$ .  $\square$*

Si  $p : X \rightarrow B$  est un revêtement holomorphe, et si  $f : Y \rightarrow B$  est analytique complexe, alors un théorème du relèvement analogue fournit un relèvement  $\tilde{f} : Y \rightarrow X$  analytique complexe.

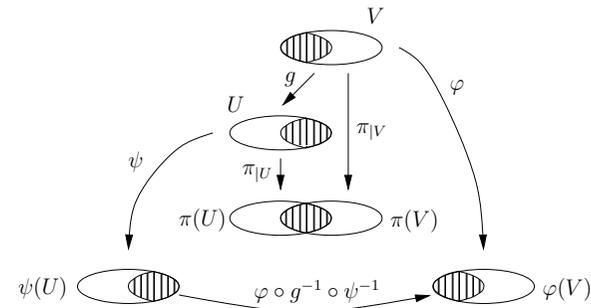
La construction principale de revêtements  $C^k$  est la suivante. Soit  $G$  un groupe discret agissant, par  $C^k$ -difféomorphismes, librement et proprement sur une variété différentielle  $X$  de classe  $C^k$ .

**Proposition 1.25** *L'espace topologique quotient  $G \backslash X$  admet une unique structure de variété différentielle de classe  $C^k$ , telle que la projection canonique  $\pi : X \rightarrow G \backslash X$  soit un  $C^k$ -difféomorphisme local.*

Sauf mention explicite du contraire, tout tel quotient  $G \backslash X$  sera muni de cette structure de variété  $C^k$ , dite de *variété quotient*. La projection canonique  $\pi$  est alors un revêtement  $C^k$ .

**Démonstration.** On sait (voir le théorème A.8 de l'appendice A.4) que l'espace topologique  $G \backslash X$  est séparé. Il est immédiat que  $G \backslash X$  est à base dénombrable, car  $X$  l'est et la projection canonique  $\pi$  est continue, ouverte (voir la proposition A.1

de l'appendice A.2) et surjective. Considérons l'ensemble  $\mathcal{A}$  des couples  $(\pi(V), \varphi \circ (\pi|_V)^{-1})$  avec  $(V, \varphi)$  une carte locale de  $X$ , telle que l'application  $\pi|_V : V \rightarrow \pi(V)$  soit un homéomorphisme, et que  $gV \cap V = \emptyset$ , pour tout  $g$  dans  $G - \{e\}$ . Montrons que  $\mathcal{A}$  est un atlas de cartes  $C^k$  sur  $G \backslash X$ .



En effet, d'une part, les domaines de cartes recouvrent bien  $G \backslash X$ , par le théorème A.8 de l'appendice A.4. D'autre part, si  $(\pi(U), \psi \circ (\pi|_U)^{-1})$  est un autre tel couple, alors pour tout  $x$  dans  $V \cap \pi^{-1}(\pi(U))$ , il existe un (unique) élément  $g$  dans  $G$  tel que, pour tout  $y$  suffisamment proche de  $x$ , on ait  $gy = (\pi|_U)^{-1} \circ \pi|_U(y)$ . L'application de transition entre  $(\pi(V), \varphi \circ (\pi|_V)^{-1})$  et  $(\pi(U), \psi \circ (\pi|_U)^{-1})$  est donc, au voisinage de  $\varphi(x)$ ,

$$(\psi \circ g \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(V \cap \pi^{-1}(\pi(U)))},$$

qui est de classe  $C^k$ .

La structure de variété  $C^k$  définie par cet atlas sur  $G \backslash X$  convient.  $\square$

De même, si un groupe discret  $G$  agit proprement et librement par difféomorphismes analytiques complexes sur une variété holomorphe  $M$ , alors l'espace topologique quotient  $G \backslash M$  admet une unique structure de variété holomorphe, telle que la projection canonique  $\pi : X \rightarrow G \backslash M$  soit une application étale holomorphe.

Du point de vue des faisceaux, pour tout ouvert  $U$  de  $G \backslash X$ , l'espace  $C^k_{G \backslash X}(U)$  s'identifie à l'espace des fonctions  $f$  dans  $C^k_X(\pi^{-1}(U))$  qui sont *invariantes* par le groupe  $G$  (c'est-à-dire telles que  $f(\gamma x) = f(x)$  pour tout  $\gamma$  dans  $G$  et  $x$  dans  $X$ ), par l'isomorphisme d'espaces vectoriels qui, à une application  $G$ -invariante de  $\pi^{-1}(U)$  dans  $\mathbb{R}$ , associe l'application de  $U$  dans  $\mathbb{R}$  induite par passage au quotient.

**Exemples.** (1) En particulier, si  $G$  est un groupe fini (discret) agissant librement par  $C^k$ -difféomorphismes sur une variété  $M$  compacte de classe  $C^k$ , alors  $G \backslash M$  est une variété quotient  $C^k$  compacte.

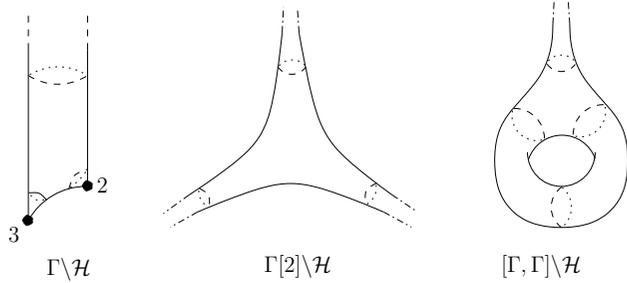
(2) Le groupe topologique  $SL_2(\mathbb{R})$  agit continûment sur le demi-plan supérieur  $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ , par homographies

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Soit  $SL_2(\mathbb{Z})$  le sous-groupe de  $SL_2(\mathbb{R})$  des éléments à coefficients entiers. Pour tout  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ , soit

$$\Gamma[n] = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{n} \right\}$$

**Exercice E.11** Montrer que pour  $n \geq 2$ , le groupe  $\Gamma[n]$  agit proprement et librement sur  $\mathcal{H}$ , et donc que  $\Gamma[n] \backslash \mathcal{H}$  est une variété quotient analytique réelle. Montrer que l'espace topologique quotient  $\Gamma \backslash \mathcal{H}$  est homéomorphe à un disque ouvert, mais n'admet pas de structure de variété  $C^1$  telle que la projection canonique  $\mathcal{H} \rightarrow \Gamma \backslash \mathcal{H}$  soit un  $C^1$ -difféomorphisme local.



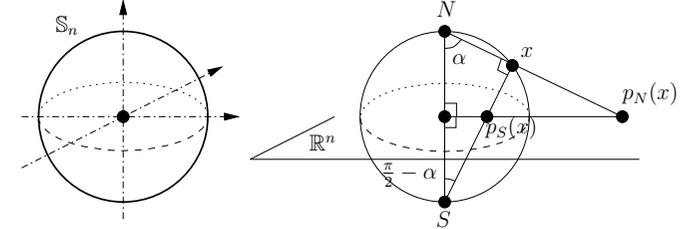
Montrer que la variété quotient  $\Gamma[2] \backslash \mathcal{H}$  est  $C^\omega$ -difféomorphe à la sphère  $\mathbb{S}_2$  privée de trois points. Si  $[\Gamma, \Gamma]$  est le sous-groupe dérivé de  $\Gamma$  (i.e. le sous-groupe engendré par les commutateurs  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$  d'éléments de  $\Gamma$ ), montrer que  $[\Gamma, \Gamma]$  agit proprement et librement sur  $\mathcal{H}$  et que la variété quotient  $[\Gamma, \Gamma] \backslash \mathcal{H}$  est  $C^\omega$ -difféomorphe au tore  $\mathbb{T}^2$  privé d'un point.

### 1.4.3 Exemples cruciaux

• **Les sphères.** Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}$ . La sphère de dimension  $n$  est le sous-espace topologique compact  $\mathbb{S}_n$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  défini par

$$\mathbb{S}_n = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0\}.$$

Certains ouvrages, voire la plupart, notent  $\mathbb{S}^n$  la sphère de dimension  $n$ , mais nous préférons la notation en indice plutôt qu'en exposant, pour ne pas confondre avec les produits (que penser de  $(\mathbb{S}^1)^n \neq \mathbb{S}^n$ ?). Comme l'application  $(x_0, \dots, x_n) \mapsto x_0^2 + \dots + x_n^2 - 1$  est une submersion analytique réelle en tout point de  $\mathbb{S}_n$ , la sphère est une sous-variété analytique réelle de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , de codimension 1 et de dimension  $n$ .



Soient  $N = (1, 0, \dots, 0)$  et  $S = (-1, 0, \dots, 0)$ , appelés respectivement le pôle Nord et le pôle Sud de  $\mathbb{S}_n$ . Notons  $p_N : \mathbb{S}_n - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $p_S : \mathbb{S}_n - \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  les applications, appelées *projection stéréographique* de pôle Nord et Sud respectivement, qui à un point  $x$  de la sphère, différent du pôle concerné, associent le point d'intersection, avec l'hyperplan d'équation  $x_0 = 0$  (identifié avec  $\mathbb{R}^n$ ), de la droite passant par le pôle concerné et  $x$ . Il est immédiat géométriquement que ces applications sont continues, bijectives, et d'inverses continus.

Les projections stéréographiques sont donc des homéomorphismes d'un ouvert de  $\mathbb{S}_n$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Il est facile de voir géométriquement (avec les notations de la figure,  $\|p_N(x)\| = \tan \alpha$  et  $\|p_S(x)\| = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ , donc  $\|p_N(x)\| = 1/\|p_S(x)\|$  et  $0, p_S(x), p_N(x)$  sont alignés) que l'application de transition est

$$p_S \circ p_N^{-1} : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\} \\ x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$$

(qui est l'inversion par rapport à la sphère  $\mathbb{S}_{n-1}$ ), donc est un difféomorphisme (involutif) analytique réel. Les ouverts  $\mathbb{S}_n - \{N\}$  et  $\mathbb{S}_n - \{S\}$  recouvrent  $\mathbb{S}_n$ . Donc  $\{(\mathbb{S}_n - \{i\}, p_i)\}_{i \in \{S, N\}}$  est un atlas de cartes analytique réel sur  $\mathbb{S}_n$ .

**Exercice E.12** Vérifier que la structure de variété analytique réelle définie par cet atlas et celle définie par la structure de sous-variété ci-dessus sont égales.

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ . Le groupe

$$\mathcal{U}_p = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^p = 1\}$$

des racines  $p$ -èmes de l'unité agit par difféomorphismes analytiques réels sur la sphère de dimension impaire  $\mathbb{S}_{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$  par  $\lambda \cdot (z_0, \dots, z_n) = (\lambda z_0, \dots, \lambda z_n)$ . Donc l'espace lenticulaire  $L_{n,p} = \mathcal{U}_p \backslash \mathbb{S}_{2n+1}$  (voir l'appendice A.4) est une variété quotient analytique réelle, et la projection canonique  $\mathbb{S}_{2n+1} \rightarrow L_{n,p}$  est un revêtement analytique réel à  $p$  feuilletés.

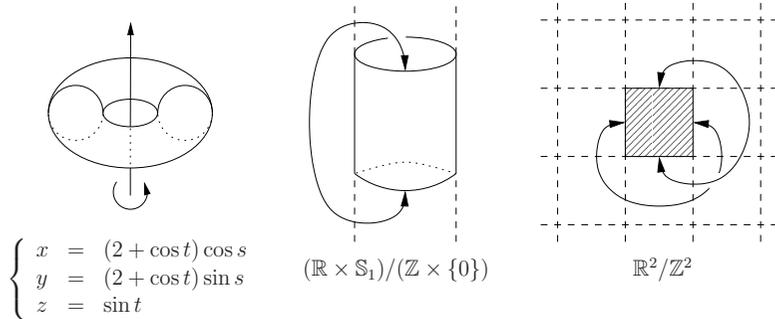
Considérons  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  le compactifié d'Alexandrov de  $\mathbb{C}$  (qui est  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  muni de l'unique topologie dont une base d'ouverts est l'ensemble formé des  $U$  pour  $U$  ouvert de  $\mathbb{C}$  et des  ${}^c K \cup \{\infty\}$  pour  $K$  compact de  $\mathbb{C}$ , voir l'exercice E.48 de l'appendice A.1). Considérons les homéomorphismes  $\varphi_1 = \text{id} : U_1 = \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  et

$\varphi_2 : U_2 = (\mathbb{C} - \{0\}) \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$  défini par  $\varphi_2(z) = \frac{1}{z}$  si  $z \neq \infty$  et  $\varphi_2(\infty) = 0$ . Alors  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$  vaut  $z \mapsto \frac{1}{z}$ , qui est holomorphe. Donc  $(U_i, \varphi_i)_{i=1,2}$  est un atlas de cartes holomorphe sur  $\widehat{\mathbb{C}}$ . L'espace  $\widehat{\mathbb{C}}$ , muni de l'atlas de cartes holomorphe maximal contenant  $(U_i, \varphi_i)_{i=1,2}$ , est donc une variété analytique complexe de dimension 1, que l'on appelle la *sphère de Riemann*. Elle est clairement  $C^\omega$ -difféomorphe à la variété  $S_2$ .

• **Les tores.** Le *tore* de dimension  $n$  est le sous-espace topologique compact de  $\mathbb{C}^n$  défini par

$$\mathbb{T}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_1| = \dots = |z_n| = 1\}.$$

Comme l'application  $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (|z_1| - 1, \dots, |z_n| - 1)$  de  $\mathbb{C}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  est une submersion analytique réelle en tout point de  $\mathbb{T}^n$ , celui-ci est une sous-variété analytique réelle de  $\mathbb{C}^n$ , de codimension  $n$  et de dimension  $n$ .



**Exercice E.13** Montrer que  $\mathbb{T}^n$  est  $C^\omega$ -difféomorphe à la variété produit de  $n$  copies du cercle  $S_1$ .

Montrer que le sous-groupe  $\mathbb{Z}^n$  agit librement et proprement sur  $\mathbb{R}^n$  par translations, et que la variété différentielle quotient  $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  est  $C^\omega$ -difféomorphe à  $\mathbb{T}^n$ . (En particulier les fonctions  $C^k$  sur  $\mathbb{T}^n$  s'identifient aux fonctions  $C^k$  périodiques sur  $\mathbb{R}^n$ .)

Montrer que l'application  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  définie par

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto (\cos 2\pi t_1, \sin 2\pi t_1, \dots, \cos 2\pi t_n, \sin 2\pi t_n)$$

induit par passage au quotient un difféomorphisme analytique réel de  $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  sur une sous-variété de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

On considère  $\mathbb{R}^3$  muni de ses coordonnées usuelles  $x, y, z$ . On appelle *tore* de révolution le sous-espace de  $\mathbb{R}^3$  obtenu en faisant tourner autour de l'axe des  $z$  le cercle d'équations  $y = 0, (x - 2)^2 + z^2 = 1$ . Montrer que le tore de révolution est une sous-variété analytique réelle de  $\mathbb{R}^3$ , qui est  $C^\omega$ -difféomorphe à  $\mathbb{T}^2$ .

Soit  $\Lambda$  un *réseau* de  $\mathbb{C}$ , c'est-à-dire un sous-groupe discret tel que l'espace topologique quotient  $\mathbb{C} / \Lambda$  soit compact. Alors  $\Lambda$  agit librement et proprement (par translations) sur  $\mathbb{C}$ , et la variété holomorphe quotient  $\mathbb{C} / \Lambda$ , de dimension (complexe) 1, est appelée une *courbe elliptique*. Elle est bien sûr  $C^\omega$ -difféomorphe à  $\mathbb{T}^2$ . La sphère de Riemann et les courbes elliptiques sont des exemples de *surfaces de Riemann*, c'est-à-dire de variétés holomorphes de dimension (complexe) 1, nous renvoyons par exemple à [Rey, FK] pour références.

**Exercice E.14** Soient  $\tau, \tau'$  deux nombres complexes de partie imaginaire strictement positive. Montrer que les courbes elliptiques  $\mathbb{C} / (\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$  et  $\mathbb{C} / (\mathbb{Z} + \tau'\mathbb{Z})$  sont isomorphes (en tant que variétés analytiques complexes) si et seulement si  $\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$

où  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

• **Les espaces projectifs.** Rappelons que si  $K$  est un corps (commutatif), et  $V$  un  $K$ -espace vectoriel, on appelle *espace projectif* de  $V$ , et on note  $\mathbb{P}(V)$ , l'ensemble quotient  $K^* \backslash (V - \{0\})$  de  $V - \{0\}$  par l'action par homothéties du groupe multiplicatif des scalaires non nuls, c'est-à-dire l'ensemble quotient  $(V - \{0\}) / \sim$  de l'ensemble  $V - \{0\}$  des vecteurs non nuls par la relation d'équivalence « être colinéaire »

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in K^*, x = \lambda y.$$

L'ensemble  $\mathbb{P}(V)$  s'identifie avec l'ensemble des droites vectorielles de  $V$ . Toute application linéaire injective  $f : V \rightarrow V'$  entre deux espaces vectoriels sur  $K$  induit par passage au quotient une application  $\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ , appelée *application projective*.

Si  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$ , et si  $V$  est de dimension finie (muni de la topologie définie par n'importe quelle norme), nous munirons  $\mathbb{P}(V)$  de la topologie quotient, qui est séparée (car deux droites distinctes (privées de l'origine) sont contenues dans des cônes ouverts disjoints (privés de l'origine)), donc compacte (car  $\mathbb{P}(V)$  est l'image d'un compact, par exemple la boule unité fermée d'une norme). Plus généralement, si  $V$  est un espace vectoriel topologique sur un corps topologique  $K$  (par exemple  $V = K^n$ ), nous munirons  $\mathbb{P}(V)$  de la topologie quotient.

Si  $\lambda : V \rightarrow K$  est une forme linéaire non nulle, de noyau un hyperplan noté  $H = H_\lambda$ , alors  $\lambda^{-1}(\{1\})$  est un hyperplan affine de  $V$ , et l'application  $i_\lambda : \lambda^{-1}(\{1\}) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ , restriction de la projection canonique  $\pi : V - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$ , est injective, d'image  $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ , d'inverse l'application qui à une droite vectorielle non contenue dans  $H$  associe son unique point d'intersection avec  $\lambda^{-1}(\{1\})$ . Une application de la forme

$$i_\lambda^{-1} : \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H) \rightarrow \lambda^{-1}(\{1\})$$

est appelée une *carte affine* de  $\mathbb{P}(V)$ , d'*hyperplan à l'infini*  $\mathbb{P}(H)$ . Si  $\lambda, \mu$  sont deux formes linéaires, alors l'application

$$i_\mu^{-1} \circ i_\lambda : \lambda^{-1}(\{1\}) - H_\mu \rightarrow \mu^{-1}(\{1\}) - H_\lambda$$

est donnée par  $v \mapsto \frac{1}{\mu(v)}v$ . Donc si  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$  et si  $V$  est de dimension finie, cette application (après identification linéaire, donc  $K$ -analytique, des hyperplans affines avec un espace  $K^N$ ) est  $K$ -analytique. Ainsi  $(\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H_\lambda), i_\lambda^{-1})_{\lambda \in \check{V} - \{0\}}$  (pour  $\check{V}$  le dual de  $V$ ) est un atlas de cartes, analytique réel si  $K = \mathbb{R}$  et analytique complexe si  $K = \mathbb{C}$ , sur  $\mathbb{P}(V)$ . Sauf mention explicite du contraire, nous munirons alors  $\mathbb{P}(V)$  de la structure  $K$ -analytique définie par cet atlas. Les fonctions  $C^k$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{P}(V)$  s'identifient aux fonctions  $C^k$  sur  $\pi^{-1}(U)$  qui sont invariantes par homothéties (c'est-à-dire  $f(tx) = f(x)$  pour tout  $t$  dans  $K^*$  et  $x$  dans  $\pi^{-1}(U)$ ).

Supposons maintenant que  $V = K^{n+1}$ . Alors on note  $\mathbb{P}_n(K)$  (ou parfois  $K\mathbb{P}_n$ ) l'espace  $\mathbb{P}(V)$ , et on l'appelle l'espace projectif de dimension  $n$ , réel si  $K = \mathbb{R}$ , complexe si  $K = \mathbb{C}$ . Si  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in K^{n+1} - \{0\}$ , on note  $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$  l'image de  $x$  dans  $\mathbb{P}_n(K)$ , et on appelle  $x_0, x_1, \dots, x_n$  les coordonnées homogènes de  $x$ . En particulier, pour tout  $t$  dans  $K^*$ , on a  $[tx_0 : tx_1 : \dots : tx_n] = [x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ . Si  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$ , il suffit de  $n+1$  formes linéaires pour définir un atlas de cartes de la variété  $\mathbb{P}_n(K)$ , celles qui sont les applications coordonnées. En effet, posons

$$U_i = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}_n(K) : x_i \neq 0\}.$$

Les ouverts  $U_i$  sont bien définis, et recouvrent  $\mathbb{P}_n(K)$ . L'application  $\varphi_i : U_i \rightarrow K^n$  définie par

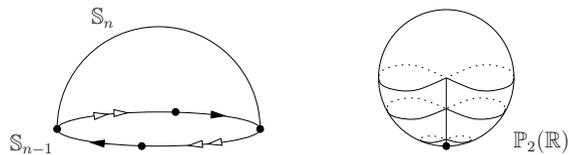
$$[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \mapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

est un homéomorphisme, d'inverse  $(t_0, \dots, \widehat{t_i}, \dots, t_n) \mapsto [t_0 : \dots : t_{i-1} : 1 : t_{i+1} : \dots : t_n]$ , où la notation  $\widehat{t_i}$  signifie que l'on omet  $t_i$ . Pour  $i \neq j$ , l'application de transition

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \{(t_0, \dots, \widehat{t_i}, \dots, t_n) \in K^n : t_j \neq 0\} \rightarrow \{(u_0, \dots, \widehat{u_j}, \dots, u_n) \in K^n : u_i \neq 0\}$$

est définie par  $u_k = \frac{t_k}{t_j}$  si  $k \neq i, j$ , et  $u_i = \frac{1}{t_j}$ . Il s'agit d'une application rationnelle, de dénominateur ne s'annulant pas, donc d'une application  $K$ -analytique. Par conséquent,  $(U_i, \varphi_i)_{0 \leq i \leq n}$  est un atlas de cartes  $K$ -analytique sur  $\mathbb{P}_n(K)$ , en fait contenu dans le précédent atlas de cartes.

Nous renvoyons au très beau livre [Apé] pour de très beaux dessins du plan projectif réel. Le dessin de droite ci-dessous ne représente pas l'image d'une immersion de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}^3$  (qui existe pourtant, d'après la remarque (2) de la fin du paragraphe **Plongements**, voir la surface de Boy dans [Apé] pour un exemple explicite), mais il y a un seul point en lequel l'application n'est pas une immersion. Ce dessin donne une image de ce qui se passe quand on identifie les points opposés de l'équateur bord de l'hémisphère nord.



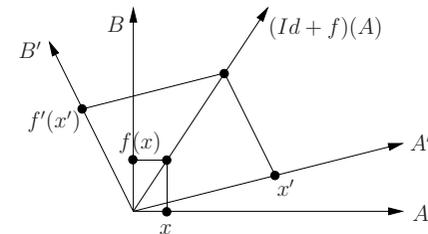
**Exercice E.15** (1) On rappelle que le groupe  $\{\pm 1\}$  agit sur  $S_n$  par  $x \mapsto \pm x$ . Montrer que la restriction à  $S_n$  de la projection canonique sur  $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  induit un difféomorphisme analytique réel de la variété quotient  $\{\pm 1\} \backslash S_n$  sur  $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ , et que l'application canonique  $S_n \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  est un revêtement analytique réel à deux feuillets.

(2) Montrer que  $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$  est  $C^\omega$ -difféomorphe à  $S_1$ , et que  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  est  $C^\omega$ -difféomorphe à  $S_2$ .

• **Les variétés grassmanniennes.** Soient  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $K$  le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . On note  $\mathcal{G}_k(V)$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $V$  de dimension  $k$ . Remarquons que  $\mathcal{G}_0(V)$  et  $\mathcal{G}_n(V)$  sont réduits à un point, que  $\mathcal{G}_k(V)$  est vide si  $k > n$ , et que  $\mathcal{G}_1(V)$ , l'ensemble des droites vectorielles de  $V$ , s'identifie à  $\mathbb{P}(V)$ .

On munit  $\mathcal{G}_k(V)$  de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts : si  $\mathcal{B}$  est la boule unité fermée d'une norme fixée sur  $V$ , pour tout  $\epsilon > 0$ , deux éléments  $A, A'$  de  $\mathcal{G}_k(V)$  sont dits  $\epsilon$ -proches si  $\mathcal{B} \cap A$  est contenu dans le  $\epsilon$ -voisinage de  $\mathcal{B} \cap A'$  et réciproquement ; si  $V_\epsilon(A)$  est l'ensemble des  $A'$  dans  $\mathcal{G}_k(V)$  tels que  $A$  et  $A'$  soient  $\epsilon$ -proches, alors  $\{V_\epsilon(A) : \epsilon > 0, A \in \mathcal{G}_k(V)\}$  est une base d'ouvert d'une topologie sur  $\mathcal{G}_k(V)$  (voir le critère (\*) en tout début de l'appendice A.1) ; cette topologie ne dépend pas du choix de la norme. Cette topologie est clairement métrisable (pour la distance entre  $A, A'$  qui est la borne inférieure des  $\epsilon$  ci-dessus), et compacte (munir  $V$  d'un produit scalaire, prendre une suite de sous-espaces vectoriels  $A_i$  de dimension  $k$ , prendre une base orthonormée de  $A_i$ , et extraire une sous-suite convergente de ces bases, le sous-espace engendré par la limite est une valeur d'adhérence des  $A_i$  dans  $\mathcal{G}_k(V)$ ).

Soient  $A$  et  $B$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $V$ , avec  $A$  de dimension  $k$ . On note  $\mathcal{L}(A, B)$  l'espace vectoriel de dimension  $k(n-k)$  des applications linéaires de  $A$  dans  $B$ . Soit  $U_B$  l'ouvert de  $\mathcal{G}_k(V)$  des sous-espaces vectoriels supplémentaires à  $B$ . Tout élément  $C$  de  $U_B$  est le graphe, dans la décomposition  $V = A \oplus B$ , d'une unique application linéaire  $f$  de  $A$  dans  $B$ . Notons  $\varphi_{A,B} : U_B \rightarrow \mathcal{L}(A, B)$  l'application définie par  $C \mapsto f$ . Il est immédiat de voir que  $\varphi_{A,B}$  est un homéomorphisme, d'inverse l'application qui à  $f$  dans  $\mathcal{L}(A, B)$  associe le sous-espace vectoriel  $(\text{Id} + f)(A)$  dans  $U_B$ , où  $\text{Id}$  est l'application identité de  $V$ .



Soient  $A'$  et  $B'$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, avec  $A'$  de dimension  $k$ . L'application de transition  $\varphi_{A',B'} \circ (\varphi_{A,B})^{-1}$ , définie sur l'ouvert de  $\mathcal{L}(A, B)$

des  $f$  tels que  $(Id + f)(A)$  soit supplémentaire à  $B'$ , est l'application  $f \mapsto f'$  avec  $f'$  dans  $\mathcal{L}(A', B')$  telle que, pour tout  $x'$  dans  $A'$ , le point  $f'(x')$  soit la projection sur  $B'$  parallèlement à  $A'$  de l'unique point  $y$  de  $V$ , intersection des sous-espaces affines  $x' + B'$  et  $(Id + f)(A)$ . Par le fait que les formules de Cramer d'un système linéaire donnent une solution qui dépend de manière analytique réelle des coefficients (tant que le déterminant principal ne s'annule pas), et le fait qu'une application linéaire est analytique réelle, cette application de transition est analytique réelle. Donc  $(U_B, \varphi_{A,B})_{A \in \mathcal{G}_k(V), B \in \mathcal{G}_{n-k}(V), A \cap B = \{0\}}$  est un atlas de cartes analytique réel. Nous munissons  $\mathcal{G}_k(V)$  de la structure de variété analytique réelle correspondante. Cette variété s'appelle la *variété grassmannienne* de  $V$  de rang  $k$ . Elle est de dimension  $k(n - k)$  si  $k \leq n$ .

**Exercice E.16** Montrer que  $\mathcal{G}_1(V)$  et  $\mathbb{P}(V)$  sont  $C^\omega$ -difféomorphes.

Soient  $V, V'$  deux espaces vectoriels de dimension finie sur  $K$ , et  $f : V \rightarrow V'$  un isomorphisme linéaire. Alors l'application  $\mathcal{G}_k f : \mathcal{G}_k(V) \rightarrow \mathcal{G}_k(V')$  définie par  $\mathcal{G}_k f(A) = f(A)$  (qui est bien un sous-espace vectoriel de dimension  $k$  de  $V'$ ) est évidemment un  $C^\omega$ -difféomorphisme.

• **Les groupes classiques.** Nous renvoyons à [MT] pour tout complément sur ce paragraphe.

Soit  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ . On note  $GL_n(\mathbb{C})$  le *groupe linéaire complexe* des matrices complexes  $n \times n$  inversibles et  $GL_n(\mathbb{R})$  le sous-groupe des matrices à coefficients réels, appelé le *groupe linéaire réel*, muni de leur structure de variété différentielle analytique réelle en tant qu'ouverts de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est dite *hermitienne* si  $A^* = A$  ou  $A^* = {}^t \bar{A}$  est la matrice adjointe de  $A$

Soit

$$SL_n(\mathbb{C}) = \{x \in GL_n(\mathbb{C}) : \det x = 1\}$$

le *groupe spécial linéaire* complexe,

$$U(n) = \{x \in GL_n(\mathbb{C}) : x^{-1} = x^*\}$$

le *groupe unitaire*, et  $SU(n) = U(n) \cap SL_n(\mathbb{C})$  le *groupe spécial unitaire*. Soit

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{x \in GL_n(\mathbb{R}) : \det x = 1\}$$

le *groupe spécial linéaire* réel,

$$O(n) = \{x \in GL_n(\mathbb{R}) : x^{-1} = {}^t x\}$$

le *groupe orthogonal*, et  $SO(n) = O(n) \cap SL_n(\mathbb{R})$  le *groupe spécial orthogonal*.

**Exercice E.17** (1) Montrer que  $SL_n(\mathbb{C})$ ,  $U(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $GL_n(\mathbb{R})$ ,  $SL_n(\mathbb{R})$ ,  $O(n)$  ainsi que  $SO(n)$  sont des sous-groupes fermés de  $GL_n(\mathbb{C})$ , et des sous-variétés analytiques réelles de  $GL_n(\mathbb{C})$ .

(1) Montrer que les variétés analytiques réelles  $SO(2)$  et  $U(1)$  sont  $C^\omega$ -difféomorphes à  $\mathbb{S}_1$ .

(2) Montrer que  $U(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $O(n)$ ,  $SO(n)$  sont compacts.

1. Montrer que  $U(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $SO(n)$  sont connexes par arcs, et que  $O(n)$  possède deux composantes connexes.

(3) Soit  $\mathcal{H}$  (respectivement  $\mathcal{H}^+$ ) le sous-espace topologique de l'espace vectoriel de dimension finie  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  formé des matrices hermitiennes (respectivement hermitiennes définies positives). Montrer que  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}^+$  sont des sous-variétés analytiques réelles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , et que l'application exponentielle

$$\exp : X \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

est un  $C^\omega$ -difféomorphisme de  $\mathcal{H}$  sur  $\mathcal{H}^+$ . Montrer qu'il existe un  $C^\omega$ -difféomorphisme  $x \mapsto \sqrt{x}$  et un seul de  $\mathcal{H}^+$  dans lui-même tel que  $(\sqrt{x})^2 = x$  pour tout  $x$  dans  $\mathcal{H}^+$ . Montrer que l'application  $\mathcal{H}^+ \times U(n) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  définie par  $(x, y) \mapsto xy$  est un  $C^\omega$ -difféomorphisme (appelé décomposition polaire de  $GL_n(\mathbb{C})$ ), d'inverse  $x \mapsto (\sqrt{x^* x}, \sqrt{x^* x}^{-1} x)$ . En déduire que  $GL_n(\mathbb{C})$  est  $C^\omega$ -difféomorphe à  $U(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$ , que  $SL_n(\mathbb{C})$  est  $C^\omega$ -difféomorphe à  $SU(n) \times \mathbb{R}^{n^2-1}$ , que  $GL_n(\mathbb{R})$  est  $C^\omega$ -difféomorphe à  $O(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ , que  $SL_n(\mathbb{R})$  est  $C^\omega$ -difféomorphe à  $SO(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}-1}$ .

On fera attention que  $U(n)$  et  $SU(n)$  ne sont pas des sous-variétés analytiques complexes de  $GL_n(\mathbb{C})$ .

## 2 Fibrés vectoriels

### 2.1 Sous-espaces tangents d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$

La notion de vecteur tangent (et, si ce vecteur tangent est non nul, de droite tangente) en un point d'une courbe de classe  $C^1$  dans  $\mathbb{R}^n$  est bien connue. Elle permet de définir, de manière élémentaire, la notion de vecteur tangent, et partant de sous-espace tangent, en un point d'une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ .

Soient  $p \leq n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $M$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  et de dimension  $p$ , et  $x$  un point de  $M$ .

Un vecteur  $v$  de  $\mathbb{R}^n$  est dit *tangent* à  $M$  en  $x$  s'il existe un intervalle ouvert  $I$  contenant 0 et une courbe  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ , à valeurs dans  $M$ , telle que

$$c(0) = x \quad \text{et} \quad \dot{c}(0) = v.$$

On note  $T_x M$  l'ensemble des vecteurs tangents à  $M$  en  $x$ .

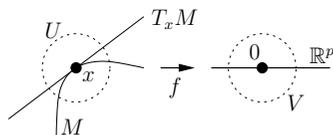
Le résultat suivant donne le calcul de  $T_x M$ , en fonction des différentes caractérisations locales des sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$  (voir théorème 1.5).

#### Proposition 2.1

##### • (Définition par redressement)

Si  $U$  est un voisinage ouvert de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$ , si  $V$  est un voisinage ouvert de 0 dans  $\mathbb{R}^p$  et  $f : U \rightarrow V$  un  $C^1$ -difféomorphisme tels que  $f(x) = 0$  et  $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ , alors

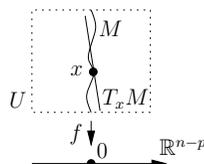
$$T_x M = df_x^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\}).$$



##### • (Définition par fonction implicite)

Si  $U$  est un voisinage ouvert de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$ , et si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$  est une application de classe  $C^1$  qui est une submersion en  $x$  avec  $f(x) = 0$ , tels que  $U \cap M = f^{-1}(0)$ , alors

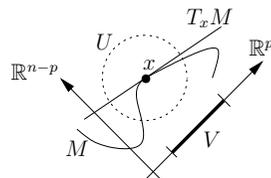
$$T_x M = \text{Ker } df_x.$$



##### • (Définition par graphe)

Si  $U$  est un voisinage ouvert de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ , si  $V$  est un voisinage ouvert de 0 dans  $\mathbb{R}^p$  et  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$  une application de classe  $C^1$ , tels que  $U \cap M = \text{graphe}(f)$  et  $x = (0, f(0))$ , alors

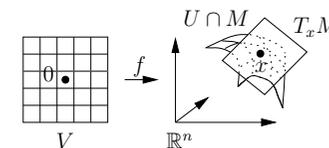
$$T_x M = \text{Im} \{v \mapsto (v, df_0(v))\}.$$



##### • (Définition par paramétrage)

Si  $U$  est un voisinage ouvert de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$ , si  $V$  est un voisinage ouvert de 0 dans  $\mathbb{R}^p$  et  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ , avec  $f(0) = x$ , est un paramétrage local  $C^1$  de  $U \cap M$  en  $x$ , alors

$$T_x M = \text{Im } df_0.$$



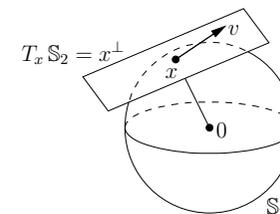
**Démonstration.** (1) Puisque  $f$  est un difféomorphisme  $C^1$  tel que  $f(x) = 0$ , une courbe  $c$  est tracée sur  $U \cap M$  avec  $c(0) = x$  et  $\dot{c}(0) = v$  si et seulement si la courbe  $f \circ c$  est tracée sur  $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$  avec  $f \circ c(0) = 0$  et  $(f \circ c)'(0) = df_x(v)$ . Puisque l'ensemble des vecteurs tangents en 0 à  $V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$  est  $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ , le résultat en découle. En particulier,  $T_x M$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $p$  de  $\mathbb{R}^n$ .

(2) Si  $c$  est une courbe tracée sur  $M$  telle que  $c(0) = x$ , alors  $f \circ c(t) = 0$  pour tout  $t$  assez petit, donc en dérivant  $df_x(\dot{c}(0)) = 0$  et le sous-espace vectoriel  $T_x M$  est contenu dans  $\text{Ker } df_x$ . Comme  $df_x$  est surjective, les dimensions de  $T_x M$  et de  $\text{Ker } df_x$  sont toutes les deux égales à  $p$ , et le résultat en découle.

(4) Pour tout  $v$  dans  $\mathbb{R}^p$ , soit  $c$  une courbe dans  $V$  telle que  $c(0) = 0$  et  $\dot{c}(0) = v$ . Alors  $f \circ c$  est une courbe  $C^1$  tracée sur  $f(V) = U \cap M$  telle que  $f \circ c(0) = x$  et  $(f \circ c)'(0) = df_x(v)$ , donc le sous-espace vectoriel  $T_x M$  contient  $\text{Im } df_x$ . Par injectivité de  $df_x$ , les dimensions de  $T_x M$  et de  $\text{Im } df_x$  sont toutes les deux égales à  $p$ , et le résultat en découle. L'assertion (3) découle immédiatement de (4).  $\square$

Comme montré dans la démonstration, l'ensemble  $T_x M$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $p$ , appelé le *sous-espace vectoriel tangent* à  $M$  en  $x$ . On appelle  $x + T_x M$  le *sous-espace affine tangent* à  $M$  en  $x$ . Lorsque l'on remplace  $\mathbb{R}^n$  par  $\mathbb{C}^n$  et la régularité  $C^1$  par la régularité analytique complexe, alors  $T_x M$  est un sous-espace vectoriel complexe de  $\mathbb{C}^n$ .

**Exemples.** (1) La sphère  $\mathbb{S}_n$  est définie comme la préimage de 1 par la submersion  $x \mapsto \|x\|^2$  de  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  dans  $\mathbb{R}$  (où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne usuelle de  $\mathbb{R}^n$ ). Donc le sous-espace tangent à  $\mathbb{S}_n$  en  $x$  est le noyau de l'application linéaire  $v \mapsto \langle v, x \rangle$ , c'est-à-dire  $T_x \mathbb{S}_n$  est l'orthogonal de  $x$  (pour le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^n$ ).



(2) Plus généralement, si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  est une submersion  $C^1$ , avec  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ , pour tout  $y \in f(U)$  et  $x \in f^{-1}(y)$ , avec  $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)\right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$  la matrice jacobienne

de  $f$  en  $x$ , il découle du deuxième point de la proposition 2.1 que le sous-espace vectoriel  $T_x(f^{-1}(y))$  tangent en  $x$  à la sous-variété  $f^{-1}(y)$  admet le système d'équations suivant :

$$\forall j, 1 \leq j \leq q, \quad \sum_{i=1}^p \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) X_i = 0.$$

(3) Par l'assertion (3) ci-dessus, si  $M$  est localement défini comme le graphe d'une application  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$  dans une décomposition  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$  de coordonnées  $(x, y)$ , alors l'équation du sous-espace affine tangent en  $(x_0, y_0 = f(x_0))$  est

$$y - y_0 = df_{x_0}(x - x_0).$$

Donc si  $\left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n-p}}$  est la matrice jacobienne de  $f$  en  $x_0$ , un système d'équations du sous-espace affine tangent est

$$\forall j, 1 \leq j \leq n-p, \quad Y_j - (y_0)_j = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0) (X_i - (x_0)_i).$$

L'exercice suivant montre que toute variété différentielle s'écrit, au voisinage de chacun de ses points, comme le graphe d'une application au-dessus de son espace tangent en ce point.

**Exercice E.18** Soient  $k \in (\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$  et  $M$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  passant par 0. Montrer que pour tout sous-espace vectoriel  $E$  supplémentaire de  $T_0M$ , il existe un voisinage  $U$  de 0 dans  $\mathbb{R}^n$  et un voisinage  $V$  de 0 dans  $T_0M$  tels que  $U \cap M$  soit le graphe, dans la décomposition  $\mathbb{R}^n = T_0M \oplus E$ , d'une application  $f : V \rightarrow E$  de classe  $C^k$ .

La réunion disjointe des sous-espaces affines tangents aux points d'une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  est naturellement munie d'une structure de (sous-)variété.

**Proposition 2.2** Soit  $M$  une sous-variété de classe  $C^{r+1}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $F = F_M$  la sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  formé des couples  $(x, v)$  de  $M \times \mathbb{R}^n$  tels que  $v \in T_xM$ . Alors  $F$  est une sous-variété de classe  $C^r$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

**Démonstration.** Soient  $(x_0, v_0)$  dans  $F$  et  $(W, \varphi)$  un paramétrage local  $C^{r+1}$  de  $M$  au voisinage de  $x_0$ , d'image  $U \cap M$ , où  $U$  est un voisinage de  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Montrons que  $(W \times \mathbb{R}^p, (x, v) \mapsto (\varphi(x), d\varphi_x(v)))$  est un paramétrage local  $C^r$  de  $F$  au voisinage de  $(x_0, v_0)$ . Comme  $T_xM = \text{Im } d\varphi_x$ , cette application paramètre un voisinage de  $(x_0, v_0)$  dans  $F$ . Elle est de classe  $C^r$ ; c'est une immersion en tout point de son domaine, car  $\varphi$  l'est et  $d\varphi_x$  est linéaire et injective, et la matrice jacobienne est triangulaire supérieure par blocs  $n \times p$  dans les décompositions  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$  de l'espace de départ et  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  de l'espace d'arrivée; c'est une application propre et bijective de  $W \times \mathbb{R}^p$  sur  $(U \times \mathbb{R}^n) \cap F$ , donc un homéomorphisme entre ces espaces.  $\square$

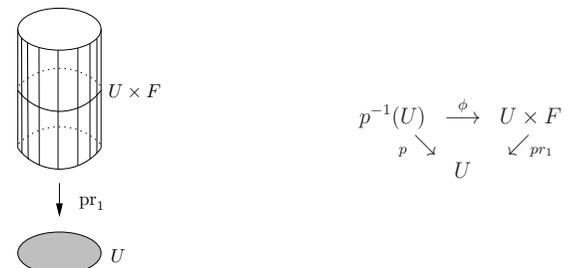
Considérons la projection  $p : F \rightarrow M$  définie par  $p(x, v) = x$ , qui est de classe  $C^r$ . Chaque fibre  $F_x = p^{-1}(x)$  est égale à  $\{x\} \times T_xM$ , donc est munie d'une structure d'espace vectoriel. On a envie de dire que cette structure d'espace vectoriel « dépend de manière  $C^r$  » de  $x$ , car les applications  $\psi : (x, v) \mapsto (\varphi(x), d\varphi_x(v))$  de la démonstration précédente sont des  $C^r$ -difféomorphismes sur leur image, et chaque fibre  $\{x\} \times \mathbb{R}^p$  de la première projection  $U \times \mathbb{R}^p \rightarrow U$  est naturellement munie d'une structure d'espace vectoriel, et  $\psi : \{x\} \times \mathbb{R}^p \rightarrow F_x$  est un isomorphisme linéaire.

Nous formalisons cette intuition dans le paragraphe suivant.

## 2.2 Fibrés vectoriels

Ce paragraphe est essentiellement constitué de définitions, les principaux exemples et résultats viendront dans les paragraphes suivants.

Soit  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ . Un *fibré vectoriel* réel (resp. complexe)  $\xi$  de classe  $C^r$  est la donnée d'une application  $p : E \rightarrow B$  de classe  $C^r$  entre deux variétés de classe  $C^r$  et, pour tout  $b$  dans  $B$ , d'une structure d'espace vectoriel réel (resp. complexe) sur  $E_b = p^{-1}(b)$ , de sorte que, pour tout  $b$  dans  $B$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $b$ , un espace vectoriel réel (resp. complexe)  $F$  de dimension finie, et un  $C^r$ -difféomorphisme  $\phi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ , tels que  $pr_1 \circ \phi = p|_{p^{-1}(U)}$ , c'est-à-dire tels que le diagramme suivant commute



et tels que  $pr_2 \circ \phi|_{E_y} : E_y \rightarrow F$  soit un isomorphisme  $\mathbb{R}$ -linéaire (resp.  $\mathbb{C}$ -linéaire) pour tout  $y$  dans  $U$ .

On dit que  $B$  est la *base*,  $E$  l'*espace total*,  $E_b = p^{-1}(b)$  la *fibre* au-dessus de  $b$ ,  $U$  un *ouvert distingué* ou *voisinage distingué* de  $b$ ,  $\phi$  une *trivialisat*ion locale de  $p$  au-dessus de  $U$ . Si toutes les fibres  $E_b$  sont de dimension  $n$  sur  $\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ ), on dit que le fibré vectoriel est de *rang* réel (resp. complexe)  $n$ . Si  $n = 1$ , on dit aussi *fibré en droites vectorielles*. Notons que si  $B$  est de dimension  $p$ , alors  $E$  est de dimension  $p + n$  (resp.  $p + 2n$ ). Par abus, on désignera souvent le fibré vectoriel  $\xi$  par son espace total  $E$ , l'application  $p$  et la structure d'espace vectoriel des fibres étant sous-entendus, ou par son application  $p$ .

Soient  $\xi$  et  $\xi'$  des fibrés vectoriels réels (resp. complexes) de classe  $C^r$ , d'applications  $p : E \rightarrow B$  et  $p' : E' \rightarrow B'$  respectivement. Un *morphisme*  $C^r$  (de fibrés vectoriels) de  $\xi$  dans  $\xi'$  est un couple d'applications  $(f, \bar{f})$  de classe  $C^r$  tel que le

diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{\bar{f}} & B' \end{array}$$

et tel que, pour tout  $x$  dans  $B$ , l'application  $f$  induit un morphisme d'espaces vectoriels réels (resp. complexes) de  $E_x = p^{-1}(x)$  dans  $E'_{\bar{f}(x)} = (p')^{-1}(\bar{f}(x))$ . Si  $p : E \rightarrow B$  est un fibré vectoriel, alors le couple  $(\text{id}, \text{id})$  est un morphisme du fibré vectoriel  $p$  dans lui-même, appelé le *morphisme identité*. Si  $(f, \bar{f})$  et  $(g, \bar{g})$  sont deux morphismes de  $p : E \rightarrow B$  sur  $p' : E' \rightarrow B'$  et de  $p' : E' \rightarrow B'$  sur  $p'' : E'' \rightarrow B''$  respectivement, alors le couple  $(g \circ f, \bar{g} \circ \bar{f})$  est un morphisme de fibrés vectoriels, appelé *composition* de  $(f, \bar{f})$  et  $(g, \bar{g})$ . Ainsi (voir l'appendice A.6) la collection des fibrés vectoriels  $C^r$  et des morphismes de fibrés vectoriels  $C^r$  est une catégorie.

Un *isomorphisme*  $C^r$  (de fibrés vectoriels) de  $\xi$  dans  $\xi'$  est (comme dans toute catégorie, donc) un morphisme  $(f, \bar{f})$  de  $\xi$  dans  $\xi'$  tel qu'il existe un morphisme  $(g, \bar{g})$  de  $\xi'$  dans  $\xi$  qui vérifie  $g \circ f = \text{id}$ ,  $f \circ g = \text{id}$ ,  $\bar{f} \circ \bar{g} = \text{id}$ ,  $\bar{g} \circ \bar{f} = \text{id}$ . Deux fibrés vectoriels sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme entre eux.

Lorsque  $B = B'$ , un *morphisme sur la base*  $B$  est un morphisme tel que  $\bar{f} = \text{id}$ , et de même pour les isomorphismes. Le contexte indique en général clairement si l'on parle de morphisme ou de morphisme sur la base.

Sauf mention explicite du contraire, tous les fibrés vectoriels seront réels dans ce texte.

Pour  $r' \leq r$ , une *section* (resp. *section de classe*  $C^{r'}$ ) d'un fibré vectoriel  $p : E \rightarrow B$  de classe  $C^r$  est une application  $s$  (resp. application  $s$  de classe  $C^{r'}$ ) de  $B$  dans  $E$  telle que  $p \circ s = \text{id}_B$ . Par exemple, l'application qui à un point  $b$  de  $B$  associe le vecteur nul de la fibre  $E_b$  est une section de classe  $C^r$ , appelée *section nulle*. La section nulle est un plongement de  $B$  dans  $E$ . Par contre, même si c'est localement vrai, il n'existe pas toujours (et c'est même peu fréquent) de section continue globale d'un fibré vectoriel qui ne s'annule en aucun point de la base (voir par exemple la partie 4.6.2).

Par exemple, si  $M$  est une variété  $C^r$ , la première projection  $pr_1 : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow M$  de la variété produit  $M \times \mathbb{R}^n$  dans  $M$  (avec la structure évidente d'espace vectoriel sur les fibres  $\{x\} \times \mathbb{R}^n$ ) est un fibré vectoriel (réel), de base  $M$ , de rang  $n$ , appelé *fibré vectoriel (réel) trivial* sur  $M$ . La première projection  $pr_1 : M \times \mathbb{C}^n \rightarrow M$  de la variété produit  $M \times \mathbb{C}^n$  dans  $M$  (avec la structure évidente d'espace vectoriel complexe sur les fibres  $\{x\} \times \mathbb{C}^n$ ) est un fibré vectoriel complexe, de base  $M$ , de rang complexe  $n$ , appelé *fibré vectoriel complexe trivial* sur  $M$ .

Tout fibré vectoriel isomorphe à un fibré vectoriel trivial est dit *trivialisable*. Par exemple, si  $p : E \rightarrow B$  est un fibré vectoriel, et si  $U$  est un ouvert distingué de  $B$ , alors la restriction de  $p$  à  $p^{-1}(U)$  est un fibré vectoriel trivialisable.

Si  $M$  est une variété analytique complexe, on définit un *fibré vectoriel holomorphe* sur  $M$  comme la donnée d'une application  $p : E \rightarrow M$  analytique complexe, où  $E$  est une variété analytique complexe, et, pour tout  $b$  dans  $B$ , d'une structure d'espace

vecteuriel complexe sur  $E_b = p^{-1}(b)$ , de sorte que, pour tout  $b$  dans  $B$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $b$ , un espace vectoriel complexe  $F$  de dimension finie, et un difféomorphisme analytique complexe  $\phi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ , tels que  $pr_1 \circ \phi = p|_{p^{-1}(U)}$ . On définit de manière analogue un morphisme de fibrés vectoriels holomorphes, un fibré vectoriel holomorphe trivial et un fibré vectoriel holomorphe trivialisable.

**Exercice E.19** (1) Montrer qu'un fibré vectoriel de rang  $n$  est trivialisable si et seulement s'il admet  $n$  sections linéairement indépendantes en tout point.

(2) En déduire qu'un fibré vectoriel de rang 1 est trivialisable si et seulement s'il admet une section ne s'annulant pas.

**Exercice E.20** Soient  $V$  un espace vectoriel de dimension finie sur le corps  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$ , et  $\mathcal{G}_k(V)$  la variété grassmannienne de rang  $k$  de  $V$ . Montrer que

$$\tau\mathcal{G}_k(V) = \{(x, v) \in \mathcal{G}_k(V) \times V : v \in x\}$$

est une sous-variété  $K$ -analytique de la variété produit  $\mathcal{G}_k(V) \times V$ , et que l'application  $(x, v) \mapsto x$  de  $\tau\mathcal{G}_k(V)$  dans  $\mathcal{G}_k(V)$  est un fibré vectoriel  $K$ -analytique sur  $\mathcal{G}_k(V)$  de rang  $k$ , en munissant la fibre  $\{x\} \times x$  au-dessus de  $x$  de la structure évidente d'espace vectoriel sur  $K$ .

Le fibré vectoriel  $\tau\mathcal{G}_k(V) \rightarrow \mathcal{G}_k(V)$  de cet exercice est appelé le *fibré tautologique* sur  $\mathcal{G}_k(V)$ . En particulier,

$$\tau\mathbb{P}(V) = \{(x, v) \in \mathbb{P}(V) \times V : v \in x\}$$

est une sous-variété  $K$ -analytique de la variété produit  $\mathbb{P}(V) \times V$ , et l'application  $(x, v) \mapsto x$  de  $\tau\mathbb{P}(V)$  dans  $\mathbb{P}(V)$  est, en munissant la fibre  $\{x\} \times x$  au-dessus de  $x$  de la structure évidente de droite vectorielle sur  $K$ , un fibré  $K$ -analytique en droites vectorielles sur  $\mathbb{P}(V)$ , appelé *fibré tautologique* sur  $\mathbb{P}(V)$ .

L'exemple crucial de fibré vectoriel au-dessus d'une variété  $M$  est le fibré tangent  $TM$  de  $M$ , construit dans le paragraphe ci-dessous. L'exemple crucial correspondant de section est celui des champs de vecteurs, dont nous traiterons dans le chapitre 3.

## 2.3 Fibré tangent

Soit  $M$  une variété  $C^{r+1}$  de dimension  $n$ , avec  $0 \leq r \leq \omega$ ,  $\omega + 1 = \infty$ ,  $\omega + 1 = \omega$ , et  $n$  dans  $\mathbb{N}$ .

De la même manière que nous avons utilisé les courbes tracées sur une sous-variété pour définir les vecteurs tangents à une sous-variété, nous pouvons utiliser les courbes pour définir les vecteurs tangents à une variété générale.

Un *1-jet de courbe* sur  $M$  est une classe d'équivalence de courbes  $c : I \rightarrow M$ , avec  $I$  un intervalle ouvert contenant 0, de classe  $C^1$  en 0, pour la relation d'équivalence « *coïncider au premier ordre* », définie par  $c_1 \sim c_2$  si  $c_1(0) = c_2(0)$  et pour toute

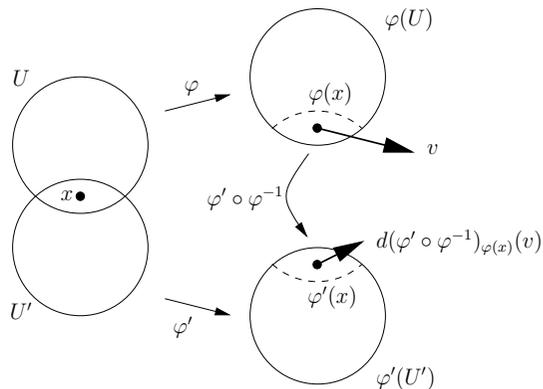
(ou de manière équivalente, pour une) carte locale  $(U, \varphi)$  de  $M$  en  $c_1(0)$ , les vecteurs tangents en 0 des courbes  $\varphi \circ c_1$  et  $\varphi \circ c_2$  sont égaux :

$$\widehat{\varphi \circ c_1}(0) = \widehat{\varphi \circ c_2}(0).$$

Nous notons  $TM$  l'ensemble des 1-jets de courbes sur  $M$ , et  $p : TM \rightarrow M$  l'application (bien définie) qui au 1-jet de la courbe  $c$  associe le point  $c(0)$ .

Nous allons montrer, de manière analogue au cas du sous-ensemble  $F$  de la proposition 2.2, que  $TM$  possède une structure naturelle de variété, et en plus que  $p : TM \rightarrow M$  possède une structure naturelle de fibré vectoriel.

Pour cela, nous serons guidés par le fait que la notion de vecteur tangent en un point  $x$  d'un ouvert  $U$  d'un espace  $\mathbb{R}^n$  est claire : l'espace tangent en  $x$  est naturellement  $\mathbb{R}^n$  lui-même. Comme une variété est localement difféomorphe à  $\mathbb{R}^n$  par ses cartes, il est naturel d'utiliser les cartes pour définir les vecteurs tangents. Le meilleur moyen pour rendre les vecteurs ainsi définis indépendants de cartes est d'utiliser une relation d'équivalence pour faire des identifications.



Un *vecteur tangent* à  $M$  est une classe d'équivalence de quadruplets  $(U, \varphi, x, v)$ , où  $x$  est un point de  $M$ ,  $(U, \varphi)$  une carte locale en  $x$  et  $v$  un point de  $\mathbb{R}^n$ , pour la relation d'équivalence  $(U, \varphi, x, v) \sim (U', \varphi', x', v')$  si et seulement si  $x' = x$  et  $d(\varphi' \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(v) = v'$ .

On note encore  $TM$  l'ensemble des vecteurs tangents à  $M$ ,  $p : TM \rightarrow M$  l'application induite par passage au quotient de

$$(U, \varphi, x, v) \mapsto x,$$

et  $T_x M$  l'ensemble  $p^{-1}(x)$ . On note souvent  $v$  un élément de  $TM$ , ou  $(x, v)$  avec  $p(v) = x$  quand on veut préciser le point base de  $v$ , et on l'identifie souvent avec l'un de ses représentants.

Il est immédiat que l'application qui à la classe d'un quadruplet  $(U, \varphi, x, v)$  associe le 1-jet de la courbe  $t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(x) + tv)$  est une bijection de l'ensemble des vecteurs tangents à  $M$  sur l'ensemble des 1-jets de courbe sur  $M$ , par laquelle nous identifions ces ensembles. Les deux projections  $p : TM \rightarrow M$  coïncident alors bien. La bijection réciproque est l'application qui au 1-jet d'une courbe  $c$  associe la classe d'équivalence du quadruplet  $(U, \varphi, x, v)$  où  $(U, \varphi)$  est une carte locale en  $c(0)$ , et  $x = c(0)$ ,  $v = \widehat{\varphi \circ c}(0)$ .

Si  $(U, \varphi)$  est une carte locale de  $M$ , l'application de  $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$  dans  $p^{-1}(U)$ , qui à  $(x, v)$  associe la classe d'équivalence de  $(U, \varphi, \varphi^{-1}(x), v)$  est une bijection. On note  $T\varphi : p^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$  son inverse, dont l'image est un ouvert de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

Si  $(U', \varphi')$  est une autre carte locale de  $M$ , l'application  $T\varphi' \circ (T\varphi)^{-1} : \varphi(U \cap U') \times \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi'(U \cap U') \times \mathbb{R}^n$  est le difféomorphisme de classe  $C^r$

$$(x, v) \mapsto (\varphi' \circ \varphi^{-1}(x), d(\varphi' \circ \varphi^{-1})_x(v)).$$

Donc si  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  est l'atlas maximal de cartes de  $M$ , la famille  $(p^{-1}(U_i), T\varphi_i)_{i \in I}$  est un atlas de cartes  $C^r$  de  $TM$ . Ceci permet (voir la remarque 1.6) de munir  $TM$  d'une topologie (l'unique topologie faisant de chaque  $T\varphi_i$  un homéomorphisme). Il est immédiat de vérifier que cette topologie est, comme celle de  $M$ , séparée et à base dénombrable. Nous munirons  $TM$  de la structure de variété différentielle  $C^r$  si  $r > 0$ , et de variété topologique si  $r = 0$ , définie par cet atlas. Il est important de remarquer cette perte de différentiabilité, lors du passage d'une variété à son fibré tangent, sauf bien sûr quand  $r = \infty$  ou  $r = \omega$ .

Si  $x$  est un point de  $M$ , et  $(U, \varphi)$  est une carte locale de  $M$  en  $x$  avec  $\varphi(x) = 0$ , l'application  $T\varphi$  induit une bijection de la partie  $T_x M$  de  $p^{-1}(U)$  sur la partie  $\{0\} \times \mathbb{R}^n$  de  $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ , ce qui permet de munir  $T_x M$  d'une structure d'espace vectoriel réel. Cette structure ne dépend pas de la carte en  $x$  choisie, car si  $(U', \varphi')$  est une autre telle carte en  $x$ , alors  $T\varphi' \circ (T\varphi)^{-1} : \{0\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \{0\} \times \mathbb{R}^n$  s'identifie avec  $d(\varphi' \circ \varphi^{-1})_0$ , qui est un automorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle *espace tangent* de  $M$  en  $x$  l'ensemble  $T_x M$  muni de cette structure d'espace vectoriel réel. On appelle  $p : TM \rightarrow M$ , et par abus  $TM$ , où  $T_x M = p^{-1}(x)$  est muni de cette structure d'espace vectoriel réel pour tout  $x$  dans  $M$ , le *fibré tangent* de  $M$ . Par construction, le fibré tangent de  $M$  est un fibré vectoriel réel de classe  $C^r$  sur  $M$ , de rang égal à la dimension de  $M$  : pour toute carte locale  $(U, \varphi)$  de  $M$ , l'application  $(\varphi^{-1} \times \text{id}) \circ T\varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  définie par

$$[U, \varphi, x, v] \mapsto (x, v)$$

est une trivialisatoin locale  $C^r$  du fibré vectoriel  $p$  au-dessus de  $U$ .

Si l'on remplace le corps  $\mathbb{R}$  par le corps  $\mathbb{C}$  et la régularité  $C^k$  par la régularité analytique complexe dans ce qui précède, comme la dérivée d'une application analytique complexe est un automorphisme linéaire complexe, l'espace tangent de  $M$  en  $x$  est cette fois muni d'une structure d'espace vectoriel complexe, et le fibré tangent de  $M$  est un fibré vectoriel holomorphe.

**Exemple.** Si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , muni de sa structure standard de variété, si  $\varphi$  est l'inclusion, alors l'application de  $U \times \mathbb{R}^n$  dans  $TU$ , qui à un couple  $(x, v)$  associe la classe d'équivalence de  $(U, \varphi, x, v)$ , est un isomorphisme du fibré vectoriel trivial  $\text{pr}_1 : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U$  sur le fibré vectoriel  $p : TU \rightarrow U$ . Nous identifierons dans la suite ces deux fibrés vectoriels par cette application. En particulier, pour tout  $x$  dans  $U$ , ceci identifie  $T_x U$  avec  $\{x\} \times \mathbb{R}^n$ , que l'on identifie encore avec  $\mathbb{R}^n$  par  $(x, v) \mapsto v$ .

La variété  $M$  est dite *parallélisable* si son fibré tangent est trivialisable. Une variété analytique complexe est dite *parallélisable* si son fibré tangent est trivialisable (au sens des fibrés vectoriels holomorphes).

**Exemples.** (1) Les ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , munis de leur structure standard de variété, sont parallélisables, par ce qui précède.

(2) Le cercle  $\mathbb{S}_1$  est parallélisable (voir l'exercice E.21).

## 2.4 Application tangente

Soient  $M, N$  deux variétés  $C^1$ , et  $f : M \rightarrow N$  une application. Si  $f$  est  $C^1$  en un point  $x_0$  de  $M$ , on note

$$T_{x_0} f : T_{x_0} M \rightarrow T_{f(x_0)} N$$

l'application qui au 1-jet d'une courbe  $c$  associe le 1-jet de la courbe  $f \circ c$ . Cette application est bien définie, le 1-jet de  $f \circ c$  ne dépendant que du 1-jet de  $c$  (regarder dans des cartes locales). Elle est appelée *l'application tangente* (ou la *différentielle* ou la *dérivée*) de  $f$  en  $x_0$  (et est aussi notée  $df_{x_0}$  (voir le paragraphe 4.1 pour la définition de la 1-forme différentielle  $df$  lorsque  $f$  est à valeurs réelles, et l'on ne confondra pas  $df$  avec l'application tangente) ou  $f'(x_0)$  ou  $D_{x_0} f$ ). Si  $f$  est  $C^1$  sur  $M$ , nous appelons *application tangente* de  $f$  l'application  $Tf : TM \rightarrow TN$ , définie par  $Tf(v) = T_x f(v)$  pour tout  $v$  dans  $T_x M$ .

**Proposition 2.3** (1) Si  $f$  est  $C^1$  en un point  $x_0$  de  $M$ , alors  $T_{x_0} f$  est linéaire.

(2) Si  $M$  et  $N$  sont  $C^{r+1}$  et si  $f$  est  $C^{r+1}$ , alors  $Tf : TM \rightarrow TN$  est de classe  $C^r$ .

**Démonstration.** (1) L'application

$$T_{x_0} f : T_{x_0} M \rightarrow T_{f(x_0)} N$$

est définie par

$$[U, \varphi, x_0, v] \mapsto [V, \psi, f(x_0), d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x_0)}(v)]$$

ne dépend pas du choix des cartes locales  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  de  $M$  et  $N$  en  $x_0$  et  $f(x_0)$  respectivement, telles que  $f(U) \subset V$ , par le théorème de dérivation des applications composées. Elle est linéaire par définition des structures d'espaces vectoriels sur les espaces tangents, et la linéarité des différentielles d'applications entre ouverts

d'espaces euclidiens. Elle coïncide avec l'application définie en début de partie, par l'identification entre vecteurs tangents et 1-jets de courbes.

(2) Nous allons montrer que l'application tangente à  $f$  est l'application de  $TM$  dans  $TN$ , qui, lue dans les cartes locales de  $TM$  et  $TN$  correspondant à des cartes locales de  $M$  et  $N$ , est donnée par la différentielle de l'application  $f$  lue dans ces dernières cartes.

En effet, si  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  sont des cartes locales de  $M$  et  $N$  en  $x_0$  et  $f(x_0)$  respectivement telles que  $f(U) \subset V$ , alors l'application  $Tf$  lue dans les cartes  $(TU, T\varphi)$  et  $(TV, T\psi)$  de  $TM$  et  $TN$  est l'application de  $T\varphi(TU) = \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$  dans  $\psi(V) \times \mathbb{R}^n = T\psi(TV)$  définie par

$$(x, v) \mapsto (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x), d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_x(v))$$

dont la première composante est l'application  $f$  lue dans les cartes, et la seconde composante sa différentielle. L'assertion (2) en découle.  $\square$

Il est immédiat que le couple  $(Tf, f)$  est alors un morphisme de fibrés vectoriels de  $TM \rightarrow M$  sur  $TN \rightarrow N$ , et en particulier que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array} .$$

**Propriétés.** (1) Si  $M$  et  $N$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^p$  respectivement, si  $f : M \rightarrow N$  est une application  $C^1$ , alors avec l'identification  $TM = M \times \mathbb{R}^n$  et  $TN = N \times \mathbb{R}^n$ , l'application tangente  $Tf : TM \rightarrow TN$  est

$$(x, v) \mapsto (f(x), df_x(v)) .$$

(2) Il est immédiat que le théorème de dérivation des applications composées s'étend : si  $L, M, N$  sont trois variétés  $C^1$ , et si  $f : L \rightarrow M$ ,  $g : M \rightarrow N$  sont deux applications  $C^1$ , alors

$$T(g \circ f) = (Tg) \circ (Tf) ,$$

c'est-à-dire, pour tout  $x$  dans  $L$ ,

$$T_x(g \circ f) = (T_{f(x)}g) \circ (T_x f) .$$

Comme il est aussi immédiat que  $T(\text{id}) = \text{id}$ , ceci signifie (voir l'appendice A.6) que la correspondance  $M \mapsto TM$  et  $f \mapsto Tf$  est un foncteur de la catégorie des variétés  $C^{r+1}$  dans la catégorie des variétés  $C^r$ . De plus, la correspondance qui à une variété  $M$  de classe  $C^{r+1}$  associe son fibré tangent  $TM \rightarrow M$  et à une application  $f : M \rightarrow N$  de classe  $C^{r+1}$  associe le couple  $(Tf, f)$ , est un foncteur de la catégorie des variétés  $C^{r+1}$  dans la catégorie des fibrés vectoriels  $C^r$ .

(3) En particulier, si  $f : M \rightarrow N$  est un  $C^{r+1}$ -difféomorphisme, alors  $Tf : TM \rightarrow TN$  est un  $C^r$ -difféomorphisme, et  $(Tf, f)$  est un isomorphisme de fibrés vectoriels.

(4) Soient  $N$  un espace vectoriel réel (resp. complexe) de dimension finie, et  $f, g : M \rightarrow N$  deux applications  $C^1$  en  $x_0$ . Si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  (resp.  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ) alors

$$T_{x_0}(\alpha f + \beta g) = \alpha T_{x_0}f + \beta T_{x_0}g.$$

Si  $B$  est une forme bilinéaire sur  $N$ , alors

$$T_{x_0}(B(f, g)) = B(T_{x_0}f, g(x_0)) + B(f(x_0), T_{x_0}g).$$

En particulier, si  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  sont  $C^1$ , alors

$$T_{x_0}(fg) = g(x_0)T_{x_0}f + f(x_0)T_{x_0}g,$$

et  $T(fg) = g(Tf) + f(Tg)$ .

(5) Soit  $f : M \rightarrow N$  une application  $C^k$  avec  $k \geq 1$ . Alors  $f$  est une immersion (resp. submersion) en un point  $x$  de  $M$  si et seulement si son application tangente en  $x$ , c'est-à-dire l'application linéaire  $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ , est injective (resp. surjective). De même,  $f$  est une application de rang constant au voisinage d'un point  $x$  de  $M$  si et seulement si le rang de l'application linéaire  $T_y f : T_y M \rightarrow T_{f(y)} N$  est constant pour  $y$  dans un voisinage de  $x$ . Par définition (voir paragraphe 1.3), ceci découle, en prenant des cartes locales, du cas où  $M$  et  $N$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ .

(6) Si  $M$  et  $N$  sont des variétés analytiques complexes et si  $f : M \rightarrow N$  est holomorphe, alors pour tout  $x$  dans  $M$ , l'application  $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  est linéaire sur  $\mathbb{C}$ , par construction. La correspondance, qui à une variété analytique complexe  $M$  associe son fibré tangent  $TM \rightarrow M$  et à une application holomorphe  $f : M \rightarrow N$  associe le couple  $(Tf, f)$ , est un foncteur de la catégorie des variétés analytiques complexes dans la catégorie des fibrés vectoriels holomorphes.

Si  $M$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ , alors  $f$  est appelée une *courbe* dans  $M$  (attention, le mot courbe possède plusieurs sens possibles en mathématiques, le contexte indiquant en général celui utilisé). En utilisant l'identification de  $TM$  avec  $M \times \mathbb{R}$  (voir le paragraphe suivant), et donc de  $T_{t_0} M$  avec  $\mathbb{R}$ , pour tout  $t_0$  dans  $\mathbb{R}$ , l'application linéaire  $T_{t_0} f : \mathbb{R} \rightarrow T_{f(t_0)} N$  est déterminée par l'image de 1, et on pose

$$\dot{f}(t_0) = \frac{df}{dt}\Big|_{t=t_0} = T_{t_0} f(1).$$

On note aussi  $\dot{f} = \frac{df}{dt}$  la courbe  $M \rightarrow TN$  définie par

$$\frac{df}{dt} : x \mapsto \frac{df}{dt}\Big|_{t=x}.$$

**Remarques.** (1) Un moyen bien pratique pour calculer les espaces tangents est d'utiliser que ce sont les ensembles de vecteurs tangents de courbes, et d'écrire avec les notations précédentes :  $T_x M = \{\dot{c}(0) \mid c : I \rightarrow M \text{ } C^1, c(0) = x, 0 \in \overset{\circ}{I}\}$  et  $TM = \{\dot{c}(0) \mid c : I \rightarrow M \text{ } C^1, 0 \in \overset{\circ}{I}\}$

(2) Un moyen bien pratique pour calculer les applications tangentes est parfois d'utiliser la définition de l'application tangente par les 1-jets de courbes : si  $f : M \rightarrow N$  est une application  $C^1$  et  $x \in M$ , alors  $T_x f$  est l'unique application (linéaire)  $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  telle que, pour toute courbe  $c : ]-\epsilon, +\epsilon[ \rightarrow M$  de classe  $C^1$  sur  $M$  telle que  $c(0) = x$ , on ait

$$T_x f(\dot{c}(0)) = \widehat{f \circ c}(0).$$

(3) Il n'y a que très rarement besoin de revenir à la construction même de l'espace tangent, qui sert surtout à mettre une structure de variété différentielle sur la réunion disjointe des espaces tangents à chaque point. La construction et sa naturalité permettent dans la plupart des cas de problèmes locaux, de « se ramener » au cas des ouverts des espaces euclidiens aussi en ce qui concerne l'espace tangent et les applications tangentes. Nous allons illustrer ceci dans les exemples suivant.

## 2.5 Exemples

Pour chacun des exemples familiaux du paragraphe 2.5, nous explicitons son espace tangent. Une bonne connaissance de ces exemples permet aussi de ne pas revenir à la construction générale.

• **Sous-variétés.** Explicitons le fibré tangent des sous-variétés d'un espace  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $M$  une sous-variété  $C^{r+1}$  de dimension  $p$  de  $\mathbb{R}^n$ . Considérons le sous-ensemble  $F = F_M$  des couples  $(x, v)$  de  $M \times \mathbb{R}^n$  tels qu'il existe une courbe  $c : ]-\epsilon, +\epsilon[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ , d'image contenue dans  $M$ , et telle que  $c(0) = x$  et  $\dot{c}(0) = v$ . Nous avons vu (dans la proposition 2.2) que cet ensemble est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

Considérons la projection  $p : F \rightarrow M$  définie par  $p(x, v) = x$ , qui est de classe  $C^r$ . Chaque fibre  $F_x = p^{-1}(x)$  est égale à  $\{x\} \times T_x M$  où  $T_x M$  est le sous-espace vectoriel tangent à la sous-variété  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  (voir le paragraphe 2.1), donc est munie d'une structure d'espace vectoriel.

**Proposition 2.4** Avec ces notations,  $p : F \rightarrow M$  est un fibré vectoriel isomorphe au fibré tangent  $\pi : TM \rightarrow M$ .

**Démonstration.** Soit  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  l'ensemble des paramétrages locaux de la sous-variété  $M$ . Alors  $\{(\varphi_i(U_i), \varphi_i^{-1})\}_{i \in I}$  est un atlas de cartes de la variété  $M$ . Pour  $x$  dans  $M$ , pour tout  $i$  tel que  $x \in \varphi_i(U_i)$ , l'application  $d(\varphi_i)_{\varphi_i^{-1}(x)}$  est un isomorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^p$  sur le sous-espace vectoriel  $F_x = \{v \in \mathbb{R}^n : (x, v) \in F\}$ , comme vu au paragraphe 2.1. Considérons l'application  $\Theta$  de  $TM$  dans  $F$  définie par

$$[\varphi_i(U_i), \varphi_i^{-1}, x, v] \mapsto (x, d(\varphi_i)_{\varphi_i^{-1}(x)}(v)).$$

Par définition des structures différentielles de  $F$  et de  $TM$ , l'application  $\Theta$  est un  $C^r$ -difféomorphisme, qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\Theta} & F \\ \pi \searrow & & \swarrow p \\ & M & \end{array}$$

En restriction aux fibres,  $\Theta$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En précomposant par  $\Theta^{-1}$  une trivialisatoin locale de  $TM$  au dessus d'un ouvert  $U$ , on obtient donc une trivialisatoin locale de  $p : F \rightarrow M$  au-dessus de  $U$ . Donc  $p : F \rightarrow M$  est un fibré vectoriel isomorphe au fibré tangent  $TM$  au-dessus de la base  $M$ .  $\square$

Nous identifierons dans la suite le fibré tangent  $TM$  d'une sous-variété  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  avec ce fibré  $F = F_M$ , par l'isomorphisme  $\Theta$  donné par la démonstration ci-dessus. On retrouve ainsi l'identification du fibré tangent d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  avec  $U \times \mathbb{R}^n$ .

L'espace tangent  $T_x M$  en un point de la variété  $M$  (au sens du paragraphe 2.3) s'identifie alors au sous-espace tangent  $T_x M$  en  $x$  de la sous-variété  $M$  (au sens du paragraphe 2.1), par l'application  $\Theta|_{T_x M} : T_x M \rightarrow F_x$  composée avec l'identification  $(x, v) \mapsto v$  de  $F_x$  avec le sous-espace tangent en  $x$  à la sous-variété  $M$ , ce qui explique que nous les ayons notés de la même manière.

Si  $M$  et  $N$  sont deux sous-variétés  $C^1$  de  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$ , si  $f : M \rightarrow N$  est une application  $C^1$  en un point  $x$  de  $M$ , alors avec l'identification de  $TM$  et  $F_M$ , et de  $TN$  et  $F_N$ , l'application  $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  entre les sous-espaces tangents  $T_x M$  et  $T_{f(x)} N$  aux sous-variétés  $M$  et  $N$  est l'application

$$v \mapsto \widehat{f \circ c}(0),$$

où  $c : I \rightarrow M$  est une courbe  $C^1$  tracée sur  $M$  telle que  $c(0) = x$  et  $\dot{c}(0) = v$  (ce qui ne dépend pas des choix). Si  $f : M \rightarrow N$  est  $C^1$ , alors  $Tf : TM \rightarrow TN$  est l'application  $(x, v) \mapsto (f(x), T_x f(v))$ . Si  $f$  est la restriction d'une application  $C^1$ , encore notée  $f$ , d'un voisinage de  $M$  dans  $\mathbb{R}^m$  à valeurs dans un voisinage de  $N$  dans  $\mathbb{R}^n$ , alors  $Tf$  est l'application  $(x, y) \mapsto (f(x), df_x(y))$ .

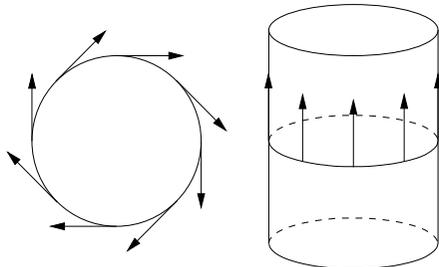
Par exemple, pour  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ , si la sous-variété  $M$  est la sphère de dimension  $n$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , notée

$$\mathbb{S}_n = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\},$$

alors  $T\mathbb{S}_n$  est isomorphe au fibré vectoriel

$$\{(x, v) \in \mathbb{S}_n \times \mathbb{R}^{n+1} : v \in x^\perp\}$$

muni de la projection évidente sur  $\mathbb{S}_n$ , où  $z^\perp$  désigne l'orthogonal de  $z$  pour le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^n$ .



**Exercice E.21** Montrer que le cercle  $\mathbb{S}_1$  est parallélisable, c'est-à-dire que son fibré tangent  $T\mathbb{S}_1$  est isomorphe au fibré trivial  $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}$  (voir la figure ci-dessus).

• **Plongements.**

**Exercice E.22** Soient  $M, N$  deux variétés  $C^{r+1}$ , où  $0 \leq r \leq \omega$  et  $f : M \rightarrow N$  une application  $C^{r+1}$ . Si  $f$  est un plongement  $C^{r+1}$ , alors l'application tangente  $Tf : TM \rightarrow TN$  est un plongement  $C^r$ .

Si  $M'$  est une sous-variété  $C^{r+1}$  de  $M$ , alors on identifie  $TM'$  avec son image dans  $TM$  par l'application tangente de l'inclusion de  $M'$  dans  $M$ . En particulier, si  $U$  est un ouvert de  $M$ , alors on identifie le fibré tangent à  $U$  avec la restriction à  $p^{-1}(U)$  de la projection  $p : TM \rightarrow M$ . Si  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $TM$  se plonge dans  $\mathbb{R}^{2n}$ .

• **Images réciproques.** Fixons un élément  $k$  dans  $(\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$ , deux variétés  $M$  et  $N$  de classe  $C^{k+1}$  et de dimension  $m$  et  $n$  respectivement, et une application  $f : M \rightarrow N$  de classe  $C^{k+1}$ .

**Exercice E.23** (1) Si  $f : M \rightarrow N$  est une application de classe  $C^1$ , de rang constant  $r$ , si  $x \in M$  et  $y = f(x)$  alors l'espace tangent en  $x$  à la sous-variété  $f^{-1}(y)$  est

$$T_x(f^{-1}(y)) = \text{Ker}(T_x f).$$

(2) Si  $f : M \rightarrow N$  est une submersion  $C^1$ , si  $S$  est une sous-variété  $C^1$  de  $N$ , alors, pour tout  $x$  dans  $f^{-1}(S)$ , on a

$$T_x(f^{-1}(S)) = (T_x f)^{-1}(T_{f(x)} S).$$

En particulier, si  $y$  est une valeur régulière de  $f$  alors pour tout  $x$  dans  $f^{-1}(y)$ , on a  $T_x(f^{-1}(y)) = \text{Ker}(T_x f)$ .

• **Sommes disjointes.** Soit  $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$  une famille au plus dénombrable de variétés différentielles de classe  $C^k$  et de dimension  $n$ . Si  $M$  est la variété somme disjointe des  $M_\alpha$ , alors  $TM$  est le fibré vectoriel somme disjointe des fibrés vectoriels  $TM_\alpha$ .

• **Produits.** Soit  $k$  un élément de  $\mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ .

**Exercice E.24** Montrer que si  $N$  est une variété produit  $N_1 \times N_2$  de classe  $C^{k+1}$ , alors il existe un  $C^k$ -difféomorphisme

$$TN \simeq TN_1 \times TN_2$$

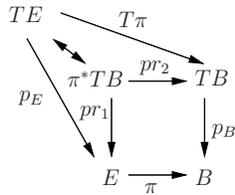
(par lequel on identifie  $TN$  et  $TN_1 \times TN_2$ ), tel que, pour toute variété  $M$  de classe  $C^{k+1}$ , pour toute application  $f : M \rightarrow N$  de classe  $C^{k+1}$ , si  $f = (f_1, f_2)$ , alors avec l'identification ci-dessus, l'application tangente  $Tf$  coïncide avec  $(Tf_1, Tf_2)$ .

En déduire que les tores sont parallélisables.

• **Revêtements.**

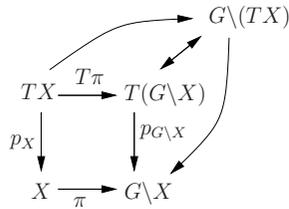
**Exercice E.25** Soit  $\pi : E \rightarrow B$  un revêtement  $C^{r+1}$ , et  $p_B : TB \rightarrow B$  la projection canonique. Montrer que l'ensemble  $\pi^*TB = \{(x, y) \in E \times TB : \pi(x) = p_B(y)\}$ , muni de la projection  $pr_1 : (x, y) \mapsto x$  sur  $E$  admet une unique structure de fibré vectoriel  $C^r$  de base  $E$  tel que  $(pr_2, \pi)$  soit un morphisme de fibrés vectoriels  $C^r$ .

Montrer que les fibrés  $\pi^*TB$  et  $TE$  sur  $E$  sont isomorphes par un isomorphisme rendant le diagramme suivant commutatif :



Soit  $G$  un groupe discret agissant librement et proprement par  $C^{r+1}$ -difféomorphismes sur une variété  $X$  de classe  $C^{r+1}$ . Montrer que l'application  $(g, v) \mapsto Tg(v)$  de  $G \times TX$  dans  $TX$  est une action libre et propre de  $G$  par  $C^r$ -difféomorphismes, que la projection canonique  $p_X : TX \rightarrow X$  est  $G$ -équivariante, et que l'application  $\bar{p} : G \backslash (TX) \rightarrow G \backslash X$ , induite de  $p_X$  par passage au quotient, est un fibré vectoriel de classe  $C^r$ .

Montrer que les fibrés  $T(G \backslash X)$  et  $G \backslash (TX)$  sur  $G \backslash X$  sont isomorphes par un isomorphisme rendant le diagramme suivant commutatif :



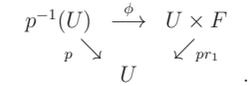
En particulier, en notant  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^n$ , montrer que  $T\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  est  $C^\omega$ -difféomorphe à la variété quotient

$$\{(x, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1, \langle x | v \rangle = 0\} / ((x, v) \sim (-x, -v)).$$

**2.6 Fibrations**

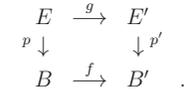
Soit  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ . Une *fibration* (ou *fibré localement trivial*) de classe  $C^r$  est une application  $p : E \rightarrow B$  de classe  $C^r$  entre deux variétés de classe  $C^r$ , de sorte

que pour tout  $b$  dans  $B$ , il existe une variété  $F$  de classe  $C^r$ , un voisinage ouvert  $U$  de  $b$ , et un  $C^r$ -difféomorphisme  $\phi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ , tels que  $pr_1 \circ \phi = p|_{p^{-1}(U)}$ , c'est-à-dire tels que le diagramme suivant commute



On dit que  $B$  est la *base*,  $E$  l'*espace total*,  $p^{-1}(b)$  la *fibres* au-dessus de  $b$ ,  $U$  un *ouvert distingué* ou *voisinage ouvert distingué* de  $b$ ,  $\phi$  une *trivialisations locale* de  $p$  au-dessus de  $U$ . Lorsque  $F$  est fixé, et ne dépend pas de  $b$ , on parle de *fibration de fibres*  $F$ . Par abus, on désignera souvent par son espace total  $E$  la fibration  $p$ , l'application  $p$  étant sous-entendue.

Soient  $p : E \rightarrow B$  et  $p' : E' \rightarrow B'$  des fibrations de classe  $C^r$ . Un *morphisme*  $C^r$  de  $p$  dans  $p'$  est un couple d'applications  $(g, f)$  de classe  $C^r$  tel que le diagramme suivant commute :



Un *isomorphisme*  $C^r$  (de fibrations) de  $p$  dans  $p'$  est un morphisme  $(g, f)$  de  $p$  dans  $p'$  tel qu'il existe un morphisme  $(g', f')$  de  $p'$  dans  $p$  qui vérifie  $g \circ g' = id, g' \circ g = id, f \circ f' = id, f' \circ f = id$ . Deux fibrations sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme entre eux.

Lorsque  $B = B'$ , un *morphisme sur la base*  $B$  est un morphisme tel que  $f = id$ , et de même pour les isomorphismes. Le contexte indique en général clairement si l'on parle de morphisme ou de morphisme sur la base.

Pour  $r' \leq r$ , une *section*  $C^{r'}$  d'une fibration  $p : E \rightarrow B$  de classe  $C^r$  est une application  $s$  de classe  $C^{r'}$  de  $B$  dans  $E$  telle que  $p \circ s = id_B$ . Une telle section continue globale (c'est-à-dire définie sur tout  $B$ ) n'existe en général pas.

**Exemples et remarques.** (1) Si  $M$  et  $F$  sont deux variétés  $C^r$ , la première projection  $pr_1 : M \times F \rightarrow M$  de la variété produit  $M \times F$  dans  $M$  est une fibration de fibres  $F$ , de base  $M$ , dite *triviale*. Toute fibration isomorphe à une fibration triviale est dite *trivialisable*. Une fibration trivialisable admet beaucoup de sections globales  $C^r$  : pour tout  $y$  dans  $F$ , l'application  $x \mapsto (x, y)$  est une section globale  $C^r$  de  $pr_1 : M \times F \rightarrow M$ . Par exemple, si  $p : E \rightarrow B$  est une fibration, et  $U$  un ouvert distingué de  $B$ , alors la restriction de  $p$  à  $p^{-1}(U)$  est une fibration trivialisable. Donc une fibration (localement triviale) admet de nombreuses sections locales (c'est-à-dire définies sur un voisinage suffisamment petit de tout point).

Par exemple, l'application  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow ]0, +\infty[$  définie par

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto x_0^2 + \dots + x_n^2$$

est une fibration analytique réelle, de fibres  $\mathbb{S}_n$ , qui est trivialisable.

(2) Les revêtements sont les fibrations de fibres discrètes.

(3) Les fibrés vectoriels  $C^r$  de rang  $n$  sont des fibrations  $C^r$  (de fibre la variété  $\mathbb{R}^n$ ). Mais une fibration de fibre la variété  $\mathbb{R}^n$  n'admet peut-être pas de manière évidente une structure de fibré vectoriel (compatible avec celle de fibration). Par exemple, le groupe  $\mathbb{Z}$  agit librement et proprement par difféomorphismes analytiques réels sur  $\mathbb{R}^2$ , l'action de 1 étant  $(x, y) \mapsto (x + 1, \sinh y)$ . Soit  $M$  la variété quotient analytique réelle  $\mathbb{Z} \backslash \mathbb{R}^2$ . L'application analytique réelle  $(x, y) \mapsto x$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  induit par passage au quotient une fibration analytique réelle  $M \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}_1$ , de fibre  $\mathbb{R}$ . Mais cette fibration n'admet pas de structure de fibré vectoriel, compatible avec sa structure de fibration, telle que la projection canonique  $\mathbb{R}^2 \rightarrow M$  soit un isomorphisme linéaire en restriction à chaque droite verticale.

(4) Soit  $p : E \rightarrow B$  un fibré vectoriel  $C^r$  de rang  $n$ , et  $k$  un élément de  $\{1, \dots, n\}$ . On note  $\mathcal{G}_k E$  l'ensemble somme disjointe  $\coprod_{b \in B} \mathcal{G}_k(E_b)$  des variétés grassmanniennes de rang  $k$  des fibres de  $p$ , et  $\mathcal{G}_k p : \mathcal{G}_k E \rightarrow B$  l'application qui à un élément de  $\mathcal{G}_k(E_b)$  associe  $b$ . Cette application admet alors une unique structure de fibration  $C^r$  telle que, pour toute (inverse de) trivialisations locale  $h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow p^{-1}(U)$  au dessus d'un ouvert  $U$  de  $B$ , l'application  $U \times \mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow (\mathcal{G}_k p)^{-1}(U)$  définie par  $(x, A) \mapsto h(x, A)$  soit (l'inverse d'une) trivialisations locale de  $\mathcal{G}_k p : \mathcal{G}_k E \rightarrow B$  au dessus de  $U$ . Cette fibration (ou par abus la variété  $\mathcal{G}_k E$ ) s'appelle la *fibration grassmannienne de rang  $k$  de  $E$*  ou *fibré des  $k$ -plans* de  $E$ . En particulier, si  $k = 1$ , alors la fibration grassmannienne de rang 1 de  $E$  est notée  $\mathbb{P}(p) : \mathbb{P}(E) \rightarrow B$ , et appelée la *fibration projective* de  $E$ .

Si le couple  $(f, \bar{f})$  est un morphisme de fibrés vectoriels de  $p : E \rightarrow B$  sur  $p' : E' \rightarrow B'$ , avec  $f$  injective en restriction à chaque fibre de  $E$ , alors le couple  $(\mathcal{G}_k f : A \mapsto f(A), \bar{f})$  est un morphisme de fibrations de  $\mathcal{G}_k p : \mathcal{G}_k E \rightarrow B$  sur  $\mathcal{G}_k p' : \mathcal{G}_k E' \rightarrow B$ . Ainsi, avec des vérifications immédiates, nous venons de définir un foncteur (voir l'appendice A.6) de la catégorie des fibrés vectoriels et des morphismes de fibrés vectoriels injectifs sur les fibres dans celle des fibrations.

Si  $M$  est une variété  $C^{r+1}$ , alors on appelle *fibration grassmannienne* de rang  $k$  de  $M$  ou *fibré des  $k$ -plans* de  $M$ , la fibration grassmannienne de rang  $k$  du fibré tangent  $\pi : TM \rightarrow M$  de  $M$ .

Par exemple, si  $E$  est le fibré vectoriel trivial  $B \times \mathbb{R}^n$  alors la fibration grassmannienne de rang  $k$  de  $E$  est isomorphe à la fibration triviale  $pr_1 : B \times \mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow B$ . En particulier, si  $M$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , comme le fibré tangent  $TM$  de  $M$  s'identifie avec  $M \times \mathbb{R}^n$ , alors la fibration grassmannienne de rang  $k$  de  $TM$  est isomorphe à la fibration triviale  $pr_1 : M \times \mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow M$ .

(5) Il est immédiat qu'une fibration est une submersion surjective. En particulier, toute fibre est une sous-variété  $C^r$  de l'espace total. Toute submersion est localement une fibration, par le théorème 1.8 de forme normale locale. Mais il existe des submersions qui ne sont pas des fibrations. Par exemple, l'application  $x \mapsto x^3 - 3x$  de  $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$  dans  $\mathbb{R}$  est une submersion surjective, qui n'est pas une fibration (car le cardinal des fibres est fini et non localement constant). Mais nous avons le résultat suivant que nous admettons dans ces notes.

**Théorème 2.5 (Théorème de fibration d'Ehresmann)** *Soit  $r \in (\mathbb{N} - \{0\}) \cup$*

$\{\infty\}$ . Une submersion surjective propre de classe  $C^r$  est une fibration de classe  $C^r$ .  $\square$

En particulier, une submersion surjective de classe  $C^r$  d'une variété compacte  $M$  de classe  $C^r$  sur une variété  $N$  de classe  $C^r$  est une fibration de classe  $C^r$ .

## 2.7 Le fibré des formes alternées

Soit  $M$  une variété  $C^{r+1}$  de dimension  $n$ , avec  $0 \leq r \leq \omega$  et  $n$  dans  $\mathbb{N}$ . Dans cette partie,  $p$  désigne un élément de  $\mathbb{N}$ . Nous renvoyons à l'appendice A.5 pour des rappels sur les formes multilinéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension finie.

Notons  $\pi : TM \rightarrow M$  le fibré tangent de  $M$ . Notons

$$\Lambda^* T^* M = \coprod_{x \in M} \Lambda^*(T_x M)^*$$

l'ensemble réunion disjointe des espaces vectoriels de dimension finie des formes multilinéaires alternées sur les espaces tangents aux points  $x$  de  $M$ , ainsi que

$$\Lambda^p T^* M = \coprod_{x \in M} \Lambda^p(T_x M)^*$$

et

$$T^* M = \Lambda^1 T^* M = \coprod_{x \in M} (T_x M)^*.$$

Soit  $\lambda_* : \Lambda^* T^* M \rightarrow M$  (resp.  $\lambda_p : \Lambda^p T^* M \rightarrow M$ ) l'application qui à un élément de  $\Lambda^*(T_x M)^*$  (resp.  $\Lambda^p(T_x M)^*$ ) associe  $x$  (les notations  $\lambda_p$  et  $\lambda_*$  ne sont pas standard). Notons que  $\Lambda^0 T^* M$  s'identifie avec  $M \times \mathbb{R}$ , et  $\lambda_0$  avec la première projection. Les inclusions de  $\Lambda^p(T_x M)^*$  dans  $\Lambda^*(T_x M)^*$  pour tout  $x$  dans  $M$  induisent une inclusion de  $\Lambda^p T^* M$  dans  $\Lambda^* T^* M$ , et  $\lambda_p$  est la restriction de  $\lambda_*$  à  $\Lambda^p T^* M$ .

Nous allons munir l'application  $\lambda_* : \Lambda^* T^* M \rightarrow M$  d'une structure de fibré vectoriel, de manière complètement analogue à la construction du fibré tangent (voir la partie 2.3). Si  $(U, \varphi)$  est une carte locale de  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , notons

$$\lambda_* \varphi : \lambda_*^{-1}(U) \rightarrow U \times \Lambda^*(\mathbb{R}^n)^*$$

la bijection telle que, pour tout  $x$  dans  $U$  et  $\omega_x$  dans  $\Lambda^*(T_x M)^*$ ,

$$\lambda_* \varphi(\omega_x) = (x, ((T_x \varphi)^{-1})^* \omega_x).$$

**Proposition 2.6** *Il existe une et une seule structure de fibré vectoriel de classe  $C^r$  sur  $\lambda_* : \Lambda^* T^* M \rightarrow M$  telle que, pour toute carte locale  $(U, \varphi)$  de classe  $C^{r+1}$  de  $M$ , la partie  $\lambda_*^{-1}(U)$  soit un ouvert de  $\Lambda^* T^* M$  et l'application  $\lambda_* \varphi$  soit une trivialisations locale  $C^r$  du fibré vectoriel  $\lambda_*$  au-dessus de  $U$ .*

On construit de même une unique structure de fibré vectoriel  $C^r$  sur

$$\lambda_p : \Lambda^p T^*M \rightarrow M$$

telle que, pour toute carte locale  $(U, \varphi)$  de classe  $C^{r+1}$  de  $M$ , la partie  $\lambda_p^{-1}(U)$  soit un ouvert de  $\Lambda^p T^*M$  et l'application  $\lambda_p \varphi$  qui associe à  $\omega_x \in \Lambda^p(T_x M)^*$  le couple  $(x, ((T_x \varphi)^{-1})^* \omega_x)$ , soit une trivialisatoin locale  $C^r$  du fibré vectoriel  $\lambda_p$  au-dessus de  $U$ . Le fibré vectoriel  $\lambda_p : \Lambda^p T^*M \rightarrow M$  est un sous-fibré vectoriel du fibré vectoriel  $\lambda_* : \Lambda^* T^*M \rightarrow M$ .

**Démonstration.** Si  $(U, \varphi)$  et  $(U', \varphi')$  sont deux cartes locales de  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , notons

$$\overline{\lambda_* \varphi} = (\varphi \times \text{id}) \circ \lambda_* \varphi : \lambda_*^{-1}(U) \rightarrow \varphi(U) \times \Lambda^*(\mathbb{R}^n)^*$$

l'application définie par  $\omega_x \mapsto (\varphi(x), (T_x \varphi)^{-1} \omega_x)$ . L'application  $\overline{\lambda_* \varphi'} \circ (\overline{\lambda_* \varphi})^{-1} : \varphi(U \cap U') \times \Lambda^*(\mathbb{R}^n)^* \rightarrow \varphi'(U \cap U') \times \Lambda^*(\mathbb{R}^n)^*$  est le  $C^r$ -difféomorphisme

$$(x, \omega) \mapsto (\varphi' \circ \varphi^{-1}(x), ((d(\varphi' \circ \varphi^{-1})_x)^{-1})^*(\omega)).$$

Donc l'ensemble des couples  $(\lambda_*^{-1}(U), \overline{\lambda_* \varphi})$ , lorsque  $(U, \varphi)$  parcourt l'ensemble des cartes locales  $C^{r+1}$  de  $M$ , est un atlas de cartes  $C^r$  sur  $\Lambda^* T^*M$ . Ceci permet (voir la remarque 1.6) de munir  $\Lambda^* T^*M$  d'une topologie, et d'une structure de variété  $C^r$ . Il est immédiat de vérifier que cette topologie est, comme celle de  $M$ , séparée et à base dénombrable, que l'application  $\lambda_*$  est  $C^r$ , et que  $\lambda_* \varphi$  est une trivialisatoin locale  $C^r$  au-dessus de  $U$  pour une structure de fibré vectoriel  $C^r$  sur  $\lambda_*$ . L'unicité est claire.  $\square$

**Exercice E.26** Montrer que la structure de fibré vectoriel  $C^r$  sur  $\lambda_p : \Lambda^p T^*M \rightarrow M$  construite ci-dessus est l'unique structure de fibré vectoriel  $C^r$  telle que, pour tout ouvert  $U$  de  $M$ , pour toute section  $s : U \rightarrow \Lambda^p T^*M$  de  $\lambda_p$  sur  $U$  de classe  $C^r$ , pour tous les champs de vecteurs (voir la partie 3)  $X_1, \dots, X_p$  de classe  $C^r$  sur  $U$ , l'application de  $U$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$x \mapsto s_x(X_1(x), \dots, X_p(x))$$

est de classe  $C^r$ .

Le fibré vectoriel  $\lambda_p : \Lambda^p T^*M \rightarrow M$  s'appelle le *fibré des  $p$ -formes alternées* sur  $M$ . Le fibré vectoriel  $\lambda_* : \Lambda^* T^*M \rightarrow M$  s'appelle le *fibré des formes alternées* sur  $M$ . Le fibré vectoriel  $\lambda_1 : T^*M \rightarrow M$ , dont la fibre au-dessus de chaque point  $x$  de  $M$  est l'espace dual à l'espace tangent à  $M$  en  $x$ , s'appelle le *fibré cotangent* de  $M$ .

Une section du fibré  $\lambda_*$  s'appelle une *forme différentielle*. Nous reviendrons longuement sur cette notion au chapitre 4.

## 2.8 Opérations sur les fibrés vectoriels

Soit  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ .

### • Image réciproque.

Soit  $\xi$  un fibré vectoriel de classe  $C^r$ , d'application  $p : E \rightarrow B$ . Soit  $f : M \rightarrow B$  une application  $C^r$ . Le *fibré vectoriel image réciproque* de  $\xi$  par  $f$  est le fibré vectoriel, noté  $f^* \xi$ , défini de la manière suivante. Posons

$$f^* E = \{(x, y) \in M \times E : f(x) = p(y)\},$$

notons  $\tilde{p} : f^* E \rightarrow M$  la première projection  $(x, y) \mapsto x$ , et  $\tilde{f} : f^* E \rightarrow E$  la seconde projection  $(x, y) \mapsto y$ , de sorte que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} f^* E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \tilde{p} \downarrow & & \downarrow p \\ M & \xrightarrow{f} & B \end{array} .$$

Il existe alors une unique structure de fibré vectoriel  $C^r$  sur  $\tilde{p} : f^* E \rightarrow M$  telle que le couple  $(\tilde{f}, f)$  soit un morphisme de fibrés vectoriels  $C^r$  de  $\tilde{p} : f^* E \rightarrow M$  sur  $p : E \rightarrow B$ .

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) \times F & \xrightarrow{f \times \text{id}} & U \times F \\ \tilde{\varphi} \swarrow & & \searrow \varphi \\ (f \circ \tilde{p})^{-1}(U) & \xrightarrow{\tilde{f}} & p^{-1}(U) \\ \text{pr}_1 \downarrow \tilde{p} & & \downarrow p \\ f^{-1}(U) & \xrightarrow{f} & B \\ \text{pr}_1 \swarrow & & \searrow \end{array}$$

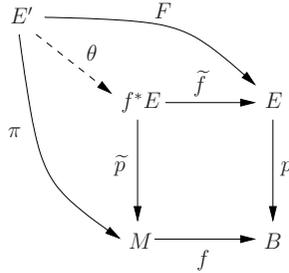
En effet, l'application  $\tilde{f}$  induit la bijection évidente de  $\tilde{p}^{-1}(x) = \{x\} \times E_{f(x)}$  sur  $E_{f(x)}$ , qui permet donc de munir les fibres  $\tilde{p}^{-1}(x)$  d'une structure d'espace vectoriel. Munissons  $f^* E$  de l'atlas maximal de cartes contenant les couples  $(\tilde{p}^{-1}(f^{-1}(U)), \tilde{\varphi})$  où  $\varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  est une trivialisatoin locale du fibré vectoriel  $\xi$  au-dessus de l'ouvert  $U$  de  $B$ , et

$$\tilde{\varphi} : \tilde{p}^{-1}(f^{-1}(U)) \rightarrow (f^{-1}(U) \times F)$$

est l'application définie par  $(x, y) \mapsto (x, \text{pr}_2 \circ \varphi(y))$ . Il est immédiat de vérifier que les applications de transition de ces cartes sont  $C^r$ , que  $\tilde{p} : f^* E \rightarrow M$  est un fibré vectoriel, et que  $(\tilde{f}, f)$  est un morphisme de fibrés vectoriels. L'unicité est immédiate.

Le fibré image réciproque vérifie la propriété universelle suivante, laissée en exercice.

**Exercice E.27** Pour tout fibré vectoriel  $\eta$  de classe  $C^r$ , d'application  $\pi : E' \rightarrow M$ , et pour tout morphisme  $(F, f)$  de fibrés vectoriels  $C^r$  de  $\eta$  sur  $\xi$ , il existe une unique application  $\theta : E' \rightarrow f^*E$  de classe  $C^r$ , qui rend le diagramme suivant commutatif



et qui soit un morphisme de fibrés vectoriels de  $\eta$  sur  $f^*\xi$  au-dessus de  $M$ .

• **Produit.**

Soient  $\xi$  et  $\xi'$  deux fibrés vectoriels de classe  $C^r$ , d'applications  $p : E \rightarrow B$  et  $p' : E' \rightarrow B'$  respectivement.

Le *fibré vectoriel produit* de  $\xi$  et de  $\xi'$  est le fibré vectoriel, noté  $\xi \times \xi'$ , de base la variété produit  $B \times B'$ , d'espace total la variété produit  $E \times E'$ , de projection l'application produit  $p \times p' : E \times E' \rightarrow B \times B'$  définie par  $(x, x') \mapsto (p(x), p'(x'))$ , de structure vectorielle sur la fibre au-dessus de  $(b, b')$  la structure d'espace vectoriel produit sur  $E_b \times E'_{b'}$ .

Pour vérifier qu'il s'agit bien d'un fibré vectoriel, il suffit de remarquer que si  $\varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  est une trivialisatoin locale du fibré vectoriel  $\xi$  au-dessus de l'ouvert  $U$  de  $B$ , et si  $\varphi' : p'^{-1}(U') \rightarrow U' \times F'$  est une trivialisatoin locale du fibré vectoriel  $\xi'$  au-dessus de l'ouvert  $U'$  de  $B'$ , alors l'application de  $(p \times p')^{-1}(U \times U') = p^{-1}(U) \times p'^{-1}(U')$  dans  $(U \times U') \times (F \times F')$  définie par

$$(x, x') \mapsto (\text{pr}_1 \circ \varphi(x), \text{pr}_1 \circ \varphi'(x'), \text{pr}_2 \circ \varphi(x), \text{pr}_2 \circ \varphi'(x'))$$

est une trivialisatoin locale du fibré vectoriel  $\xi \times \xi'$  au-dessus de l'ouvert  $U \times U'$  de  $B \times B'$ .

• **Somme directe.**

Soient  $\xi$  et  $\xi'$  deux fibrés vectoriels de classe  $C^r$ , d'applications  $p : E \rightarrow B$  et  $p' : E' \rightarrow B$  respectivement, ayant les mêmes bases.

Si  $\delta : B \rightarrow B \times B$  est l'application diagonale  $x \mapsto (x, x)$ , alors on appelle *fibré vectoriel somme directe* de  $\xi$  et de  $\xi'$ , et on note  $\xi \oplus \xi'$  le fibré vectoriel image réciproque par  $\delta$  du fibré vectoriel produit de  $\xi$  et  $\xi'$ . En particulier, son espace total est

$$\{(b, x, x') \in B \times E \times E' : b = p(x) = p'(x')\},$$

qui s'identifie avec la sous-variété

$$\{(x, x') \in E \times E' : p(x) = p'(x)\}$$

de la variété produit  $E \times E'$ . La projection est alors l'application  $(x, x') \mapsto p(x)$ , et la fibre au-dessus de  $b$  est  $E_b \times E'_b$ .

**Exercice E.28** Soit  $M$  une variété  $C^{r+1}$  avec  $0 \leq r \leq \omega$ . Montrer que le fibré vectoriel  $\Lambda^*T^*M$  est canoniquement isomorphe à la somme directe des sous-fibrés vectoriels  $\Lambda^pT^*M$  : les inclusions  $\Lambda^pT^*M \rightarrow \Lambda^*T^*M$  induisent un isomorphisme

$$\Lambda^*T^*M \simeq \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Lambda^pT^*M,$$

par lequel on identifie  $\Lambda^*T^*M$  et cette somme directe.

### 3 Champs de vecteurs et feuilletages

On introduit un nouveau symbole  $\omega_{\mathbb{C}}$  pour l'exposant de la classe de régularité analytique complexe des applications et des variétés. On notera parfois  $\omega = \omega_{\mathbb{R}}$ . On munit  $\mathbb{N} \cup \{\infty, \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}\}$  de l'ordre étendant l'ordre de  $\mathbb{N}$  tel que  $n \leq \infty \leq \omega_{\mathbb{R}} \leq \omega_{\mathbb{C}}$  pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ . Par convention,  $x + 1 = x$  si  $x = \infty, \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}$ .

Soient  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}\}$  et soit  $M$  une variété différentielle de classe  $C^{k+1}$  (par exemple obtenue par appauvrissement de structure à partir d'une variété de classe  $C^{r+1}$  avec  $r \geq k$ ).

#### 3.1 Champs de vecteurs

Un *champ de vecteurs* (respectivement champ de vecteurs de classe  $C^k$ ) sur  $M$  est une section (respectivement section de classe  $C^k$ ) du fibré tangent de  $M$ . Intuitivement, c'est donc une application  $X$  qui à tout point  $x$  de  $M$  associe un vecteur  $X(x)$  dans l'espace tangent  $T_x M$ , qui « dépend de manière  $C^k$  de  $x$  ». On note  $\Gamma_k(TM)$  l'ensemble des champs de vecteurs  $C^k$  (ou par abus  $\Gamma(TM)$  quand la différentiabilité est sous-entendue, par exemple quand  $k = \infty$ ). En particulier, si  $M$  est une variété analytique complexe, on note  $\Gamma_{\omega_{\mathbb{C}}}(TM)$  l'ensemble des champs de vecteurs holomorphes sur  $M$ , c'est-à-dire des sections analytiques complexes du fibré tangent de  $M$ .

**Exemples.** (1) Si  $k \neq \omega_{\mathbb{C}}$  et si  $U$  est un ouvert d'un espace  $\mathbb{R}^n$ , comme  $TU$  s'identifie avec  $U \times \mathbb{R}^n$ , un champ de vecteurs  $C^k$  sur  $U$ , qui est une application  $x \mapsto (x, X(x))$  de classe  $C^k$ , s'identifie donc à l'application  $x \mapsto X(x)$  de classe  $C^k$  de  $U$  dans  $\mathbb{R}^n$ . De même, si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{C}^n$ , un champ de vecteurs holomorphes sur  $U$  est une application  $x \mapsto X(x)$  analytique complexe de  $U$  dans  $\mathbb{C}^n$ .

(2) (**Champ de vecteurs sur une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$** ) Si  $M$  est une sous-variété de classe  $C^{k+1}$  de  $\mathbb{R}^n$  avec  $k \neq \omega_{\mathbb{C}}$ , alors le fibré tangent à  $M$  s'identifie au fibré vectoriel  $\text{pr}_1 : F \rightarrow M$  où  $F$  est la sous-variété  $C^r$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  formée des couples  $(x, v)$  où  $x$  est un point de  $M$  et  $v$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  tangent à  $M$  en  $x$  (voir la proposition 2.4). Un champ de vecteurs sur  $M$ , qui est une application  $x \mapsto (x, X(x))$  de  $M$  dans  $F$ , s'identifie donc à l'application  $x \mapsto X(x)$  de  $M$  dans  $\mathbb{R}^n$  telle que  $X(x)$  appartienne au sous-espace vectoriel  $T_x M$  de  $\mathbb{R}^n$ . Par la caractérisation des applications  $C^k$  à valeurs dans une sous-variété (voir la proposition 1.16), il est de classe  $C^k$  si et seulement si l'application  $x \mapsto X(x)$  de  $M$  dans  $\mathbb{R}^n$  est de classe  $C^k$  (ou, de manière équivalente, si toutes ses coordonnées le sont). Donc

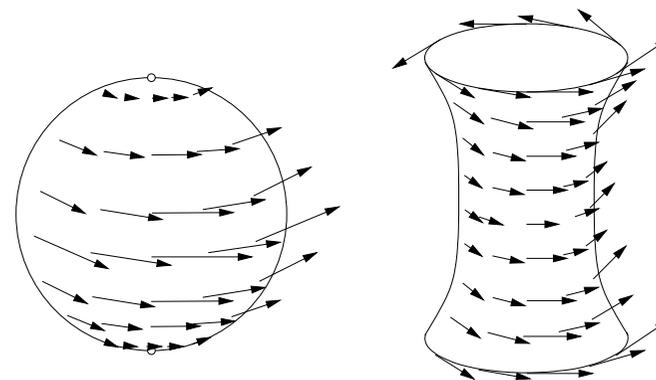
$$\Gamma_k(TM) = \{X : M \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ } C^k : \forall x \in M, X(x) \in T_x M\}.$$

De même, si  $M$  est une sous-variété analytique complexe de  $\mathbb{C}^n$ , alors  $\Gamma_{\omega_{\mathbb{C}}}(TM)$  est l'ensemble des applications  $x \mapsto X(x)$  analytiques complexes de  $M$  dans  $\mathbb{C}^n$  telles que  $X(x) \in T_x M$  pour tout  $x$  dans  $M$ .

(3) En identifiant  $T\mathbb{S}_{2n-1}$  au fibré vectoriel

$$\{(z, v) \in \mathbb{S}_{2n-1} \times \mathbb{C}^n : v \in z^\perp\}$$

muni de la projection évidente sur  $\mathbb{S}_{2n-1}$ , où  $z^\perp$  désigne l'orthogonal de  $z$  pour le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{C}^n$ , alors l'application  $z \mapsto (z, iz)$  est un champ de vecteurs analytique réel sur  $\mathbb{S}_{2n-1}$ . Ce champ de vecteurs ne s'annule en aucun point. Au contraire, sur une sphère de dimension paire non nulle, il n'existe pas de champ de vecteurs continu qui ne s'annule en aucun point.



(4) Plus généralement, si  $M$  admet une action de classe  $C^{k+1}$  du cercle  $\mathbb{S}_1$  (par exemple si  $M$  est une surface de révolution), alors l'application

$$X : x \mapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{it} \cdot x$$

est un champ de vecteurs  $C^k$  sur  $M$ . Le cas précédent correspond au cas de l'action du cercle  $\mathbb{S}_1$  sur  $\mathbb{S}_{2n-1}$  définie par  $e^{it} \cdot (z_1, \dots, z_n) = (e^{it}z_1, \dots, e^{it}z_n)$ . L'action du cercle  $\mathbb{S}_1$  sur

$$\mathbb{S}_{2n} = \{(x_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n : x_0^2 + |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$$

définie par  $e^{it} \cdot (x_0, z_1, \dots, z_n) = (x_0, e^{it}z_1, \dots, e^{it}z_n)$  fournit un champ de vecteurs sur  $\mathbb{S}_{2n}$  n'ayant que deux zéros, aux pôles Nord et Sud de  $\mathbb{S}_{2n}$ .

#### 3.2 Opérations sur les champs de vecteurs

##### 3.2.1 Addition.

La structure d'espace vectoriel réel de l'espace tangent en tout point permet de munir  $\Gamma_k(TM)$  de la structure d'espace vectoriel réel pour l'addition point par point  $(X + Y)(x) = X(x) + Y(x)$  et la multiplication externe point par point  $(\lambda X)(x) = \lambda X(x)$ . En particulier, on note  $0$  le champ de vecteurs nul sur  $M$ . Si  $M$  est une variété analytique complexe, alors  $\Gamma_k(TM)$  est aussi muni d'une structure d'espace vectoriel complexe.

### 3.2.2 Multiplication par une fonction.

L'ensemble  $\Gamma_k(TM)$  est aussi muni d'une structure de module sur l'anneau  $C^k(M, \mathbb{R})$  si  $k \neq \omega_{\mathbb{C}}$  et sur  $C^{\omega_{\mathbb{C}}}(M, \mathbb{C})$  si  $k = \omega_{\mathbb{C}}$ , pour l'addition point par point précédente et la multiplication point par point par une fonction  $(fX)(x) = f(x)X(x)$ .

Par exemple, si  $k \neq \omega_{\mathbb{C}}$  et  $M = U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et si  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , alors les champs de vecteurs constants  $X_{e_1}, \dots, X_{e_n}$  avec  $X_{e_i} : x \mapsto e_i$  forment une base du  $C^k(U, \mathbb{R})$ -module  $\Gamma_k(TU)$ . (Cette notation est provisoire, nous noterons très vite  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  le champ de vecteurs  $X_{e_i}$  quand nous montrerons la correspondance entre champs de vecteurs et dérivations.) Tout champ de vecteurs sur  $U$  s'écrit alors, de manière unique,

$$X = \sum_{i=1}^n f_i X_{e_i},$$

où  $f_i \in C^k(U, \mathbb{R})$ . De plus, soit  $\chi_j$  l'application  $j$ -ème coordonnée, définie sur  $U$  par  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j$ , qui est linéaire, donc de classe  $C^{\omega}$ . Alors, en appliquant l'application linéaire  $T_x \chi_j = \chi_j$  aux deux membres de l'équation précédente évaluée en  $x$ , on obtient

$$f_j(x) = T_x \chi_j(X(x)),$$

car  $\chi_j(e_i)$  vaut 1 si  $j = i$ , et 0 sinon.

**Exercice E.29** Si  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  et si  $M$  est une variété de classe  $C^{k+1}$  et de dimension  $n$ , montrer que  $M$  est trivialisable si et seulement si  $\Gamma_k(TM)$  est un  $C^k(M, \mathbb{R})$ -module libre de rang  $n$ .

### 3.2.3 Restriction.

Rappelons que si  $U$  est un ouvert de  $M$ , avec  $i : U \rightarrow M$  l'inclusion, alors on identifie  $TU$  avec son image dans  $TM$  par  $Ti$ . Les champs de vecteurs se restreignent aux ouverts : si  $U$  est un ouvert de  $M$ , et  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$ , alors la restriction  $X|_U$  de l'application  $X : M \rightarrow TM$  à  $U$  est un champ de vecteurs sur  $U$ , qui est de classe  $C^k$  si  $X$  l'est (et que l'on note quelquefois encore  $X$  par abus). De plus, les champs de vecteurs vérifient la propriété de localité des faisceaux : si  $U$  est un ouvert, réunion d'ouverts  $U_i$ , si  $X_i$  est un champ de vecteurs  $C^k$  sur  $U_i$ , tels que  $X_i = X_j$  sur  $U_i \cap U_j$ , alors l'unique application  $X : U \rightarrow TU$  telle que  $X|_{U_i} = X_i$  est un champ de vecteurs  $C^k$  sur  $U$ .

### 3.2.4 Image réciproque.

Les champs de vecteurs se tirent en arrière par les morphismes étales, par la formule suivante. Soient  $N$  une variété  $C^{k+1}$  et  $f : M \rightarrow N$  un  $C^{k+1}$ -difféomorphisme local. Pour tout champ de vecteurs  $Y$  sur  $N$ , on définit un champ de vecteurs  $f^*Y$  sur  $M$ , de classe  $C^k$  si  $Y$  l'est, appelé *image réciproque de  $Y$  par  $f$* , par

$$f^*Y : x \mapsto (T_x f)^{-1}(Y(f(x)))$$

en utilisant le fait que  $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  est un isomorphisme linéaire.

Par exemple, si  $k \neq \omega_{\mathbb{C}}$ , si  $U, V$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , si  $f : U \rightarrow V$  est un  $C^{k+1}$ -difféomorphisme local, et si  $Y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un champ de vecteurs  $C^k$  sur  $V$ , alors  $f^*Y$  est le champs de vecteurs  $x \mapsto (df_x)^{-1}(Y(f(x)))$  sur  $U$ .

Cette opération d'image réciproque sur les vecteurs vérifie les propriétés suivantes.

- (1) L'application de  $\Gamma_k(TN)$  dans  $\Gamma_k(TM)$  définie par  $Y \mapsto f^*Y$  est  $\mathbb{R}$ -linéaire (et  $\mathbb{C}$ -linéaire si  $M$  est une variété analytique complexe), et pour toute fonction  $g$  de classe  $C^k$  sur  $N$ , on a

$$f^*(gY) = (g \circ f)f^*Y.$$

Autrement dit, l'application  $f^* : g \mapsto g \circ f$  de  $C^k(N, \mathbb{R})$  dans  $C^k(M, \mathbb{R})$  est un morphisme d'anneaux, et l'application  $Y \mapsto f^*Y$  est un morphisme du  $C^k(N, \mathbb{R})$ -module  $\Gamma_k(TN)$  dans le  $C^k(M, \mathbb{R})$ -module  $\Gamma_k(TM)$  au-dessus de ce morphisme d'anneaux (en remplaçant  $\mathbb{R}$  par  $\mathbb{C}$  si  $k = \omega_{\mathbb{C}}$ ).

- (2) Les images réciproques se comportent de manière contravariante pour la composition. Plus précisément, si  $g : N \rightarrow P$  est un  $C^{k+1}$ -difféomorphisme local, et si  $Z$  est un champ de vecteurs  $C^k$  sur  $P$ , alors

$$(g \circ f)^*Z = f^*(g^*Z).$$

Il est immédiat que  $\text{id}^*X = X$  pour tout  $X$  dans  $\Gamma_k(TM)$ .

- (3) Si  $U$  est un ouvert de  $M$  et  $i : U \rightarrow M$  est l'inclusion, alors

$$\forall X \in \Gamma_k(TM), \quad i^*X = X|_U.$$

Il découle donc de la propriété précédente que les images réciproques et les restrictions de champs de vecteurs sont compatibles. Plus précisément, si  $U$  est un ouvert de  $N$ , et si  $Y$  est un champ de vecteurs sur  $N$ , alors on a clairement

$$(f|_{f^{-1}(U)})^*(Y|_U) = (f^*Y)|_{f^{-1}(U)}.$$

- (4) Lorsque  $f$  est un difféomorphisme global, alors on peut aussi pousser en avant les champs de vecteurs. Mais c'est vraiment l'opération de tirer en arrière qui est conceptuellement la plus importante. Soient  $N$  une variété  $C^{k+1}$ ,  $f : M \rightarrow N$  un  $C^{k+1}$ -difféomorphisme, et  $X$  un champ de vecteurs  $C^k$  sur  $M$ . On note  $f_*X = (f^{-1})^*X$ , qui est le champ de vecteurs  $C^k$  sur  $N$ , défini par

$$f_*X : y \mapsto T_{f^{-1}(y)}f(X(f^{-1}(y))).$$

Bien sûr,  $f^*(f_*X) = f_*(f^*X) = X$ . Autrement dit, si  $f : M \rightarrow N$  est un  $C^{k+1}$ -difféomorphisme, alors  $f^* : \Gamma_k(TN) \rightarrow \Gamma_k(TM)$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels, d'inverse  $f_*$ .

Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : U \rightarrow V$  un  $C^{k+1}$ -difféomorphisme, et  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs  $C^k$  sur  $U$ , de composantes  $X_i$ . Alors

$Y = f_*X : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  est le champs de vecteurs  $y \mapsto df_{f^{-1}(y)}(X(f^{-1}(y)))$  sur  $V$ . Par calcul matriciel,  $Y$  a donc pour  $i$ -ème composante

$$Y_i = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \cdot X_k \right) \circ f^{-1}.$$

### 3.2.5 Expression d'un champ de vecteurs dans une carte.

Soit  $(U, \varphi)$  une carte locale de  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  muni de sa base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$ , et  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$ . Alors  $\varphi_*(X|_U)$  est un champ de vecteurs sur l'ouvert  $\varphi(U)$  de  $\mathbb{R}^n$ , donc s'écrit, de manière unique,  $\sum_{i=1}^n f'_i X_{e_i}$  où  $f'_i \in C^k(\varphi(U), \mathbb{R})$ . Si  $f_i = f'_i \circ \varphi$ , alors

$$X|_U = \sum_{i=1}^n f_i \varphi^* X_{e_i}.$$

Cette écriture s'appelle l'*expression* de  $X$  dans la carte locale  $(U, \varphi)$ . Notons qu'il est immédiat que le champ de vecteurs  $X$  est  $C^k$  sur  $U$  si et seulement si les applications  $f_j$  le sont : la suite  $(\varphi^* X_{e_i})_{1 \leq i \leq n}$  est une base du  $C^k(U, \mathbb{R})$ -module libre  $\Gamma_k(TU)$ .

De même, si  $M$  est une variété analytique complexe, si  $(U, \varphi)$  est une carte locale analytique complexe de  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^n$  muni de sa base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$ , alors  $(\varphi^* X_{e_i})_{1 \leq i \leq n}$  est une base du module libre des champs de vecteurs holomorphes sur  $U$ , sur l'anneau des fonctions analytiques complexes de  $U$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $(V, \psi)$  une autre carte locale, avec  $X|_V = \sum_{j=1}^n g_j \psi^* X_{e_j}$  l'expression de  $X$  dans cette carte locale.

**Proposition 3.1** *Soit*

$$y = (y_1, \dots, y_n) \mapsto \varphi \circ \psi^{-1}(y) = (x_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_n(y_1, \dots, y_n))$$

l'application de changement de cartes de  $\psi(U \cap V)$  dans  $\varphi(U \cap V)$ . Alors sur  $U \cap V$ , on a

$$f_i = \sum_{j=1}^n g_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \circ \psi.$$

**Démonstration.** Sur  $U \cap V$ ,

$$\begin{aligned} \psi^* X_{e_j} &= (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi)^* X_{e_j} = \varphi^*(\psi \circ \varphi^{-1})^* X_{e_j} = \varphi^*(\varphi \circ \psi^{-1})_* X_{e_j} \\ &= \varphi^*((d(\varphi \circ \psi^{-1})) \circ (\varphi \circ \psi^{-1})^{-1}(X_{e_j})) = \varphi^*\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \circ \psi \circ \varphi^{-1} X_{e_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \circ \psi \varphi^* X_{e_i}. \end{aligned}$$

Cette formule de changement de bases donne, de manière usuelle, l'expression des coordonnées de  $X|_{U \cap V}$  dans la base  $(\varphi^* X_{e_i})_{1 \leq i \leq n}$  en fonction de celles dans la base  $(\psi^* X_{e_j})_{1 \leq j \leq n}$  : puisque sur  $U \cap V$

$$X = \sum_{j=1}^n g_j \psi^* X_{e_j} = \sum_{j=1}^n g_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \circ \psi \varphi^* X_{e_i} = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n g_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \circ \psi \right) \varphi^* X_{e_i},$$

on a donc, sur  $U \cap V$ , la formule  $f_i = \sum_{j=1}^n g_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \circ \psi$  cherchée.  $\square$

### 3.3 Flot local d'un champ de vecteurs

Soit  $X$  un champ de vecteurs  $C^k$  sur  $M$ , avec  $k \geq 1$ .

**Théorème 3.2** *Pour tout  $x_0$  dans  $M$ , il existe un triplet  $(U, I, \phi)$  formé d'un voisinage ouvert  $U$  de  $x_0$ , d'un intervalle ouvert  $I$  contenant 0, et d'une application  $\phi : I \times U \rightarrow M$  de classe  $C^k$ , notée  $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$ , vérifiant, pour tous  $s$  dans  $I$  et  $x$  dans  $U$ ,*

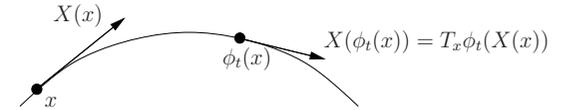
- $\frac{d\phi_t(x)}{dt} \Big|_{t=s} = X(\phi_s(x))$ ,
- $\phi_0(x) = x$ ,

*Si  $(U', I', \phi')$  est un autre tel triplet, alors  $\phi$  et  $\phi'$  coïncident sur  $(I \times U) \cap (I' \times U')$ .*

*De plus, pour tous  $t, s$  dans  $I$  et  $x$  dans  $U$ ,*

- si  $\phi_s(x) \in U$  et  $t + s \in I$ , alors  $\phi_t \circ \phi_s(x) = \phi_{t+s}(x)$ ,
- $\phi_t$  est un  $C^k$ -difféomorphisme local,
- ce  $C^k$ -difféomorphisme local préserve le champ de vecteurs  $X$ , au sens que pour tout  $t$  dans  $I$  et  $x$  dans  $U$ ,

$$T_x \phi_t(X(x)) = X(\phi_t(x)).$$



**Démonstration.** Cet énoncé est un énoncé local. En prenant des cartes locales, on se ramène donc au cas où  $M$  est un ouvert d'un espace  $\mathbb{R}^n$ , pour lequel le résultat est bien connu (voir cours de calcul différentiel [Ave, Die1, CarH]).  $\square$

L'application (ou par abus son image)  $t \mapsto \phi_t(x)$  de  $I$  dans  $M$  est appelée la *courbe intégrale* (locale) de  $X$  passant par  $x$  définie sur  $I$ . L'application  $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$  de  $I \times U$  dans  $M$  (ou la famille  $(\phi_t)_{t \in I}$ ) est appelée le *flot local* de  $X$  en  $x_0$  défini sur  $I \times U$ . Plus exactement, c'est le germe en  $(0, x_0)$  de cette application qui mérite le nom de flot local, au sens suivant.

Si  $X$  est un espace topologique,  $x$  un point de  $X$  et  $Y$  un ensemble, un *germe* en  $x$  d'applications de  $X$  dans  $Y$  est une classe d'équivalence d'applications, définies sur

des voisinages ouverts de  $x$  dans  $X$ , à valeurs dans  $Y$ , pour la relation d'équivalence « coïncider sur un voisinage ouvert de  $x$  ». On note souvent par abus de la même manière un germe et un de ses représentants.

**Proposition 3.3** (1) Supposons qu'il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $x$  dans  $M$ , il existe un voisinage ouvert  $U_x$  de  $x$  tel que le flot local de  $X$  soit défini sur  $] -2\epsilon, 2\epsilon[ \times U_x$ . Alors le champ de vecteurs  $X$  est complet c'est-à-dire le flot local de  $X$  est défini sur  $\mathbb{R} \times M$ , et  $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  est un groupe à un paramètre  $C^k$  de  $C^k$ -difféomorphismes de  $M$  préservant  $X$ , i.e. :

- $\phi_0$  est l'identité de  $M$  et pour tous  $t, s$  dans  $\mathbb{R}$ , on a  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ ,
- l'application  $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$  de  $\mathbb{R} \times M$  dans  $M$  est  $C^k$ , et donc  $\phi_t : M \rightarrow M$  est un  $C^k$ -difféomorphisme,
- pour tout  $t$  dans  $\mathbb{R}$ , le  $C^k$ -difféomorphisme  $\phi_t$  préserve le champ de vecteurs  $X$ , c'est-à-dire  $(\phi_t)^*X = X$ .

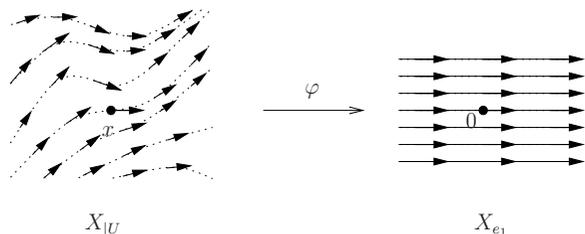
(2) Si  $M$  est compacte, alors tout champ de vecteurs  $X$  sur  $M$  est complet.

**Démonstration.** (1) Posons  $\psi_t = \phi_\epsilon^{ok} \circ \phi_{t-k\epsilon}$  où  $k$  est la partie entière de  $t/\epsilon$  et  $\phi_\epsilon^{ok}$  est la composée  $k$ -ème de  $\phi_\epsilon$ . Comme le flot local de  $X$  préserve  $X$ , il est immédiat que  $\frac{d\psi_t(x)}{dt} \Big|_{t=s} = X(\psi_s(x))$ , et  $\psi_0(x) = x$  pour tout  $s$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x$  dans  $M$ . Par unicité,  $\psi$  est le flot local de  $X$  défini sur  $\mathbb{R} \times M$ . Il est immédiat que  $(\psi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  est un groupe à un paramètre  $C^k$  de  $C^k$ -difféomorphismes de  $M$  préservant  $X$ .

(2) Pour tout  $x$  dans  $M$ , il existe un voisinage ouvert  $U_x$  de  $x$  et  $\epsilon_x > 0$  tel que le flot local de  $X$  soit défini sur  $] -2\epsilon_x, 2\epsilon_x[ \times U_x$ . Par compacité, il existe  $x_1, \dots, x_k$  dans  $M$  tels que  $M = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_k}$ . Soit  $\epsilon = \min_{1 \leq i \leq k} \epsilon_{x_i}$ . Alors l'hypothèse de (1) est vérifiée.  $\square$

**Exercice E.30** Soient  $X$  un champ de vecteurs  $C^k$  sur une variété  $N$  de classe  $C^k$ , de flot local  $(\phi_t)$  en un point  $y$  de  $N$ , et  $f : M \rightarrow N$  un  $C^{k+1}$ -difféomorphisme local. Montrer que, pour tout point  $x$  de  $M$  tel que  $f(x) = y$ , si  $g$  est l'inverse du  $C^{k+1}$ -difféomorphisme qui est la restriction de  $f$  d'un voisinage ouvert de  $x$  dans un voisinage ouvert de  $y$ , alors le flot local de  $f^*X$  en  $x$  est  $g \circ \phi_t \circ f$ .

Nous terminons ce paragraphe en donnant un théorème de forme normale locale pour un champ de vecteurs ne s'annulant pas en un point. Dans  $\mathbb{R}^n$ , le champ de vecteurs constant  $X_{e_1} : x \mapsto e_1$ , où  $e_1$  est le premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , est un exemple de tel champ. Le théorème suivant dit que, localement et à difféomorphisme près, c'est le seul.



### Théorème 3.4 (Théorème de redressement des champs de vecteurs)

Soit  $X$  un champ de vecteurs  $C^k$  sur une variété  $M$  de classe  $C^{r+1}$ , avec  $1 \leq k \leq r \leq \omega$ . Pour tout point  $x_0$  de  $M$  tel que  $X(x_0) \neq 0$ , il existe une carte locale  $(U, \varphi)$  de classe  $C^k$  en  $x_0$ , telle que

$$\varphi_*(X|_U) = (X_{e_1})|_{\varphi(U)}.$$

**Démonstration.** Comme le problème est local, et par les propriétés des champs de vecteurs vis à vis des restrictions et des images réciproques, nous pouvons supposer que  $M$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , que  $x_0 = 0$  et que  $X(x_0) = e_1$ . Notons  $(\phi_t)$  le flot local de  $X$  en 0. Considérons l'application

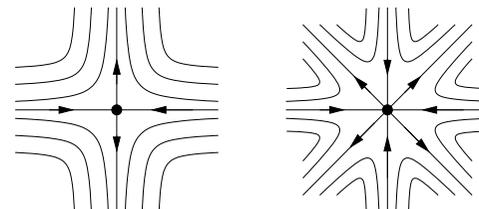
$$\theta : (t, x_2, \dots, x_n) \mapsto \phi_t(0, x_2, \dots, x_n),$$

qui est de classe  $C^k$  et définie sur un voisinage de 0. Comme  $\phi_0 = \text{id}$  et  $\frac{d\phi_t(0)}{dt} \Big|_{t=0} = X(0) = e_1$ , la différentielle de  $\theta$  en 0 est l'identité. Donc par le théorème d'inversion locale,  $\theta$  est un  $C^k$ -difféomorphisme local en 0. Pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n)$  suffisamment proche de 0, on a

$$d\theta_x(e_1) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=x_1} \theta(t, x_2, \dots, x_n) = X(\phi_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n)) = X(\theta(x)).$$

Donc  $\theta_*(X_{e_1}) = X$  sur un voisinage de 0, ce qui montre le résultat.  $\square$

Ce résultat est un résultat de forme normale locale des champs de vecteurs au voisinage d'un point *non singulier* (c'est-à-dire où le champ de vecteurs ne s'annule pas). L'unicité est remarquable : il découle du théorème précédent que deux champs de vecteurs non nuls en un point sont l'image l'un de l'autre par un difféomorphisme local au voisinage de ce point. Ce résultat n'est plus vrai au voisinage de points singuliers, par exemple, les champs de vecteurs singuliers suivants ne sont pas localement difféomorphes (on peut les distinguer par leur indice, voir par exemple [Hit]) et le paragraphe 4.6.2.



### 3.4 Dérivations

Dans ce paragraphe, nous supposons que  $k \neq \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}$ .

Une *dérivation* (il faudrait dire  $k$ -dérivation) de  $M$  est une application linéaire  $\delta : C^{k+1}(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^k(M, \mathbb{R})$  telle que, pour tous  $f, g$  dans  $C^{k+1}(M, \mathbb{R})$ ,

$$\delta(fg) = f\delta(g) + g\delta(f) .$$

L'ensemble  $\mathcal{D}_k(M)$  (aussi noté par abus  $\mathcal{D}(M)$  lorsque  $k$  est sous-entendu, par exemple pour  $k = \infty$ ) des dérivations de  $M$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(C^{k+1}(M, \mathbb{R}), C^k(M, \mathbb{R}))$ . C'est aussi un  $C^k(M, \mathbb{R})$ -module, pour la multiplication externe par  $f \in C^k(M, \mathbb{R})$  de  $\delta \in \mathcal{D}_k(M)$  définie par

$$(f\delta)(g) : x \mapsto f(x)\delta(g)(x) .$$

Notons que toute dérivation est nulle sur les fonctions constantes, par linéarité et le fait que  $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \delta(1) + \delta(1)$ .

Par exemple, si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , alors l'application  $\frac{\partial}{\partial x_i} : C^{k+1}(U, \mathbb{R}) \rightarrow C^k(U, \mathbb{R})$  définie par  $\frac{\partial}{\partial x_i} f : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$  est une dérivation sur  $U$ . Plus généralement, si  $(U, \varphi)$  est une carte locale  $C^{k+1}$  de  $M$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  muni de sa base canonique, alors l'application  $\frac{\partial}{\partial x_i} : C^{k+1}(U, \mathbb{R}) \rightarrow C^k(U, \mathbb{R})$  définie par

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f : x \mapsto \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x)) \quad (\#)$$

est une dérivation sur  $U$ . Cette notation est abusive, car elle ne fait pas apparaître clairement la dépendance en la carte locale. Elle est par contre bien pratique pour les calculs.

Bien que cela ne soit pas immédiat à première vue, les dérivations sont des objets de nature locale (voir le point (1) de la proposition ci-dessous). Elles auront en fait les mêmes propriétés que les champs de vecteurs par le théorème 3.6, mais nous aurons besoin de connaître les propriétés suivantes auparavant.

Les dérivations se tirent en arrière par les morphismes étales, de la manière suivante. Soient  $\varphi : M \rightarrow N$  un  $C^{k+1}$ -difféomorphisme local, où  $N$  est une variété  $C^{r+1}$ , et  $\delta$  une dérivation sur  $N$ . Pour tout  $x$  dans  $M$ , soient  $V_x$  et  $U_x$  des voisinages ouverts de  $x$  et  $\varphi(x)$  respectivement tels que  $\varphi : V_x \rightarrow U_x$  soit un  $C^{k+1}$ -difféomorphisme, et soit  $\chi_x$  une fonction  $C^{k+1}$  à support contenu dans  $U_x$ , et valant 1 sur un voisinage de  $\varphi(x)$ , qui existe (par partition de l'unité) parce que  $k \neq \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}$ . Pour tout  $f$  dans  $C^{k+1}(M, \mathbb{R})$ , notons  $\varphi^*\delta$  l'application de  $C^{k+1}(M, \mathbb{R})$  dans  $C^k(M, \mathbb{R})$  définie par

$$(\varphi^*\delta)(f)(x) = \delta(\chi_x f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) ,$$

en prolongeant par 0 sur  $N - U_x$  l'application  $\chi_x f \circ \varphi^{-1}$ .

**Proposition 3.5** *Soit  $\delta$  une dérivation de  $M$  et  $U$  un ouvert de  $M$ .*

- (1) *Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $C^{k+1}(M, \mathbb{R})$  qui coïncident sur  $U$ . Alors  $\delta f$  et  $\delta g$  coïncident sur  $U$ .*

- (2) *Pour tout  $C^{k+1}$ -difféomorphisme local  $\varphi : M \rightarrow N$ , où  $N$  est une variété  $C^{r+1}$ , la formule définissant  $\varphi^*\delta$  ne dépend pas du choix de  $\chi_x$ . L'application  $\delta \mapsto \varphi^*\delta$  est un morphisme d'espaces vectoriels réels de  $\mathcal{D}_k(N)$  dans  $\mathcal{D}_k(M)$ , tel que*

$$\varphi^*(f\delta) = (f \circ \varphi)\varphi^*\delta .$$

*De plus,*

$$\text{id}^*\delta = \delta \quad \text{et} \quad (\psi \circ \varphi)^*\delta = \varphi^*(\psi^*\delta) .$$

- (3) *Si  $i : U \rightarrow M$  est l'inclusion, notons  $\delta|_U = i^*\delta$ . Alors  $\delta|_U$  est l'unique dérivation de  $U$  telle que, pour tout  $f$  dans  $C^{k+1}(M, \mathbb{R})$ ,*

$$\delta|_U(f|_U) = (\delta f)|_U .$$

*De plus, si  $V$  est un ouvert contenu dans  $U$ , alors*

$$(\delta|_U)|_V = \delta|_V .$$

- (4) *Si  $M$  est réunion d'ouverts  $U_\alpha$ , si  $\delta'$  est une dérivation de  $M$  telle que  $\delta|_{U_\alpha} = \delta'|_{U_\alpha}$  pour tout  $\alpha$ , alors  $\delta = \delta'$ .*

**Démonstration.** (1) Pour tout  $x$  dans  $U$ , soit  $\varphi_x$  une fonction  $C^{k+1}$  sur  $M$ , à support compact contenu dans  $U$ , valant 1 sur un voisinage ouvert  $V_x$  de  $x$ , qui existe parce que  $k \neq \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}$ .

Par linéarité, il suffit de montrer que si un élément  $f$  de  $C^{k+1}(M, \mathbb{R})$  s'annule sur  $U$ , alors il en est de même pour  $\delta f$ . Or, pour tout  $f$  dans  $C^{k+1}(M, \mathbb{R})$  qui s'annule sur  $U$ , pour tout  $x$  dans  $U$ , on a  $f = (1 - \varphi_x)f$ , donc

$$\delta f(x) = (1 - \varphi_x(x))\delta f(x) + f(x)\delta(1 - \varphi_x)(x) = 0 .$$

- (2) La première affirmation de (2) découle de (1). L'application

$$\varphi^*\delta : C^{k+1}(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^k(M, \mathbb{R})$$

est clairement linéaire, et, pour tous  $f, g$  dans  $C^{k+1}(M, \mathbb{R})$ , puisque  $\chi_x^2$  a même support que  $\chi_x$  et vaut 1 sur un voisinage de  $\varphi(x)$ ,

$$\begin{aligned} (\varphi^*\delta)(fg)(x) &= \delta(\chi_x^2(fg) \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \\ &= \delta((\chi_x f \circ \varphi^{-1})(\chi_x g \circ \varphi^{-1}))(\varphi(x)) \\ &= (\chi_x f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))\delta(\chi_x g \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) + (\chi_x g \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))\delta(\chi_x f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \\ &= f(x)(\varphi^*\delta)(g)(x) + g(x)(\varphi^*\delta)(f)(x) . \end{aligned}$$

La linéarité de  $\delta \mapsto \varphi^*\delta$  est immédiate. Nous avons

$$\varphi^*(f\delta)(g)(x) = (f\delta)(\chi_x g \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) = f \circ \varphi(x) \varphi^*(\delta)(g)(x) .$$

Pour tout  $C^{k+1}$ -difféomorphisme local  $\psi : N \rightarrow P$ , où  $P$  est une variété  $C^{r+1}$ , pour tout  $f$  dans  $C^{k+1}(M, \mathbb{R})$  et pour tout  $x$  dans  $M$ ,

$$\begin{aligned}\varphi^*(\psi^*\delta)(f)(x) &= \psi^*\delta(\chi_x f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \\ &= \delta(\chi_{\varphi(x)} (\chi_x f \circ \varphi^{-1}) \circ \psi^{-1})(\psi(\varphi(x))) \\ &= \delta((\chi_{\varphi(x)} \chi_x \circ \psi^{-1}) f \circ (\psi \circ \varphi)^{-1})(\psi \circ \varphi(x)) \\ &= (\psi \circ \varphi)^*\delta(f)(x),\end{aligned}$$

car  $\chi_{\varphi(x)} \chi_x \circ \psi^{-1}$  vaut 1 au voisinage de  $\psi \circ \varphi(x)$ .

(3) Soit  $\delta'$  une autre dérivation de  $U$  vérifiant la même propriété. Alors pour tous  $g$  dans  $C^{k+1}(U, \mathbb{R})$  et  $x$  dans  $U$ , en utilisant l'assertion (1) et ses notations,

$$\delta'g(x) = \delta'((\varphi_*g)|_U)(x) = \delta(\varphi_*g)(x) = \delta_U g(x).$$

Donc  $\delta' = \delta_U$ . Les autres propriétés découlent de (2) (car  $f \circ i = f|_U$ , et si  $V$  est un ouvert contenu dans  $U$ , si  $j : V \rightarrow U$  est l'inclusion, alors l'inclusion de  $V$  dans  $M$  est  $i \circ j$ ).

(4) Pour tout  $f$  dans  $C^{k+1}(M, \mathbb{R})$ , et tout  $\alpha$ , on a  $(\delta f)|_{U_\alpha} = \delta_{|U_\alpha}(f|_{U_\alpha}) = \delta'_{|U_\alpha}(f|_{U_\alpha}) = (\delta'f)|_{U_\alpha}$ , donc les fonctions  $\delta f$  et  $\delta'f$ , qui coïncident sur  $U_\alpha$  pour tout  $\alpha$ , coïncident sur  $M$ .  $\square$

Si  $\varphi : M \rightarrow N$  est un  $C^{k+1}$ -difféomorphisme, on note aussi

$$\varphi_* = (\varphi^{-1})^*.$$

### 3.5 Dérivations et champs de vecteurs

Dans ce paragraphe, nous supposons encore que  $k \neq \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}$ .

Si  $X$  est un champ de vecteurs  $C^k$  sur  $M$ , alors l'application  $\mathcal{L}_X : C^{k+1}(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^k(M, \mathbb{R})$  définie par

$$\mathcal{L}_X(f) : x \mapsto T_x f(X(x))$$

est une dérivation. En particulier, si  $M$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et si  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , alors, comme  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = df_x(e_i)$ , on a  $\mathcal{L}_{X_{e_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Plus généralement, si  $(U, \varphi)$  est une carte locale de  $M$ , alors  $\mathcal{L}_{\varphi^* X_{e_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ , où ce dernier terme est défini dans la formule (#) du paragraphe 3.4.

Il est immédiat de vérifier que si  $U$  est un ouvert de  $M$ , alors

$$(\mathcal{L}_X)|_U = \mathcal{L}_{(X|_U)},$$

et que si  $(\phi_t)$  est le flot local de  $X$ , alors

$$\mathcal{L}_X(f) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f \circ \phi_t.$$

Si  $\varphi : M \rightarrow N$  est un  $C^{k+1}$ -difféomorphisme local, avec  $N$  une variété  $C^{k+1}$ , alors pour tout champ de vecteurs  $X$  sur  $N$  de classe  $C^k$ , on a

$$\varphi^*(\mathcal{L}_X) = \mathcal{L}_{\varphi^* X}.$$

En effet, pour tous les  $x \in M$  et  $f \in C^{k+1}(M, \mathbb{R})$ , soient  $V_x$  et  $U_x$  des voisinages ouverts de  $x$  et  $\varphi(x)$  respectivement tels que  $\varphi : V_x \rightarrow U_x$  soit un  $C^{k+1}$ -difféomorphisme, et soit  $\chi_x$  une fonction  $C^{k+1}$  sur  $N$  à support contenu dans  $U_x$ , et valant 1 sur un voisinage de  $\varphi(x)$ , alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\varphi^* X} f(x) &= T_x f(\varphi^* X(x)) = T_x f((T_x \varphi)^{-1}(X(\varphi(x)))) \\ &= T_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1})(X(\varphi(x))) = T_{\varphi(x)}(\chi_x f \circ \varphi^{-1})(X(\varphi(x))) \\ &= \mathcal{L}_X(\chi_x f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi(x) = (\varphi^*(\mathcal{L}_X))f(x).\end{aligned}$$

**Théorème 3.6** *L'application  $X \mapsto \mathcal{L}_X$  de  $\Gamma_k(TM)$  dans  $\mathcal{D}_k(M)$  est un morphisme injectif d'espaces vectoriels réels, ainsi que de  $C^k(M, \mathbb{R})$ -modules, et un isomorphisme si  $k = \infty$ .*

**Démonstration.** Cette application est clairement linéaire sur  $\mathbb{R}$ . Pour tous  $g \in C^k(M, \mathbb{R})$ ,  $X \in \Gamma_k(TM)$ ,  $f \in C^{k+1}(M, \mathbb{R})$  et  $x \in M$ , on a

$$\mathcal{L}_{gX} f(x) = T_x f((gX)(x)) = T_x f(g(x)X(x)) = g(x)\mathcal{L}_X f(x) = (g\mathcal{L}_X f)(x),$$

donc l'application  $X \mapsto \mathcal{L}_X$  est un morphisme de  $C^k(M, \mathbb{R})$ -modules.

Pour montrer qu'elle est injective, montrons que si  $X$  est un champ de vecteurs  $C^k$  ne s'annulant pas en  $x$ , alors il existe un élément  $f$  dans  $C^{k+1}(M, \mathbb{R})$  tel que  $T_x f(X(x))$  soit non nul. Ceci montrera que  $\mathcal{L}_X(f)(x) = T_x f(X(x))$  est non nul, donc que  $\mathcal{L}_X$  n'est pas la dérivation nulle. Or il s'agit d'un problème local, et en prenant des cartes locales, on se ramène au cas où  $M$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Auquel cas une forme linéaire non nulle sur  $X(x)$  convient pour  $f$ .

Pour montrer la surjectivité lorsque  $k = \infty$ , nous commençons par le lemme suivant, où nous notons  $B$  la boule ouverte unité de  $\mathbb{R}^n$ .

**Lemme 3.7** *Soient  $\ell \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ , et  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  une application  $C^{\ell+1}$ . Alors pour tout  $y = (y_1, \dots, y_n)$  dans  $B$ , il existe des applications  $h_{1,y}, \dots, h_{n,y} : B \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\ell$  telles que, pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n)$  dans  $B$ ,*

$$f(x) - f(y) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) h_{i,y}(x).$$

De plus,  $h_{i,y}(y) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(y)$ .

**Démonstration.** On a

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(t(x-y) + y) dt = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t(x-y) + y) dt. \quad \square$$

Supposons maintenant que  $k = \infty$  (sinon, la perte de régularité dans le lemme ci-dessus entre  $f$  et les  $h_{i,y}$  ferait que la démonstration ci-dessous serait incorrecte). Si  $\delta$  est une dérivation sur  $B$ , il découle du lemme que pour tout  $f$  dans  $C^\infty(B, \mathbb{R})$ , et tout  $y$  dans  $B$ , on a, en notant  $\chi_i$  l'application  $i$ -ème coordonnée,

$$\begin{aligned} \delta f(y) &= \delta(f - f(y))(y) = \sum_{i=1}^n (h_{i,y}(y) \delta(\chi_i - y_i)(y) + (y_i - y_i) \delta(h_{i,y})(y)) \\ &= \sum_{i=1}^n \delta(\chi_i)(y) \frac{\partial f}{\partial x_i}(y). \end{aligned}$$

Donc, en notant  $g_i = \delta(\chi_i)$ , on a  $\delta = \mathcal{L}_{\sum g_i X_{e_i}}$ , ce qui montre la surjectivité si  $M = B$ .

Maintenant, soient  $\delta$  une dérivation sur  $M$  et  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$  un atlas de cartes de  $M$  avec  $\varphi_\alpha(U_\alpha) = B$ . Par ce qui précède, on a  $(\varphi_\alpha)_*(\delta|_{U_\alpha}) = \mathcal{L}_{Y_\alpha}$  pour  $Y_\alpha$  un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $B$ . Donc  $\delta|_{U_\alpha} = (\varphi_\alpha)^*(\mathcal{L}_{Y_\alpha}) = \mathcal{L}_{(\varphi_\alpha)^*(Y_\alpha)}$ . Notons  $X_\alpha = (\varphi_\alpha)^*(Y_\alpha)$ , qui est un champ de vecteurs  $C^k$  sur  $U_\alpha$ . Par la proposition 3.5 (3), on a

$$(\mathcal{L}_{X_\alpha})|_{U_\alpha \cap U_\beta} = (\mathcal{L}_{X_\beta})|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \delta|_{U_\alpha \cap U_\beta}.$$

Par l'injectivité, on en déduit que les champs de vecteurs  $X_\alpha$  et  $X_\beta$  de classe  $C^\infty$  coïncident sur l'ouvert  $U_\alpha \cap U_\beta$ , donc que les  $X_\alpha$  se recollent en un champ de vecteurs  $X$  de classe  $C^\infty$  sur  $M$ . Pour tout  $\alpha$ , on a

$$\delta|_{U_\alpha} = \mathcal{L}_{X_\alpha} = (\mathcal{L}_X)|_{U_\alpha}.$$

Par la proposition 3.5 (4), on a donc  $\delta = \mathcal{L}_X$ .  $\square$

**Remarque.** On identifie souvent, par l'application  $X \mapsto \mathcal{L}_X$ , un champ de vecteurs et sa dérivation associée. En particulier, cela explique la notation  $X(f)$  (au lieu de  $\mathcal{L}_X(f)$ ), pour  $X$  dans  $\Gamma_k(TM)$  et  $f$  dans  $C^{k+1}(M, \mathbb{R})$ .

Ainsi, si  $(U, \varphi)$  est une carte locale de  $M$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  muni de sa base canonique, alors l'identification ci-dessus fait correspondre la dérivation  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  définie en (#) et le champ de vecteurs  $\varphi^* X_{e_i}$  sur  $U$ . En particulier, si  $M$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , muni de la carte  $\varphi = \text{Id} : M \rightarrow M$ , alors on notera  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  le champ de vecteurs constant  $X_{e_i}$ . Donc (voir paragraphe 3.2), tout champ de vecteurs  $X$  de classe  $C^k$  sur  $M$ , en restriction à un domaine d'une carte  $(U, \varphi)$ , s'écrit, de manière unique,

$$X|_U = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

où  $f_i \in C^k(U, \mathbb{R})$ . Cette écriture dépend bien sûr de la carte  $(U, \varphi)$  choisie. Soit  $(V, \psi)$  une autre carte locale à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  muni de sa base canonique, avec  $X|_V = \sum_{j=1}^n g_j \frac{\partial}{\partial y_j}$  l'expression de  $X$  dans cette carte locale, avec  $(x_1, \dots, x_n)$  les coordonnées dans  $\varphi(U)$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  les coordonnées dans  $\psi(V)$ . Notons

$$y = (y_1, \dots, y_n) \mapsto \varphi \circ \psi^{-1}(y) = (x_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_n(y_1, \dots, y_n))$$

l'application de changement de cartes de  $\psi(U \cap V)$  dans  $\varphi(U \cap V)$ . Alors (voir paragraphe 3.2.5), on a les formules de changement de bases

$$\frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \circ \psi \frac{\partial}{\partial x_i},$$

et de changement de coordonnées

$$f_i = \sum_{j=1}^n g_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \circ \psi.$$

De même, le théorème de redressement 3.4 dit que pour  $X$  dans  $\Gamma_k(TM)$  tel que si  $X(x_0) \neq 0$ , alors il existe une carte locale au voisinage de  $x_0$  telle que l'on ait, au voisinage de  $x_0$ , et dans cette carte locale,

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

**Exemple.** Soient  $(x, y)$  les coordonnées cartésiennes et  $(r, \theta)$  les coordonnées polaires au voisinage d'un point de  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Alors

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}.$$

### 3.6 Crochets de champs de vecteurs

**Lemme 3.8** *Supposons  $k = \infty$ . Si  $\delta, \delta'$  sont deux dérivations sur  $M$ , alors l'endomorphisme linéaire*

$$[\delta, \delta'] = \delta \circ \delta' - \delta' \circ \delta$$

*de  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  est une dérivation. De plus, pour toutes les dérivations  $\delta, \delta', \delta''$  sur  $M$ , pour tout ouvert  $U$  de  $M$ , pour toutes les applications  $f, g$  dans  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  et pour tout  $C^\infty$ -difféomorphisme local  $\varphi : N \rightarrow M$  où  $N$  est une variété  $C^\infty$ , on a*

- $[\delta, \delta'] + [\delta', \delta] = 0$ ,
- $[\delta, [\delta', \delta'']] + [\delta', [\delta'', \delta]] + [\delta'', [\delta, \delta']] = 0$ ,
- $[f\delta, g\delta'] = fg[\delta, \delta'] + f\delta(g)\delta' - g\delta'(f)\delta$ .
- $\varphi^*[\delta, \delta'] = [\varphi^*\delta, \varphi^*\delta']$ , et donc en particulier  $[\delta, \delta']|_U = [\delta|_U, \delta'|_U]$ ,

**Démonstration.** Pour tous  $f, g$  dans  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ , on a

$$\delta \circ \delta'(fg) = f \delta \circ \delta'(g) + \delta(f)\delta'(g) + \delta'(f)\delta(g) + g \delta \circ \delta'(f),$$

d'où le premier résultat par soustraction. Les autres vérifications sont immédiates.  $\square$

L'application  $[\delta, \delta']$  s'appelle le *crochet (de Lie)* des dérivations  $\delta$  et  $\delta'$ . Le premier point ci-dessus s'appelle la propriété d'*anticommutativité* et le second l'*identité de Jacobi* du crochet de Lie des dérivations.

Si  $X$  et  $Y$  sont des champs de vecteurs  $C^\infty$  sur  $M$ , on note  $[X, Y]$  le champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $M$  tel que

$$\mathcal{L}_{[X, Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y].$$

Ce champ de vecteurs s'appelle le *crochet (de Lie)* des champs de vecteurs  $X$  et  $Y$ .

La proposition ci-dessous résume les différentes propriétés du crochet de Lie des champs de vecteurs. La première propriété ci-dessous s'appelle l'*anticommutativité* et la seconde l'*identité de Jacobi* du crochet de Lie des champs de vecteurs.

**Proposition 3.9** *Supposons  $k = \infty$ . Soient  $X, Y, Z$  des champs de vecteurs  $C^\infty$  sur  $M$ ,  $f, g$  dans  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  et  $\varphi : N \rightarrow M$  un  $C^\infty$ -difféomorphisme local, où  $N$  est une variété  $C^\infty$ . Notons  $(\phi_t)$  le flot local de  $X$  sur  $M$ . Alors  $[\cdot, \cdot] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$  est une application bilinéaire telle que*

- $[X, Y] + [Y, X] = 0$ ,
- $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ ,
- $[fX, gY] = fg[X, Y] + f\mathcal{L}_X(g)Y - g\mathcal{L}_Y(f)X$ ,
- $\varphi^*[X, Y] = [\varphi^*X, \varphi^*Y]$ , et donc en particulier, pour tout ouvert  $U$  de  $M$ , nous avons  $[X, Y]|_U = [X|_U, Y|_U]$ ,
- $\frac{d}{dt}|_{t=0} (\phi_t)^*Y = [X, Y]$ ,
- si  $(U, \varphi)$  est une carte locale de  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  muni de sa base canonique, et si, en restriction à  $U$ , on a  $X = \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  et  $Y = \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , alors le champ de vecteurs  $[X, Y]$ , en restriction à  $U$ , est

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^n \left( f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

**Démonstration.** Les quatre premières assertions découlent du lemme 3.8. La dernière assertion découle du fait que, par définition,

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

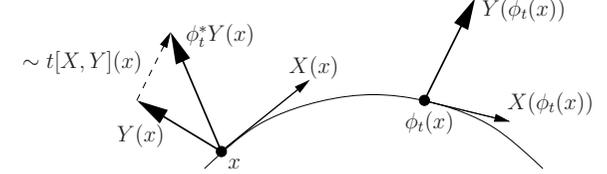
Montrons la cinquième assertion. Soit  $x_0$  un point de  $M$ , et  $f$  un élément de  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ .

Par une variante à paramètre du lemme 3.7, il existe une application  $(t, x) \mapsto g_t(x)$  de classe  $C^\infty$  et définie sur un voisinage de  $(0, x_0)$ , telle que  $f \circ \phi_{-t}(x) = f(x) - tg_t(x)$  et  $g_0(x) = -\frac{d}{dt}|_{t=0} f \circ \phi_{-t}(x) = X(f)(x)$ . Comme  $\phi_{-t} = \phi_t^{-1}$  pour  $t$  petit et au voisinage de  $x_0$ , on a, pour  $x$  voisin de  $x_0$ ,

$$(\phi_t)^*Y(f)(x) = Y(f \circ \phi_{-t}) \circ \phi_t(x) = Y(f - tg_t) \circ \phi_t(x) = Y(f) \circ \phi_t(x) - tY(g_t) \circ \phi_t(x).$$

En dérivant par rapport à  $t$  en  $t = 0$ , le premier terme du membre de droite devient  $T_x(Y(f))(X(x)) = X(Y(f))(x)$ . Le second terme devient  $Y(g_0)(x) = Y(X(f))(x)$ , d'où le résultat.  $\square$

**Remarques.** (1) La cinquième assertion dit que le crochet de Lie de deux champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  mesure la manière dont  $Y$  « tourne » le long des courbes intégrales de  $X$ .



(2) La dernière assertion permet de définir le crochet de champs de vecteurs de classe  $C^k$  pour  $k \geq 1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , qui est un champ de vecteurs de classe  $C^{k-1}$  (attention à la perte de différentiabilité) sur  $U$  : si  $X = \sum_{j=1}^n f_j X_{e_j}$  et  $Y = \sum_{i=1}^n g_i X_{e_i}$ , alors on pose

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^n \left( f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) X_{e_i}.$$

C'est un exercice de montrer que les cinq premières assertions restent valables, en demandant des hypothèses de régularité suffisantes (champs de vecteurs au moins  $C^2$  pour l'identité de Jacobi, difféomorphisme au moins  $C^2$  pour la quatrième assertion)

(3) Il découle de l'exercice E.30 et de la proposition 3.9 ci-dessus que si  $X$  et  $Y$  sont deux champs de vecteurs  $C^1$  sur  $M$ , et si  $(\phi_t)$  est le flot local de  $X$  en un point  $x$  de  $M$ , alors

- si  $f : M \rightarrow N$  est un  $C^1$ -difféomorphisme, alors le flot local de  $f_*X$  en  $f(x)$  est  $f \circ \phi_t \circ f^{-1}$ ,
- si  $X$  et  $Y$  sont  $C^\infty$  et si  $f : M \rightarrow N$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme, alors  $f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y]$ .

### 3.7 Champs de plans

Soient  $k$  un élément de  $\mathbb{N} \cup \{\infty, \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}\}$  et  $p \leq n$  dans  $\mathbb{N}$ . Soit  $M$  une variété de dimension  $n$  et de classe  $C^{k+1}$ .

De manière intuitive, un champ de plans  $C^k$  sur  $M$  est la donnée, pour tout point  $x$  de  $M$ , d'un sous-espace vectoriel  $\Delta_x$  de  $T_x M$ , qui « dépend de manière  $C^k$  de  $x$ . » De manière précise, une *champ de  $p$ -plans* (ou encore une *distribution de  $p$ -plans*) (de classe  $C^k$ ) sur  $M$  est une section (de classe  $C^k$ ) de la fibration grassmannienne de rang  $p$  (voir paragraphe 2.6) (du fibré tangent) de  $M$ . Par exemple, si  $k \neq \omega_{\mathbb{C}}$  et si  $M = U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , alors la fibration  $\mathcal{G}_p(TU)$  s'identifie avec  $\text{pr}_1 : U \times \mathcal{G}_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow U$ , et donc un champ de  $p$ -plans  $C^k$  sur  $U$  s'identifie à une application  $C^k$  de  $U$  dans la variété grassmannienne  $\mathcal{G}_p(\mathbb{R}^n)$ .

Un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$  est dit *tangent* à un champ de  $p$ -plans  $\Delta$  si pour tout  $x$  dans  $X$ , le vecteur  $X(x)$  appartient au sous-espace  $\Delta_x$  de  $T_x M$ .

Si  $\Delta$  est un champ de  $p$ -plans  $C^k$  sur  $M$ , et si  $U$  est un ouvert de  $M$ , alors, en identifiant  $TU$  avec son image canonique dans  $TM$ , la restriction  $\Delta|_U$  de  $\Delta$  à  $U$  est un champ de  $p$ -plans  $C^k$  sur  $U$ .

Les champs de plans se tirent en arrière par les morphismes étales. Plus précisément, soient  $N$  une variété de dimension  $n$  et de classe  $C^{k+1}$ ,  $f : M \rightarrow N$  un  $C^{k+1}$ -difféomorphisme local et  $\Delta$  un champ de  $p$ -plans  $C^k$  sur  $N$ . Posons, pour tout  $x$  dans  $M$ ,

$$f^* \Delta(x) = (T_x f)^{-1}(\Delta_{f(x)}).$$

Alors  $x \mapsto f^* \Delta(x)$  est un champ de  $p$ -plans  $C^k$  sur  $M$ , appelé *image réciproque* de  $\Delta$  par  $f$ . Il est immédiat que  $\text{id}^* \Delta = \Delta$  et que

$$(g \circ f)^* \Delta = f^*(g^* \Delta).$$

De plus, si  $U$  est un ouvert de  $N$  et  $i : U \rightarrow N$  l'inclusion, alors  $i^* \Delta = \Delta|_U$  et

$$(f^* \Delta)|_{f^{-1}(U)} = (f|_{f^{-1}(U)})^*(\Delta|_U).$$

Si  $f$  est un  $C^{k+1}$ -difféomorphisme et si  $\Delta$  est un champ de  $p$ -plans  $C^k$  sur  $M$ , alors on note  $f_* \Delta = (f^{-1})^* \Delta$ , c'est-à-dire pour tout  $y \in N$ ,

$$f_* \Delta(y) = T_{f^{-1}(y)} f(\Delta_{f^{-1}(y)}).$$

Bien sûr, on a alors  $f^*(f_* \Delta) = f_*(f^* \Delta) = \Delta$ .

En particulier, si  $(U, \varphi)$  est une carte locale  $C^{k+1}$  de  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{C}^n$  si  $k = \omega_{\mathbb{C}}$ ), alors  $\varphi_*(\Delta|_U)$  est un champ de plans sur l'ouvert  $\varphi(U)$  de  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{C}^n$  si  $k = \omega_{\mathbb{C}}$ ), appelé le *champ de plans  $\Delta$  lu dans la carte  $(U, \varphi)$* .

La proposition suivante peut aussi servir à définir un champ de  $p$ -plans de classe  $C^k$ .

**Proposition 3.10** *Un champ de  $p$ -plans  $\Delta : x \mapsto \Delta_x$  de  $M$  est de classe  $C^k$  si et seulement si, pour tout point  $x_0$  de  $M$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x_0$  et  $p$  champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_p$  sur  $U$ , de classe  $C^k$ , tels que, en tout point  $x$  de  $U$ , le  $p$ -uplet  $(X_1(x), \dots, X_p(x))$  soit une base de  $\Delta_x$ .*

**Démonstration.** Si  $k = \omega_{\mathbb{C}}$ , alors on remplacera  $\mathbb{R}$  par  $\mathbb{C}$  dans ce qui suit, et on considèrera les espaces vectoriels et les applications linéaires sur  $\mathbb{C}$ .

Comme cet énoncé est local, on se ramène en prenant des cartes locales au cas où  $M = U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $x_0 = 0$ ,  $\Delta$  une application de  $U$  dans  $\mathcal{G}_p(\mathbb{R}^n)$  et  $\Delta_0 = \mathbb{R}^p \times \{0\}$ . On identifie de manière usuelle  $\mathbb{R}^n$  et le produit  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ . Notons que pour tout  $x$  suffisamment proche de 0, le sous-espace vectoriel  $\Delta_x$  est transverse, donc supplémentaire, à  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-p}$ , et ceci que  $\Delta$  soit  $C^k$ , ou qu'il soit engendré par  $p$  champs de vecteurs  $C^k$  linéairement indépendants. Fixons  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $\Delta_0$ . Rappelons que  $\mathcal{L}(\Delta_0, \mathbb{R}^{n-p})$  est l'espace vectoriel réel de dimension finie des applications linéaires de  $\Delta_0$  dans  $\mathbb{R}^{n-p}$ .

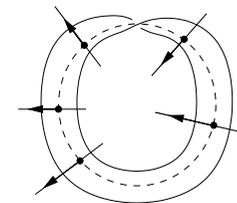
Si  $\Delta$  est  $C^k$ , alors par définition de la structure de variété sur  $\mathcal{G}_p(\mathbb{R}^n)$ , il existe, quitte à retrécir  $U$ , une application  $C^k$  de  $U$  dans  $\mathcal{L}(\Delta_0, \mathbb{R}^{n-p})$ , que nous noterons  $x \mapsto h_x$ , telle que  $\Delta_x$  soit le graphe de l'application linéaire  $h_x$ . Posons  $X_i(x) = e_i + h_x(e_i)$ , qui appartient à  $\Delta_x$  pour  $1 \leq i \leq p$ . Alors les champs de vecteurs  $X_i$

sont  $C^k$ . Comme  $e_1, \dots, e_p$  sont linéairement indépendants et  $h_x$  est d'image dans  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-p}$ , ils sont linéairement indépendants en tout point  $x$ , donc forment une base de  $\Delta_x$ .

Réciproquement, supposons que le champs de  $p$ -plans  $\Delta$  soit engendré par  $p$  champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_p$  de classe  $C^k$ , linéairement indépendants en tout point. Notons  $Y_1(x), \dots, Y_p(x)$  les projections de respectivement  $X_1(x), \dots, X_p(x)$  sur  $\Delta_0$  parallèlement à  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-p}$ , et  $Z_1(x), \dots, Z_p(x)$  celles sur  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-p}$  parallèlement à  $\Delta_0$ . Remarquons que, quitte à retrécir  $U$ , le  $p$ -uplet  $(Y_1(x), \dots, Y_p(x))$  est une base de  $\Delta_0$ . Notons  $A_x : \Delta_0 \rightarrow \Delta_0$  l'application linéaire telle que  $A_x(e_i) = Y_i(x)$ . L'application  $x \mapsto A_x^{-1}$  de  $U$  dans  $\mathcal{L}(\Delta_0, \Delta_0)$  est de classe  $C^k$  par les formules donnant l'inverse d'une matrice. Notons  $B_x : \Delta_0 \rightarrow \{0\} \times \mathbb{R}^{n-p}$  l'application linéaire telle que  $B_x(e_i) = Z_i(x)$ , qui dépend de manière  $C^k$  de  $x$ . Alors  $\Delta_x$  est le graphe de l'application linéaire  $B_x \circ A_x^{-1}$  de  $\Delta_0$  dans  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-p}$ , qui dépend de manière  $C^k$  de  $x$ , d'où le résultat.  $\square$

**Exemples.** (1) Si  $X$  est un champ de vecteurs  $C^k$  ne s'annulant pas sur une variété  $M$ , alors l'application  $x \mapsto \mathbb{R}X(x)$ , qui à  $x$  associe la droite dirigée par le vecteur tangent  $X(x)$ , est un champ de droites  $C^k$  sur  $M$ , dit *dirigé par  $X$* .

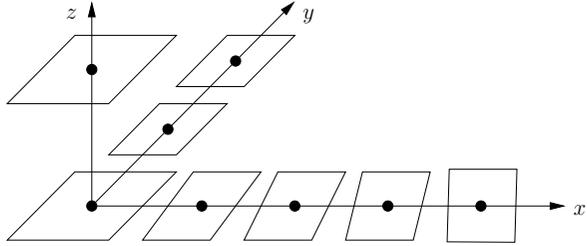
(2) Attention, la proposition précédente est uniquement locale, il existe des champs de droites sur des variétés  $M$  tels qu'il n'existe pas de champ de vecteurs ne s'annulant pas sur  $M$  et dirigeant ce champ de droites. Par exemple, le *ruban de Möbius* est la variété quotient  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) / ((x, y) \sim (x+1, -y))$ . Soit  $(e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Le champ de droites  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}^2$ , défini par  $x \mapsto (x, \mathbb{R}e_2)$ , passe au quotient en un champ de droites  $C^\omega$  sur le ruban de Möbius qui n'est pas dirigé par un champ de vecteurs  $C^0$  ne s'annulant pas.



(3) Considérons le champ de plans  $\Delta$  de classe  $C^\infty$  sur la variété  $\mathbb{R}^3$  munie des coordonnées  $u = (x, y, z)$ , qui est engendré par les champs de vecteurs  $C^\infty$  linéairement indépendants en tout point

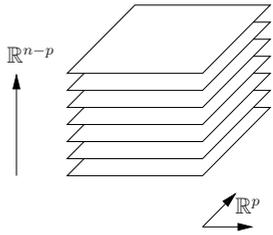
$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z},$$

c'est-à-dire qui est défini par  $u \mapsto \Delta_u = \text{Vect}\{X(u), Y(u)\}$ . Ce champ de plans est invariant par les translations dans les directions  $y$  et  $z$ . Le long de l'axe de coordonnée des  $x$ , il est horizontal en l'origine, et devient de plus en plus vertical quand on va vers l'infini (voir figure ci-dessous). Notons que  $[X, Y] = \frac{\partial}{\partial z} \notin \text{Vect}\{X, Y\}$ .



### 3.8 Feuilletages

Soient  $k$  un élément de  $\mathbb{N} \cup \{\infty, \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}\}$  et  $p \leq n$  dans  $\mathbb{N}$ . Soit  $M$  une variété de dimension  $n$  et de classe  $C^k$  (par exemple obtenue par appauvrissement de structure à partir d'une variété de classe  $C^{r+1}$  avec  $r \geq k$ ).



Un champ de  $p$ -plans est une notion infinitésimale. L'objet global lui correspondant (au moins partiellement) est celui de feuilletage. Le modèle standard (à garder en tête) de ce que nous allons appeler un feuilletage de dimension  $p$  d'une variété de dimension  $n$  est le *feuilletage linéaire standard* de dimension  $p$  de  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$  par les sous-espaces affines horizontaux  $\mathbb{R}^p \times \{y\}$  de dimension  $p$ , muni de l'ensemble des  $C^k$ -difféomorphismes locaux de  $\mathbb{R}^n$  préservant la famille de ces sous-espaces affines horizontaux.

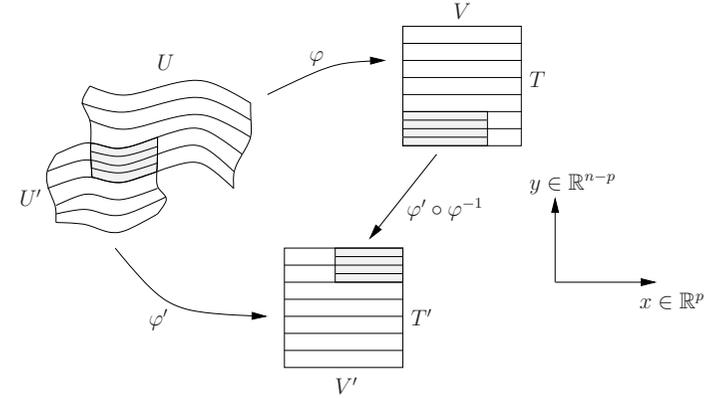
Si  $k = \omega_{\mathbb{C}}$ , alors on remplace  $\mathbb{R}$  par  $\mathbb{C}$  dans cette définition.

Un *atlas de cartes feuilletées*  $C^k$  de dimension  $p$  sur  $M$  est un (sous)-atlas de cartes  $\mathcal{A}$  de classe  $C^k$  de  $M$ , tel que

- pour chaque carte  $(U, \varphi)$  de  $\mathcal{A}$ , on a  $\varphi(U) = V \times T$  avec  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et  $T$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{n-p}$ ,
- pour toutes les cartes  $\varphi : U \rightarrow V \times T$  et  $\varphi' : U' \rightarrow V' \times T'$  dans  $\mathcal{A}$ , le changement de cartes est localement de la forme

$$(x, y) \mapsto (f(x, y), g(y)).$$

Un *feuilletage*  $\mathcal{F}$  de classe  $C^k$ , de dimension  $p$ , et de codimension  $n - p$ , dans  $M$  est un atlas de cartes feuilletées  $C^k$  de  $M$ , qui est maximal (pour l'inclusion). Une *variété feuilletée*  $(M, \mathcal{F})$  de classe  $C^k$  est une variété  $M$  de classe  $C^k$  munie d'un feuilletage  $C^k$ .



Si  $\varphi : U \rightarrow V \times T$  est une carte locale dans  $\mathcal{A}$ , alors les sous-variétés  $\varphi^{-1}(V \times \{y\})$  de classe  $C^k$  de  $U$  sont appelées les *feuilles locales* de  $\mathcal{F}$  dans cette carte, et les  $\varphi^{-1}(\{x\} \times T)$  les *transversales locales*. Puisque les applications de changement de cartes de l'atlas de cartes feuilletées  $\mathcal{A}$  préservent l'ensemble des sous-espaces horizontaux  $\mathbb{R}^p \times \{*\}$ , les feuilles locales sont indépendantes des cartes, au sens que si  $(U, \varphi), (U', \varphi')$  sont deux cartes locales du feuilletage, si  $x$  et  $y$  appartiennent à  $U \cap U'$ , alors  $x$  et  $y$  sont dans une même feuille locale pour la carte  $(U, \varphi)$  si et seulement s'ils sont dans une même feuille locale pour la carte  $(U', \varphi')$ .

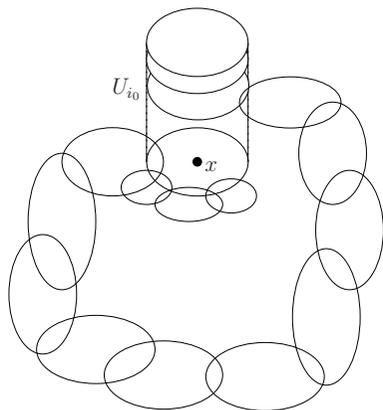
L'espace topologique  $\mathbb{R}^n$  est identifié de manière usuelle à l'espace topologique produit  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ . Munissons l'ensemble  $\mathbb{R}^n$  d'une nouvelle topologie, produit de la topologie usuelle sur  $\mathbb{R}^p$  et de la topologie discrète sur  $\mathbb{R}^{n-p}$ , qui est plus fine que la topologie usuelle. Comme les homéomorphismes locaux de  $\mathbb{R}^n$  de la forme

$$(x, y) \mapsto (f(x, y), g(y))$$

sont aussi des homéomorphismes locaux pour cette nouvelle topologie sur  $\mathbb{R}^n$ , on peut munir (voir l'exercice E.50 de l'appendice A.1) la variété  $M$  d'une unique topologie, appelée *topologie des feuilles* de  $\mathcal{F}$ , plus fine que la topologie originelle de  $M$ , telle que les cartes locales de  $\mathcal{F}$  soient des homéomorphismes sur des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  muni de cette nouvelle topologie. Si  $A$  est une partie de  $M$ , on appelle encore *topologie des feuilles* de  $A$  la topologie induite sur  $A$  par la topologie des feuilles de  $M$ . Comme la topologie originelle de  $M$  est séparée, la topologie des feuilles l'est aussi. Notons que si  $p < n$ , alors la topologie des feuilles est strictement plus fine que la topologie usuelle.

On appelle *feuille* du feuilletage  $\mathcal{F}$  passant par un point  $x$  de  $M$ , et on note  $\mathcal{F}_x$ , la composante connexe de  $x$  dans  $M$  pour la topologie des feuilles sur  $M$ . En particulier, les feuilles de  $\mathcal{F}$  forment une partition de  $M$ . En général, l'ensemble des feuilles est non dénombrable.

Montrons que chaque feuille  $\mathcal{F}_x$ , munie de sa topologie des feuilles (c'est-à-dire celle induite par la topologie des feuilles de  $M$ ), est un espace topologique séparé et à base dénombrable. La séparation a déjà été mentionnée.



Comme  $M$  est dénombrable à l'infini, on peut recouvrir  $M$  par un ensemble dénombrable de cartes feuilletées  $(U_i, \varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  telles que  $U_i$  soit relativement compact, et telle que, pour tout  $i$  dans  $\mathbb{N}$ , l'ensemble  $\{j \in I : U_j \cap U_i \neq \emptyset\}$  soit fini. Soit  $x$  un élément de  $M$ . Alors la feuille  $\mathcal{F}_x$  est réunion d'un ensemble dénombrable de feuilles locales : si  $x \in U_{i_0}$ , prendre la feuille locale de  $x$  dans  $U_{i_0}$ , puis pour tout  $i$  tel que  $U_{i_0} \cap U_i \neq \emptyset$  (il n'y en a qu'un nombre fini), prendre la feuille locale dans  $U_i$  d'un point fixé quelconque de  $U_{i_0} \cap U_i$ , etc. Ceci montre que  $\mathcal{F}_x$  est à base dénombrable.

Notons qu'une feuille rencontre un domaine de carte feuilletée en une réunion (disjointe) au plus dénombrable de feuilles locales (qui peut être dense dans ce domaine, voir l'exemple (4) ci-dessous).

Comme les feuilles locales de  $\mathcal{F}$  sont des sous-variétés  $C^k$ , chaque feuille, munie de sa topologie des feuilles et de son atlas des feuilles locales, est une variété  $C^k$ , et, munie de la topologie induite par la topologie originelle de  $M$ , est une sous-variété immergée dans  $M$  (car chaque feuille locale est un ouvert de la feuille la contenant pour la topologie des feuilles). Mais attention, une feuille n'est en général pas une sous-variété de la variété  $M$  (voir l'exemple (4) ci-dessous).

Par abus, on note souvent de la même manière le feuilletage  $\mathcal{F}$  et la partition de  $M$  en feuilles de  $\mathcal{F}$ .

**Exemples.** (1) Soit  $X$  un champ de vecteurs  $C^k$  ne s'annulant pas sur une variété  $M$  de classe  $C^{k+1}$ . Alors le théorème du redressement 3.4 montre que  $M$  admet un feuilletage de classe  $C^k$ , dont les feuilles sont les courbes intégrales de  $X$ .

(2) Soit  $\pi : E \rightarrow B$  une fibration  $C^k$ , de fibre une variété  $F$  de classe  $C^k$  et de dimension  $p$ , sur une variété  $B$  de dimension  $n$ . Pour toute carte locale  $(U, \phi)$  de  $B$

où  $U$  est un ouvert distingué pour  $\pi$ , pour toute carte locale  $(V, \psi)$  de  $F$ , et pour toute trivialisatation locale  $\theta : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  de  $\pi$  au-dessus de  $U$ , considérons l'application de l'ouvert  $W = \theta^{-1}(U \times V)$  de  $E$  dans l'ouvert  $\phi(U) \times \psi(V)$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ , définie par

$$x \mapsto (\phi \times \psi) \circ \theta(x).$$

Alors l'ensemble de ces applications est un atlas de cartes feuilletées  $C^k$  sur  $E$ . Donc la fibration  $\pi$  définit un feuilletage  $C^k$  de dimension  $p$  et de codimension  $n$  dans  $E$ . Si  $F$  est connexe, les feuilles de ce feuilletage sont les fibres  $\pi^{-1}(b)$  pour  $b$  dans  $B$ . Il se trouve que, dans ce cas particulier, les feuilles sont donc toutes des sous-variétés (et pas seulement des sous-variétés immergées).

En particulier, une variété produit  $M \times N$  admet deux feuilletages, dont les feuilles sont diffeomorphes à  $M$  pour l'un, à  $N$  pour l'autre.

Mais il existe « beaucoup plus » de feuilletages que de fibrations !

(3) Les feuilletages se tirent en arrière par les morphismes étales. Plus précisément, soient  $f : M \rightarrow N$  un  $C^k$ -diffeomorphisme local entre deux variétés  $C^k$ , et  $\mathcal{F}$  un feuilletage  $C^k$  de  $N$ , défini par un atlas de cartes feuilletées  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ . Pour tout point  $x$  de  $M$ , notons  $V_x$  un voisinage ouvert de  $x$  tel que  $f(V_x)$  soit un ouvert de  $N$  et  $f|_{V_x}$  soit un  $C^k$ -diffeomorphisme sur son image. Alors l'atlas de cartes  $(f^{-1}(U_i) \cap V_x, \varphi_i \circ f|_{f^{-1}(U_i) \cap V_x})_{i \in I, x \in M}$  est un atlas de cartes feuilletées  $C^k$  sur  $M$ , donc définit un feuilletage  $C^k$  de  $M$ , noté  $f^*\mathcal{F}$ , et appelé *feuilletage image réciproque* de  $\mathcal{F}$  par  $f$ . En particulier, l'image par  $f$  de la feuille  $(f^*\mathcal{F})_x$  est la feuille  $\mathcal{F}_{f(x)}$ , mais en général l'image réciproque par  $f$  d'une feuille de  $\mathcal{F}$  n'est pas réduite à une seule feuille de  $f^*\mathcal{F}$ .

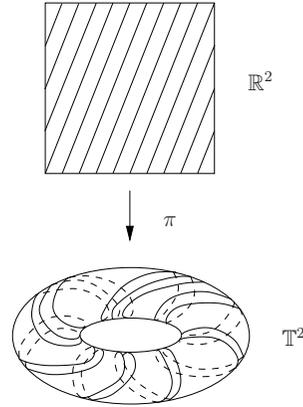
Un *isomorphisme (de feuilletages  $C^k$ )* d'une variété feuilletée  $(M, \mathcal{F})$  de classe  $C^k$  dans une autre  $(M', \mathcal{F}')$  est un  $C^k$ -diffeomorphisme  $f : M \rightarrow M'$ , tel que  $f^*(\mathcal{F}') = \mathcal{F}$  (ou de manière équivalente, telle que les applications  $f$  et  $f^{-1}$ , lues dans des cartes locales feuilletées, préservent les familles de sous-espaces horizontaux).

(4) Soit  $G$  un groupe discret agissant librement et proprement par  $C^k$ -diffeomorphismes sur une variété  $M$  de classe  $C^k$ . Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de  $M$ , qui est *invariant par  $G$*  (c'est-à-dire tout élément de  $G$  envoie carte feuilletée sur carte feuilletée :  $g^*\mathcal{F} = \mathcal{F}$  pour tout  $g$  dans  $G$ ). Alors la variété quotient  $G \backslash M$  admet un unique feuilletage  $\mathcal{F}'$ , appelé *feuilletage quotient* tel que, si  $\pi : M \rightarrow G \backslash M$  est la projection canonique, alors  $\pi^*\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ . La démonstration est la même, en travaillant avec des atlas de cartes feuilletés, que celle qui a permis de définir la structure de variété quotient sur  $G \backslash M$ , voir le paragraphe 1.4.2.

Par exemple, si  $F$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $p$  de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\mathbb{R}^n$  admet un feuilletage dont les feuilles sont les translatés de  $F$ . En particulier, ce feuilletage est invariant par l'action par translations de  $\mathbb{Z}^n$ . Donc il induit par passage au quotient dans le revêtement  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  un feuilletage analytique réel de dimension  $p$  du tore  $\mathbb{T}^n$ , appelé un *feuilletage linéaire du tore*.

Par exemple, si  $n = 2$ , et si  $F$  est une droite de pente irrationnelle, alors les feuilles du feuilletage correspondant de  $\mathbb{T}^2$  sont diféomorphes à  $\mathbb{R}$ , mais ce ne sont pas des sous-variétés de  $\mathbb{T}^2$ , car elles sont denses dans  $\mathbb{T}^2$ .

Plus généralement, toute feuille d'un feuilletage linéaire de dimension  $p$  d'un tore est diféomorphe à un produit  $\mathbb{R}^{p-i} \times \mathbb{T}^i$ .



### 3.9 Théorème de Frobenius

Soient  $k$  dans  $\mathbb{N} - \{0\} \cup \{\infty, \omega\}$ , et  $p \leq n$  dans  $\mathbb{N}$ . Soit  $M$  une variété de dimension  $n$  et de classe  $C^k$ .

Tout feuilletage  $\mathcal{F}$  de classe  $C^k$  et de dimension  $p$  sur  $M$  définit un champ de  $p$ -plans de classe  $C^{k-1}$ , qui est l'application

$$x \mapsto T_x \mathcal{F}_x$$

qui à un point  $x$  de  $M$  associe l'espace tangent en  $x$  à la feuille  $\mathcal{F}_x$  passant par  $x$ . (Ceci est bien défini, car  $\mathcal{F}_x$  est une sous-variété immergée de classe  $C^k$  de  $M$ .) On fera attention à la perte de différentiabilité si  $k \neq \infty, \omega$ . Pour simplifier les énoncés, nous supposons  $k = \infty$  dans la suite.

Un champ de  $p$ -plans  $\Delta$  de classe  $C^\infty$  est dit *intégrable* s'il existe un feuilletage  $\mathcal{F}$  de classe  $C^\infty$  et de dimension  $p$  sur  $M$  tel que  $\Delta_x = T_x \mathcal{F}_x$  pour tout  $x$  dans  $M$ .

Notons qu'un tel feuilletage est unique. En effet, soient  $\mathcal{F}'$  un autre tel feuilletage, et  $(U, \varphi)$  et  $(U', \varphi')$  des cartes feuilletées de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  respectivement. Considérons l'application  $\varphi' \circ \varphi^{-1} : (x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y))$  d'un ouvert de  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$  sur un autre. La dérivée  $\frac{\partial f_2}{\partial x}$  de sa seconde composante par rapport à la première variable est nulle puisque  $T_x \mathcal{F}'_x = T_x \mathcal{F}_x$ . Donc sa seconde composante  $f_2$  ne dépend localement que de  $y$ , et les deux cartes feuilletées sont compatibles. Par conséquent,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ .

Voici un critère très utile pour savoir si un champ de  $p$ -plans est intégrable.

**Théorème 3.11 (Théorème de Frobenius)** *Un champ de  $p$ -plans  $\Delta$  de classe  $C^\infty$  sur  $M$  est intégrable si et seulement si, pour tous les champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  sur  $M$  de classe  $C^\infty$  et tangents à  $\Delta$ , le crochet de Lie  $[X, Y]$  sur  $M$  est tangent à  $\Delta$ .*

**Démonstration.** Supposons d'abord que  $\Delta$  soit intégrable, défini par un feuilletage  $\mathcal{F}$  de dimension  $p$ . Soient  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs sur  $M$  tangents à  $\Delta$ , et  $x$  dans  $M$ . Montrons que  $[X, Y](x) \in \Delta_x$ . Quitte à prendre une carte locale  $(U, \varphi)$  en  $x$  et à remplacer  $X$  par  $\varphi_*(X|_U)$  et de même pour  $Y$ , on peut supposer que  $M = \mathbb{R}^n$  et que le feuilletage est le feuilletage par sous-espaces parallèles à  $\mathbb{R}^p \times \{0\}$  dans  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ . Mais alors, dire qu'un champ de vecteurs est tangent à  $\Delta$  équivaut à dire qu'il est combinaison linéaire de  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_p}$ . Comme le crochet de deux champs de vecteurs qui sont une telle combinaison linéaire en est une autre, le résultat en découle.

Réciproquement, supposons que la seconde propriété soit vérifiée, et montrons qu'alors  $\Delta$  est intégrable. Comme ce problème est local, on peut supposer que  $M$  est un voisinage ouvert de 0 dans  $\mathbb{R}^n$ . Par la proposition 3.10, quitte à réduire  $M$ , il existe  $(X_1, \dots, X_p)$  un  $p$ -uplet de champs de vecteurs de classe  $C^\infty$ , qui, en tout point de  $M$ , est une base de l'espace tangent en ce point.

Montrons tout d'abord que l'on peut se ramener au cas où  $[X_i, X_j] = 0$  pour  $i, j \in \{1, \dots, p\}$ . Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que  $X_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}(0)$  pour  $i \in \{1, \dots, p\}$ . Si  $X_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}$ , alors, quitte à réduire  $M$ , on peut supposer que la matrice  $(a_{i,j}(x))_{1 \leq i, j \leq p}$ , qui vaut la matrice identité en  $x = 0$ , est inversible, d'inverse  $(b_{i,j}(x))_{1 \leq i, j \leq p}$ . Par les formules donnant l'inverse d'une matrice, les fonctions  $b_{i,j}$  sont  $C^\infty$ . Posons  $X'_i = \sum_{j=1}^p b_{i,j} X_j$ . Alors les  $X'_i(x)$  engendrent encore  $\Delta_x$ . Par construction,  $X'_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=p+1}^n c_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}$ . Donc un petit calcul, utilisant le fait que  $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$ , montre que

$$[X'_i, X'_j] = \sum_{k=p+1}^n d_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Or par l'hypothèse, il existe des fonctions  $e_{i,j,k}$  pour  $i, j, k \in \{1, \dots, p\}$  de classe  $C^\infty$  telles que

$$[X'_i, X'_j] = \sum_{k=1}^p e_{i,j,k} X'_k = \sum_{k=1}^p e_{i,j,k} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{j=p+1}^n c_{k,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Donc par différence,  $\sum_{k=1}^p e_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial x_k} = 0$ , ce qui, par indépendance des  $\frac{\partial}{\partial x_k}$ , montre que  $e_{i,j,k} = 0$  pour  $i, j, k \in \{1, \dots, p\}$ , ce qu'il fallait démontrer.

Montrons maintenant par récurrence sur  $p$  que si  $(X_1, \dots, X_p)$  est un  $p$ -uplet de champs de vecteurs  $C^\infty$  linéairement indépendants, et commutants (c'est-à-dire  $[X_i, X_j] = 0$  pour tous  $i, j$ ), alors il existe un  $C^\infty$ -diféomorphisme local  $\varphi$  en 0 tel que, au voisinage de 0, on ait  $\varphi^*(X_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}$  pour  $i \in \{1, \dots, p\}$ . Ceci montrera que le champ de  $p$ -plans engendré par  $\varphi^*(X_1), \dots, \varphi^*(X_p)$  est tangent au feuilletage  $\mathcal{F}$  par les sous-espaces affines parallèles à  $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ . Donc le champ de plans engendré par  $X_1, \dots, X_p$  est intégrable au voisinage de 0 (tangent au feuilletage image réciproque par  $\varphi^{-1}$  de  $\mathcal{F}$ ).

Le cas  $p = 1$  découle du théorème de redressement 3.4. Supposons le résultat vrai pour  $p - 1$ . Alors nous pouvons supposer, quitte à utiliser un  $C^\infty$ -difféomorphisme local en 0, que  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$  pour  $i \in \{1, \dots, p - 1\}$ . Écrivons

$$X_p = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j} .$$

Comme  $[X_p, X_i] = 0$  pour  $i \in \{1, \dots, p - 1\}$ , on a  $\frac{\partial a_j}{\partial x_i} = 0$  pour tout  $j$ , c'est-à-dire que  $a_j$  est une fonction des coordonnées  $x_p, \dots, x_n$  seulement. Par le théorème du redressement 3.4 appliqué au champ de vecteurs  $Y = \sum_{j=p}^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  sur  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-p+1}$ , on peut supposer que  $Y = \frac{\partial}{\partial x_p}$ , de sorte que  $X_p = \sum_{j=1}^{p-1} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_p}$ . Pour  $i \in \{1, \dots, p - 1\}$ , posons  $f_i(x_p, \dots, x_n) = -\int_0^{x_p} a_i(t, x_{p+1}, \dots, x_n) dt$ , qui est de classe  $C^\infty$ . Posons aussi

$$y_i = \begin{cases} x_i + f_i(x_p, \dots, x_n) & \text{pour } i \in \{1, \dots, p - 1\} \\ x_i & \text{pour } i \in \{p, \dots, n\} . \end{cases}$$

Il est immédiat que l'application  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_n)$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme local en 0. Rappelons (voir la remarque suivant la démonstration du théorème 3.6) que, pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , on a

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_i} .$$

Donc, pour  $j \in \{1, \dots, p - 1\}$ , on a  $\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}$  et

$$\frac{\partial}{\partial x_p} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_p} \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{\partial}{\partial y_p} = \sum_{i=1}^{p-1} -a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial y_p} .$$

Donc, pour  $j \in \{1, \dots, p\}$ , on a  $X_j = \frac{\partial}{\partial y_j}$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

Par exemple, le champs de plans sur  $\mathbb{R}^3$  de l'exemple (3) du paragraphe 3.7, défini par  $\Delta_{(x,y,z)} = \text{Vect}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}\right)$ , est non intégrable.

**Remarque.** Si  $\Delta$  est un champ de  $p$ -plans  $C^\infty$  sur  $M$ , alors (par la proposition 3.10) pour tout  $x_0$  dans  $M$ , il existe un voisinage ouvert  $U_{x_0}$  de  $x_0$  dans  $M$  et  $X_1, \dots, X_p$  des champs de vecteurs  $C^\infty$  sur  $U$  tels que pour tout  $x$  dans  $U$ , les vecteurs  $X_1(x), \dots, X_p(x)$  engendrent  $\Delta_x$ . Pour montrer que  $\Delta$  est intégrable, il suffit alors de vérifier que

$$\forall x_0 \in M, \forall x \in U_{x_0}, \forall i, j \in \{1, \dots, p\}, \quad [X_i, X_j](x) \in \Delta_x .$$

**Démonstration.** Soient  $X$  et  $Y$  des champs de vecteurs  $C^\infty$  tangents à  $\Delta$ . Pour tout  $x_0$  dans  $M$ , il existe des fonctions  $f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_p$  de classe  $C^\infty$  de  $U_{x_0}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $X|_{U_{x_0}} = \sum_{i=1}^p f_i X_i$  et  $Y|_{U_{x_0}} = \sum_{i=1}^p g_i X_i$ . Alors pour tout  $x$  dans  $U_{x_0}$ , le vecteur  $[X, Y](x)$  appartient à l'espace vectoriel engendré par les  $[X_i, X_j](x)$ , par la bilinéarité et le troisième point de la proposition 3.9, donc il appartient à  $\Delta_x$ . On applique alors le théorème 3.11 de Frobenius.  $\square$

## 4 Formes différentielles

Nous renvoyons au paragraphe 2.7 pour la construction des fibrés vectoriels des  $p$ -formes alternées  $\lambda_p : \Lambda^p T^*M \rightarrow M$  et celui des formes alternées  $\lambda_* : \Lambda^* T^*M \rightarrow M$  sur une variété donnée  $M$ .

### 4.1 Formes différentielles

Soient  $n$  et  $p$  deux éléments de  $\mathbb{N}$ , et  $M$  une variété  $C^{r+1}$  de dimension  $n$ , avec  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ .

Une  $p$ -forme différentielle (resp.  $p$ -forme différentielle de classe  $C^r$ ) sur  $M$  est une section (resp. une section de classe  $C^r$ ) du fibré vectoriel  $\lambda_p : \Lambda^p T^*M \rightarrow M$ . Ainsi, une  $p$ -forme différentielle  $\omega$  associe, à tout  $x$  dans  $M$ , une forme  $p$ -linéaire alternée  $\omega_x$  sur l'espace tangent  $T_x M$  à  $M$  en  $x$ . De même, une forme différentielle (resp. forme différentielle de classe  $C^r$ ) sur  $M$  est une section (resp. une section de classe  $C^r$ ) du fibré vectoriel  $\lambda_* : \Lambda^* T^*M \rightarrow M$ . Ainsi, une forme différentielle  $\omega$  associe, à tout  $x$  dans  $M$ , une somme de formes multilinéaires alternées  $\omega_x$  sur l'espace tangent  $T_x M$  à  $M$  en  $x$ .

On note  $\Omega^{p,(r)}(M)$  (et  $\Omega^p(M)$  quand  $r$  est sous-entendue) l'ensemble des  $p$ -formes différentielles  $C^r$  sur  $M$ , et  $\Omega^{(r)}(M)$  (et  $\Omega(M)$  quand  $r$  est sous-entendue) l'ensemble des formes différentielles  $C^r$  sur  $M$ . On a une inclusion évidente  $\Omega^{p,(r)}(M) \rightarrow \Omega^{(r)}(M)$ .

Comme  $\Lambda^0 T^*M$  s'identifie avec  $M \times \mathbb{R}$ , remarquons que  $\Omega^{0,(r)}(M)$  s'identifie avec  $C^r(M, \mathbb{R})$ . Par convention, on pose  $\Omega^{p,(r)}(M) = \{0\}$  si  $p < 0$ .

#### • Structure d'algèbre.

Rappelons que l'ensemble des sections d'un fibré vectoriel, muni des opérations d'addition et de multiplication externe point par point, est un espace vectoriel. Soient  $\omega, \omega'$  dans  $\Omega^{(r)}(M)$ , et  $a$  dans  $\mathbb{R}$ . On appelle *addition* de  $\omega$  et  $\omega'$  la forme différentielle

$$\omega + \omega' : x \mapsto \omega_x + \omega'_x .$$

On appelle *multiplication externe* de  $\omega$  par  $a$  la forme différentielle

$$a\omega : x \mapsto a\omega_x .$$

On appelle *produit extérieur* de  $\omega$  et  $\omega'$  la forme différentielle

$$\omega \wedge \omega' : x \mapsto \omega_x \wedge \omega'_x .$$

**Proposition 4.1** *L'ensemble  $\Omega^{(r)}(M)$ , muni des opérations ci-dessus et de la famille  $(\Omega^{p,(r)}(M))_{p \in \mathbb{N}}$ , est une algèbre réelle (associative, unitaire) graduée, anticommutative, i.e.*

- $(\Omega^{(r)}(M), +, \cdot, \wedge)$  est une algèbre (associative, unitaire) sur  $\mathbb{R}$ , et  $\Omega^{p,(r)}(M)$  est un sous-espace vectoriel;

- $\Omega^{(r)}(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Omega^{p,(r)}(M)$ , et si  $\alpha \in \Omega^{p,(r)}(M)$  et  $\beta \in \Omega^{q,(r)}(M)$ , alors  $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{p+q,(r)}(M)$  ;
- si  $\alpha \in \Omega^{p,(r)}(M)$  et  $\beta \in \Omega^{q,(r)}(M)$ , alors  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$ .

**Remarque.** En posant, pour toute fonction réelle  $f$  de classe  $C^r$  sur  $M$  et toute forme différentielle  $\omega$  de classe  $C^r$  sur  $M$ ,

$$f \cdot \omega : x \mapsto f(x)\omega_x,$$

l'ensemble  $\Omega^{(r)}(M)$  est muni d'une structure d'algèbre (associative, unitaire) graduée anticommutative sur l'anneau  $C^r(M, \mathbb{R})$ .

**Démonstration.** Il est immédiat que les opérations préservent la régularité  $C^r$  des formes différentielles. Le résultat découle alors du théorème A.16 de l'appendice A.5.  $\square$

Par exemple, si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  est une application  $C^{r+1}$ , alors l'application  $df : M \rightarrow T^*M$ , qui au point  $x$  de  $M$  vaut la forme linéaire

$$df_x : X \mapsto T_x f(X)$$

sur l'espace tangent  $T_x M$ , est une 1-forme différentielle  $C^r$ , appelée la *différentielle* de  $f$ . Il ne faut pas confondre  $df : M \rightarrow T^*M$  et  $Tf : TM \rightarrow T\mathbb{R}$ , même si l'un détermine l'autre.

Si  $U$  est un ouvert de  $M$ , alors l'application

$$\omega \mapsto \omega|_U$$

est un morphisme d'algèbres (unitaires), gradué de degré 0, de  $\Omega^{(r)}(M)$  dans  $\Omega^{(r)}(U)$ . De même que pour les champs de vecteurs, les formes différentielles vérifient la propriété de localité des faisceaux : si  $U$  est un ouvert, réunion d'ouverts  $U_i$ , si  $\omega_i$  est une forme différentielle  $C^r$  sur  $U_i$ , tels que  $\omega_i = \omega_j$  sur  $U_i \cap U_j$ , alors l'unique application  $\omega : U \rightarrow \Lambda^* T^*U$  telle que  $\omega|_{U_i} = \omega_i$  est une forme différentielle  $C^r$  sur  $U$ .

**Remarque.** Si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , alors comme  $TU$  s'identifie avec  $U \times \mathbb{R}^n$ , la carte  $(U, \text{id})$  de la variété  $U$  fournit une identification

$$\Lambda^* T^*U = U \times \Lambda^*(\mathbb{R}^n)^*.$$

Une forme différentielle  $x \mapsto (x, \omega_x)$  sur  $U$  s'identifie donc à une application  $x \mapsto \omega_x$  de  $U$  dans  $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)^*$ . Cette forme différentielle sur  $U$  est de classe  $C^r$  si et seulement si l'application  $x \mapsto \omega_x$  est  $C^r$ . Nous ferons cette identification dans toute la suite de ces notes.

Soient  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , et  $(e_I^*)_{I \in \mathcal{I}_n}$ , où  $\mathcal{I}_n$  est l'ensemble des suites strictement croissantes dans  $\{1, \dots, n\}$ , la base correspondante de  $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)^*$ . Toute forme différentielle  $\omega$  sur  $U$  s'écrit alors, de manière unique,

$$\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}_n} f_I e_I^*,$$

où  $f_I : U \rightarrow \mathbb{R}$  est une application, de classe  $C^r$  si  $\omega$  l'est.

Si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est une application  $C^{r+1}$ , alors la 1-forme différentielle  $df$  est l'application qui à  $x$  dans  $U$  associe la différentielle (ou application dérivée)  $df_x$ , au sens du calcul différentiel. Par exemple, si  $x_i$  (avec notation abusive, mais parlante) est l'application  $i$ -ème coordonnée  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ , qui est linéaire, alors la différentielle  $dx_i$  est constante sur  $U$ , et vaut encore l'application  $i$ -ème coordonnée. C'est-à-dire, en tout point  $x$  de  $U$ , la suite  $(dx_1, \dots, dx_n)$  est la base duale de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Donc

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

De plus, en posant  $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$  pour tout  $I = \{i_1, \dots, i_p\}$  avec  $i_1 < \dots < i_p$  et  $p$  dans  $\mathbb{N}$  (par convention  $dx_\emptyset = 1$ ), alors toute forme différentielle  $\omega$  sur  $U$  s'écrit, de manière unique,

$$\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}_n} \omega_I dx_I$$

où  $\omega_I \in C^r(U, \mathbb{R})$ . De même,

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

si  $\omega$  est une  $p$ -forme différentielle. La famille  $(dx_I)_{I \in \mathcal{I}_n}$  est donc une base du module  $\Omega^{(r)}(U)$  sur l'anneau  $C^r(U, \mathbb{R})$ . Attention, pour une variété générale  $M$ , le  $C^r(M, \mathbb{R})$ -module  $\Omega^{(r)}(M)$  n'est pas forcément libre.

**Proposition 4.2** Si  $X_1, \dots, X_p$  sont des champs de vecteurs sur  $M$ , et si  $\omega_1, \dots, \omega_p$  sont des 1-formes différentielles sur  $M$ , alors, pour tout  $x$  dans  $M$ , on a

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)_x(X_1(x), \dots, X_k(x)) = \det((\omega_i)_x(X_j(x)))_{1 \leq i, j \leq k}.$$

**Démonstration.** Ceci découle de la proposition A.17 de l'appendice A.5.  $\square$

• **Image réciproque.**

Soient  $N$  une variété  $C^{r+1}$  avec  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ , et  $f : M \rightarrow N$  une application  $C^{r+1}$ .

Pour tout  $\omega \in \Omega^{p,(r)}(N)$ , on note  $f^*\omega$ , et on appelle *image réciproque* de  $\omega$  par  $f$ , la forme différentielle  $x \mapsto (T_x f)^*(\omega_{f(x)})$ , donc définie, pour tout  $x$  dans  $M$  et tous  $X_1, \dots, X_p$  dans  $T_x M$ , par

$$(f^*\omega)_x(X_1, \dots, X_p) = \omega_{f(x)}(T_x f(X_1), \dots, T_x f(X_p)).$$

Il est immédiat que  $f^*\omega$  est de classe  $C^r$ . On étend par linéarité  $f^*$  à  $\Omega^{(r)}(N)$ . Si  $g$  appartient à  $\Omega^{0,(r)}(M) = C^r(M, \mathbb{R})$ , alors

$$f^*g = g \circ f.$$

Si  $\omega$  est une 1-forme différentielle, et si  ${}^i(T_x f)$  est l'application linéaire de  $T_{f(x)}^* N$  dans  $T_x^* M$ , duale de  $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ , alors

$$(f^* \omega)_x = {}^i(T_x f)(\omega_{f(x)}) = \omega_{f(x)} \circ T_x f .$$

Remarquons que si  $U$  est un ouvert de  $N$ , et si  $i : U \rightarrow N$  est l'inclusion, alors

$$\forall \omega \in \Omega(N), \quad i^* \omega = \omega|_U ,$$

donc l'opération de restriction aux ouverts est un cas particulier d'image réciproque.

**Exercice E.31** Montrer que si  $g : N \rightarrow \mathbb{R}$  est une application  $C^{r+1}$ , alors  $f^*(dg) = d(g \circ f) = d(f^*g)$ .

**Proposition 4.3** L'application  $f^* : \Omega^{(r)}(N) \rightarrow \Omega^{(r)}(M)$  est un morphisme d'algèbres (unitaires) graduées, qui commute aux restrictions, c'est-à-dire  $f^*$  est linéaire,  $f^*1 = 1$ ,

$$\forall \omega, \eta \in \Omega^{(r)}(N), \quad f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta) ,$$

$f^*(\Omega^{p,(r)}(N)) \subset \Omega^{p,(r)}(M)$ , et, pour tout ouvert  $U$  de  $N$  et tout  $\omega \in \Omega^{(r)}(N)$ ,

$$(f^*\omega)|_{f^{-1}(U)} = (f|_{f^{-1}(U)})^*(\omega|_U) .$$

De plus, si  $g : N \rightarrow P$  est une application  $C^{r+1}$ , alors

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* .$$

**Démonstration.** La commutation avec les restrictions est immédiate, et découle de la dernière assertion, en remarquant que si  $i : U \rightarrow N$  et  $j : f^{-1}(U) \rightarrow M$  sont les inclusions, alors  $f \circ j = i \circ (f|_{f^{-1}(U)})$ .

La première partie découle du théorème A.16 de l'appendice A.5. La dernière assertion découle, par le théorème de dérivation des fonctions composées, de la nature contravariante des algèbres extérieures :

$$((g \circ f)^* \omega)_x = (T_x(g \circ f))^*(\omega_{g \circ f(x)}) = (T_x f)^*((T_{f(x)} g)^*(\omega_{g(f(x))})) = (f^* \circ g^*(\omega))_x .$$

□

Voici quelques calculs pratiques d'images réciproques. Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  et  $f : U \rightarrow V$  une application  $C^1$  avec  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  pour tout  $x \in U$ . Notons  $x_1, \dots, x_n$  les coordonnées dans  $U$  et  $y_1, \dots, y_m$  celles dans  $V$ .

Pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ , comme  $T_x f = (T_x f_1, \dots, T_x f_m)$  et comme  $y_j$  est l'application  $j$ -ème coordonnée, on a

$$f^* dy_j = d(f_j) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i .$$

Soit  $\omega$  une forme différentielle sur  $V$ , d'écriture  $\omega = \sum_{J \in \mathcal{I}_m} \omega_J dy_J$  dans la base  $(dy_J)_{J \in \mathcal{I}_m}$  du module  $\Omega^{(r)}(V)$  sur l'anneau  $C^r(V, \mathbb{R})$ . Si  $J = \{j_1, \dots, j_p\}$  avec  $j_1 < \dots < j_p$ , notons

$$df_J = d(f_{j_1}) \wedge \dots \wedge d(f_{j_p}) .$$

Comme  $f^*$  est linéaire et commute au produit extérieur, on a, d'après la formule précédente,

$$f^* \omega = \sum_{J \in \mathcal{I}_m} (\omega_J \circ f) df_J .$$

(Du point de vue des calculs, on remplace donc  $y$  par  $f(x)$  et  $dy_j$  par  $d(f_j)$ .) En particulier, si  $\omega \in \Omega^{p,(r)}(V)$ , alors

$$f^* \omega = \sum_{j_1 < \dots < j_p, 1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} \omega_{j_1, \dots, j_p} \circ f \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial f_{j_p}}{\partial x_{i_p}} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} .$$

De plus, si  $n = m$ , si

$$J_f(x) = \det T_x f = \det \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

est le jacobien de  $f$  en  $x$ , et si  $\omega : y \mapsto c(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$ , alors

$$(f^* \omega)_x = c \circ f(x) J_f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n .$$

Cette formule est appelée la *formule de changement de variable* des formes différentielles de degré maximal.

**Exemples :** (1) Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  est l'application exponentielle  $x \mapsto e^x$ , alors

$$f^* \left( \frac{dy}{y} \right) = dx .$$

(2) Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est l'application  $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ , alors

$$f^*(dx \wedge dy) = r dr \wedge d\theta .$$

(3) Si  $f : ]0, +\infty[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$  est l'application  $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ , alors

$$f^* \left( \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \right) = d\theta .$$

Lorsque le changement de variable est clair, on note parfois encore  $\omega$  la forme différentielle  $f^* \omega$  (par exemple, on écrit  $dx \wedge dy = r dr \wedge d\theta$  avec le changement de variable (2) ci-dessus).

**Remarque.** Si  $(U, \varphi)$  est une carte locale  $C^{r+1}$  de  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , et si  $\omega \in \Omega^{(r)}(M)$ , alors

$$(\varphi^{-1})^*(\omega|_U) \in \Omega^{(r)}(\varphi(U)) .$$

En particulier, on peut utiliser la base de  $\Omega^{(r)}(\varphi(U))$  pour exprimer la forme différentielle  $(\varphi^{-1})^*(\omega|_U)$ , appelée la *forme différentielle  $\omega$  lue dans la carte  $(U, \varphi)$* . C'est ce point de vue qu'il est souvent le plus utile d'utiliser dans les calculs. En particulier, on déduit le résultat suivant de l'écriture canonique d'une forme différentielle dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 4.4** *Avec les notations ci-dessus, on note  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  les composantes de  $\varphi$  et, pour tout  $I = \{i_1, \dots, i_p\}$  avec  $i_1 < \dots < i_p$  et  $p \in \mathbb{N}$ , on pose  $d\varphi_I = d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_p}$ . Alors pour tout  $\omega$  dans  $\Omega^{(r)}(M)$ , il existe une unique famille  $(\omega_I)_{I \in \mathcal{I}_n}$  d'applications de classe  $C^r$  sur  $U$  telle que, dans  $\Omega^{(r)}(U)$ , l'égalité*

$$\omega|_U = \sum_{I \in \mathcal{I}_n} \omega_I d\varphi_I$$

soit satisfaite. □

• **Différentielle extérieure.**

On suppose, pour simplifier, que  $r = \infty$  dans ce paragraphe. On note  $\Omega^p(M) = \Omega^{p,(\infty)}(M)$  et  $\Omega(M) = \Omega^{(\infty)}(M)$ .

L'application  $d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$ , qui à une application  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  associe sa différentielle

$$df : x \mapsto \{df_x : X \mapsto T_x f(X)\},$$

est une application linéaire, telle que

$$d(fg) = g df + f dg.$$

Le résultat suivant dit que cette application s'étend, de manière unique, à toutes les formes différentielles. Le passage (de l'infinitésimal au global) des propriétés de linéarité et de functorialité des algèbres extérieures d'espaces vectoriels de dimension finie, à celles des formes différentielles, peut être traitée (et a été traitée dans les paragraphes précédents) de manière directe. En ce qui concerne la définition de la différentielle extérieure qui suit, pour éviter de trop longues discussions sur la structure de l'espace tangent du fibré des formes alternées sur une variété, nous ferons une étape de plus, en passant de l'infinitésimal au local, puis du local au global. La situation locale consistera à étudier le cas des formes différentielles sur les ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , en suivant en cela de nombreux autres ouvrages sur le sujet (voir [CarH, Laf, Die2]).

**Théorème 4.5** *Il existe une et une seule application linéaire  $d : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$  graduée de degré +1, c'est-à-dire  $d(\Omega^p(M)) \subset \Omega^{p+1}(M)$ , telle que*

- (1) *pour tout  $f$  dans  $\Omega^0(M)$ , la forme différentielle  $df$  est égale à la différentielle de  $f$  définie ci-dessus ;*

- (2)  *$d$  est une antiderivation de l'algèbre graduée  $\Omega(M)$ , c'est-à-dire pour tous  $\alpha \in \Omega^p(M)$  et  $\beta \in \Omega^q(M)$ , on a*

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta) ;$$

- (3)  *$d \circ d = 0$ .*

*De plus, les applications  $d$  commutent avec les restrictions aux ouverts : pour toute forme différentielle  $\omega \in \Omega(M)$ , pour tout ouvert  $U$  de  $M$ ,*

$$(d\omega)|_U = d(\omega|_U).$$

*Enfin, les applications  $d$  commutent avec les images réciproques : pour toutes les variétés  $M$  et  $N$  de classe  $C^\infty$ , pour toute application  $f : M \rightarrow N$  de classe  $C^\infty$ , et pour toute forme différentielle  $\omega \in \Omega(N)$ , on a*

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega).$$

Cette application  $d$  est appelée la *différentielle extérieure* (ou *différentielle* tout court) des formes différentielles. Par convention, on note  $d : \Omega^{-1}(M) \rightarrow \Omega^0(M)$  l'application nulle.

**Remarque.** Nous verrons dans la démonstration qu'il suffit dans (3) de demander la condition  $d \circ d = 0$  sur les applications.

**Démonstration.** Pour prouver l'unicité, montrons que, pour tout  $\omega$  dans  $\Omega(M)$ , les propriétés de la différentielle déterminent uniquement  $d\omega$  sur un voisinage suffisamment petit de tout point. Cela conclura, par les propriétés de localité ci-dessus des formes différentielles. Commençons par démontrer le lemme suivant, qui dit qu'un opérateur linéaire  $d : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$  qui vérifie les propriétés (1) et (2) est un opérateur « local ».

**Lemme 4.6** *Si  $V$  est un ouvert de  $M$ , et si  $\alpha, \beta$  sont des formes différentielles sur  $M$  telles que  $\alpha|_V = \beta|_V$ , alors  $(d\alpha)|_V = (d\beta)|_V$ .*

**Démonstration.** Pour tout  $x$  dans  $V$ , soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^\infty$ , de support contenu dans  $V$ , valant 1 sur un voisinage de  $x$ . Alors  $f(\alpha - \beta) = 0$  et, par linéarité  $d(f(\alpha - \beta)) = 0$ . Comme  $d$  coïncide avec la différentielle des fonctions sur  $\Omega^0(M)$ , on a  $df_x = 0$  et  $f(x) = 1$ . De plus,

$$d(f(\alpha - \beta)) = df \wedge (\alpha - \beta) + f \wedge d(\alpha - \beta)$$

par (2). Donc par linéarité,  $d\alpha_x = d\beta_x$ . Comme  $x$  est arbitraire, ceci montre le résultat. □

Pour tout  $x$  dans  $M$ , soit  $(U, \varphi)$  une carte locale de  $M$  en  $x$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , avec  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  les composantes de  $\varphi$ , et  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^\infty$ , de support contenu dans  $U$ , valant 1 sur un voisinage ouvert  $V$  de  $x$ . Pour  $I = \{i_1, \dots, i_p\}$  où

$i_1 < \dots < i_p$ , posons  $d(f\varphi)_I = d(f\varphi_{i_1}) \wedge \dots \wedge d(f\varphi_{i_p})$ . Par la proposition 4.4, on écrit

$$\omega|_U = \sum_I \omega_I d\varphi_I.$$

Les formes différentielles  $\omega$  et  $\sum_I (f\omega_I)d(f\varphi)_I$  coïncident sur  $V$ , donc, par le lemme ci-dessus, leurs différentielles coïncident sur  $V$ . Par linéarité et par les propriétés de la différentielle, on a, en restriction à  $V$ ,

$$d\omega = d\left(\sum_I (f\omega_I)d(f\varphi)_I\right) = \sum_I d(f\omega_I) \wedge d(f\varphi)_I.$$

Le terme de droite ne faisant plus intervenir que des différentielles de fonctions, par la propriété (1), le résultat d'unicité en découle.

Pour montrer l'existence, supposons tout d'abord que  $M = U$  soit un ouvert de  $E = \mathbb{R}^n$ . Pour tout  $\omega$  dans  $\Omega^p(U) = C^\infty(U, \Lambda^p \tilde{E})$ , pour tout  $x$  dans  $U$ , comme  $T_x\omega \in \mathcal{L}(E, \Lambda^p \tilde{E})$ , posons, pour tous  $X_1, \dots, X_{p+1}$  dans  $E$ ,

$$d\omega_x(X_1, \dots, X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} T_x\omega(X_i)(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{p+1}).$$

Cette application  $d : \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p+1}(U)$  est linéaire, et coïncide bien avec la différentielle des applications pour  $p = 0$ . On l'étend par linéarité à  $\Omega(U)$  en une application linéaire graduée de degré  $+1$ .

**Lemme 4.7** *L'application linéaire  $d : \Omega(U) \rightarrow \Omega(U)$  ainsi définie vérifie les propriétés suivantes.*

(1) Si  $I = \{i_1, \dots, i_p\}$  avec  $i_1 < \dots < i_p$ , et si  $f \in C^\infty(U)$  et  $\omega = f dx_I$ , alors

$$d\omega = df \wedge dx_I.$$

(2) Pour tous  $\alpha \in \Omega^p(U)$  et  $\beta \in \Omega^q(U)$ , on a

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta).$$

(3) L'application  $d \circ d : \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p+2}(U)$  est nulle.

(4) Si  $V$  est un ouvert contenu dans  $U$ , alors, pour tout  $\omega$  dans  $\Omega(U)$ ,

$$(d\omega)|_V = d(\omega|_V).$$

(5) Si  $V$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  et si  $\varphi : U \rightarrow V$  est une application  $C^\infty$ , alors, pour tout  $\omega$  dans  $\Omega^p(V)$ ,

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega).$$

**Démonstration.** (1) Comme  $dx_I$  est constante sur  $U$ , on a, pour tout  $x$  dans  $U$  et  $X$  dans  $E$ ,  $T_x\omega(X) = df_x(X)dx_I$ . Donc, pour tous  $X_0, \dots, X_{p+1}$  dans  $E$ , par définition de  $d$  puis par définition du produit extérieur,

$$\begin{aligned} d\omega_x(X_1, \dots, X_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} df_x(X_i) dx_I(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{p+1}) \\ &= (df_x \wedge dx_I)(X_1, \dots, X_{p+1}). \end{aligned}$$

(2) Par linéarité, il suffit de montrer le résultat pour  $\alpha = f dx_I$  (où  $I$  est de cardinal  $p$ ) et  $\beta = g dx_J$ . Comme  $\alpha \wedge \beta = fg dx_I \wedge dx_J$ , on a, en utilisant (1),

$$d(\alpha \wedge \beta) = d(fg) \wedge dx_I \wedge dx_J = (g df) \wedge dx_I \wedge dx_J + (f dg) \wedge dx_I \wedge dx_J =$$

$$(df \wedge dx_I) \wedge (g dx_J) + (-1)^p (f dx_I) \wedge (dg \wedge dx_J) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta).$$

(3) Par linéarité, il suffit de montrer que pour  $f \in C^\infty(U)$  et  $\omega = f dx_I$ , on a  $(d \circ d)(\omega) = 0$ . Or

$$d(df) = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(d\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i.$$

En utilisant le lemme de Schwarz  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  et l'antisymétrie du produit extérieur  $dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$ , on obtient que  $d(df) = 0$ . Notons que (par exemple par l'assertion (1))

$$d(dx_I) = 0.$$

Donc

$$d(d\omega) = d(df \wedge dx_I) = (d(df)) \wedge dx_I - df \wedge d(dx_I) = 0.$$

(4) C'est immédiat (et cela découle de (5) en considérant l'inclusion  $\varphi$  de  $U$  dans  $V$ ).

(5) Tout d'abord, dans le cas particulier où  $p = 0$ , le résultat découle de l'exercice E.31.

En général, et par linéarité, il suffit de montrer le résultat pour  $\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$  où  $f \in C^\infty(U)$ . Par les propriétés de l'image réciproque (voir la proposition 4.3) et le cas  $p = 0$ , on a

$$\varphi^*\omega = \varphi^*f d(\varphi^*x_{i_1}) \wedge \dots \wedge d(\varphi^*x_{i_p}).$$

Donc

$$d(\varphi^*\omega) = d(\varphi^*f) \wedge d(\varphi^*x_{i_1}) \wedge \dots \wedge d(\varphi^*x_{i_p}) = \varphi^*(df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) = \varphi^*(d\omega). \quad \square$$

Pour montrer l'existence en général, pour tout  $\omega$  dans  $\Omega(M)$ , pour toute carte locale  $(U, \varphi)$  de classe  $C^\infty$  de  $M$  et tout  $x$  dans  $U$ , comme la différentielle a été définie sur  $(\varphi^{-1})^*\omega \in \Omega(\varphi(U))$ , posons

$$(d\omega)|_U = \varphi^*d((\varphi^{-1})^*(\omega|_U)) .$$

Par les propriétés de commutation des images réciproques et des différentielles sur les ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , cette formule ne dépend pas de la carte choisie, et définit, par les propriétés de localité des formes différentielles, une forme différentielle sur  $M$ . Les propriétés du théorème 4.5 découlent facilement de celles du lemme 4.7.  $\square$

**Remarque.** Si  $M$  est une variété de classe  $C^{r+1}$  avec  $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ , la démonstration ci-dessus montre qu'il existe une application  $d : \Omega^{(r)}(M) \rightarrow \Omega^{(r-1)}(M)$ , vérifiant (1) et (2) et commutant avec les images réciproques par des applications de classe  $C^{r+1}$ , et qui, si  $r \geq 2$ , vérifie (3) et est unique.

Voici quelques calculs pratiques de la différentielle extérieure de formes différentielles. Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $I = \{i_1, \dots, i_p\}$  avec  $i_1 < \dots < i_p$ , alors par les propriétés de la différentielle extérieure (ou le lemme 4.7 (1)),

$$d(dx_I) = 0$$

et, si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est une application  $C^\infty$ ,

$$d(fdx_I) = df \wedge dx_I .$$

Donc, par linéarité, si  $\omega$  une forme différentielle sur  $U$ , d'écriture  $\omega = \sum_I \omega_I dx_I$  dans la base usuelle de  $\Omega(U)$  sur l'anneau  $C^\infty(U)$ , alors

$$d\omega = \sum_I d\omega_I \wedge dx_I .$$

En particulier, si  $\omega \in \Omega^p(U)$ , alors

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} d\omega_{i_1, \dots, i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} = \sum_{i_1 < \dots < i_p, j} \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_p}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} .$$

On peut alors utiliser l'antisymétrie du produit extérieur pour donner l'écriture de  $d\omega$  dans la base usuelle du module (libre)  $\Omega(U)$  sur l'anneau  $C^\infty(U)$ .

**Exemples.** (1) Si  $M = \mathbb{R}^3$ , et si

$$\omega = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy$$

est une 2-forme différentielle de classe  $C^\infty$ , alors, en utilisant que

$$d\omega = dA \wedge dy \wedge dz + dB \wedge dz \wedge dx + dC \wedge dx \wedge dy ,$$

on obtient

$$d\omega = \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz .$$

(2) Si  $M = \mathbb{R}^3$ , et si

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$$

est une 1-forme différentielle de classe  $C^\infty$ , alors, en utilisant que

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz ,$$

on obtient

$$d\omega = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy .$$

#### • Produit intérieur et dérivée de Lie.

Ce paragraphe exploite une idée de « dualité » entre champs de vecteurs et 1-formes différentielles. On suppose toujours, pour simplifier, que  $r = \infty$ .

Étant donné un champ de vecteurs  $X$  de classe  $C^\infty$  sur  $M$ , nous avons défini, dans le paragraphe 3.5, une dérivation  $\mathcal{L}_X : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$  (aussi notée  $f \mapsto X(f)$ ), qui vérifiait, outre sa définition  $\mathcal{L}_X(f) : x \mapsto T_x f(X(x))$ , les propriétés suivantes :

- (1)  $\mathcal{L}_X : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$  est linéaire,
- (2)  $\mathcal{L}_X(fg) = g\mathcal{L}_X(f) + f\mathcal{L}_X(g)$ ,
- (3)  $\mathcal{L}_{[X, Y]} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$ ,
- (4) si  $(\phi_t)$  est le flot local de  $X$ , alors  $\mathcal{L}_X(f) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f \circ \phi_t$ .

Le résultat 4.9 ci-dessous dit en particulier que cette dérivation s'étend en une dérivation (de degré 0) de l'algèbre graduée  $\Omega(M)$ . Avant de l'énoncer, introduisons un nouvel outil.

Soient  $X$  un champ de vecteurs de classe  $C^\infty$  sur  $M$  et  $\omega \in \Omega^p(M)$ . On appelle *produit intérieur* de  $\omega$  par  $X$ , et on note  $i_X \omega$ , la forme différentielle, appartenant à  $\Omega^{p-1}(M)$ , définie par  $i_X \omega = 0$  si  $p = 0$ , et sinon, pour tout  $x$  dans  $M$  et tous  $\xi_1, \dots, \xi_{p-1}$  dans  $T_x M$ ,

$$(i_X \omega)_x(\xi_1, \dots, \xi_{p-1}) = \omega_x(X(x), \xi_1, \dots, \xi_{p-1}) .$$

On étend additivement l'application  $i_X$  à  $\Omega(M)$ .

**Proposition 4.8** *L'application  $i_X : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$  est une antidérivation de degré  $-1$  de l'algèbre graduée  $\Omega(M)$ , i.e.*

- (1)  $i_X : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$  est linéaire et  $i_X(\Omega^p(M)) \subset \Omega^{p-1}(M)$  pour tout  $p$  dans  $\mathbb{N}$ .

(2) pour tous  $\alpha$  dans  $\Omega^p(M)$  et  $\beta$  dans  $\Omega^q(M)$ , on a

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (i_X\beta).$$

De plus, l'opérateur  $i_X$  vérifie la propriété de localité suivante : pour tout ouvert  $U$  de  $M$ , on a

$$(i_X\omega)|_U = i_{(X|_U)}(\omega|_U).$$

**Démonstration.** La propriété de localité est immédiate par définition. Le reste de la démonstration découle facilement de la proposition A.20.  $\square$

**Remarque.** Il découle de la définition que  $i_X$  est  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linéaire, c'est-à-dire pour tout  $f$  dans  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  et tout  $\omega$  dans  $\Omega(M)$ , on a

$$i_X(f\omega) = f i_X\omega.$$

**Proposition 4.9** Pour tout champ de vecteurs  $X$  de classe  $C^\infty$  sur  $M$ , il existe une et une seule application linéaire  $\mathcal{L}_X : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ , graduée de degré 0, c'est-à-dire  $\mathcal{L}_X(\Omega^p(M)) \subset \Omega^p(M)$ , telle que

- (1)  $\mathcal{L}_X$  coïncide sur  $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$  avec la dérivation  $\mathcal{L}_X$  ci-dessus ;
- (2)  $\mathcal{L}_X$  est une dérivation de l'algèbre  $\Omega(M)$ , c'est-à-dire pour tous les  $\alpha, \beta$  dans  $\Omega(M)$ , on a

$$\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X\beta) ;$$

- (3)  $\mathcal{L}_X$  et  $d$  commutent, c'est-à-dire

$$\mathcal{L}_X \circ d = d \circ \mathcal{L}_X.$$

De plus, l'opérateur  $\mathcal{L}_X$  vérifie les propriétés suivantes.

- (i) Il est local, c'est-à-dire pour tout ouvert  $U$  de  $M$ , on a

$$(\mathcal{L}_X\omega)|_U = \mathcal{L}_{X|_U}(\omega|_U).$$

- (ii) Pour tous les champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  de classe  $C^\infty$  sur  $M$ , on a

$$\mathcal{L}_{[X, Y]} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X.$$

- (iii) Pour tout champ de vecteurs  $X$  de classe  $C^\infty$  sur  $M$ , on a

$$\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X.$$

- (iv) Pour toute variété  $N$  de classe  $C^\infty$ , pour tout  $C^\infty$ -difféomorphisme local  $\varphi : M \rightarrow N$ , pour tout champ de vecteurs  $X$  de classe  $C^\infty$  sur  $N$ , et pour toute forme différentielle  $\omega$  de classe  $C^\infty$  sur  $N$ , on a

$$\varphi^*(\mathcal{L}_X\omega) = \mathcal{L}_{\varphi^*X}(\varphi^*\omega).$$

La dérivation  $\mathcal{L}_X$  est appelée la *dérivée de Lie* des formes différentielles par le champ de vecteurs  $X$ .

**Remarque.** Nous verrons dans la démonstration qu'il suffit dans (3) de demander la condition  $\mathcal{L}_X \circ d = d \circ \mathcal{L}_X$  sur les fonctions (c'est-à-dire les éléments de  $\Omega^0(M)$ ).

**Démonstration.** L'unicité de la dérivée de Lie se montre exactement comme l'unicité de la différentielle extérieure, en montrant comme précédemment que tout point de  $x$  admet un voisinage sur lequel  $\mathcal{L}_X\omega$  s'exprime sous la forme

$$\mathcal{L}_X\omega = \sum_I \mathcal{L}_X(f\omega_I)(d\mathcal{L}_X(f\varphi))_I$$

en utilisant la commutation de  $d$  et  $\mathcal{L}_X$  sur les fonctions.

Pour l'existence, posons

$$\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X.$$

Comme  $i_X f = 0$  si  $f \in \Omega^0(M)$ , l'application  $\mathcal{L}_X$  coïncide bien avec la dérivation usuelle associée à  $X$  sur les fonctions. Il est immédiat, par les propriétés de  $d$  et de  $i_X$ , que  $\mathcal{L}_X$  est une dérivation graduée de degré 0, c'est-à-dire est linéaire, graduée de degré 0, et vérifie (2). Comme  $d \circ d = 0$ , on a bien

$$d \circ \mathcal{L}_X = d \circ i_X \circ d = \mathcal{L}_X \circ d,$$

ce qui montre l'existence.

Vérifions les propriétés supplémentaires, (iii) découlant de la construction. La propriété (i) découle des propriétés de localité de  $d$  et de  $i_X$  (ou de la propriété (iv) en considérant les applications d'inclusions). L'application  $\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$  est clairement linéaire, graduée de degré 0, et une dérivation de l'algèbre  $\Omega(M)$ . De plus, par définition du crochet de champs de vecteurs, elle coïncide avec  $\mathcal{L}_{[X, Y]}$  sur les fonctions. Elle commute clairement avec  $d$ , donc la propriété (ii) en découle par unicité.

Enfin, pour vérifier la propriété (iv), par localité, on se ramène au cas où  $\varphi$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme. L'application  $\varphi^* \circ \mathcal{L}_X \circ (\varphi^{-1})^*$  de  $\Omega(M)$  dans lui-même commute avec  $d$ , car la dérivée de Lie et l'image réciproque le font. C'est une dérivation graduée de degré 0 de  $\Omega(M)$ , car  $\mathcal{L}_X$  l'est sur  $\Omega(N)$  et  $\varphi^*$  est linéaire, graduée de degré 0, et vérifie  $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = (\varphi^*\alpha) \wedge (\varphi^*\beta)$ . Sur une application  $f$  de classe  $C^\infty$ , pour tout  $x$  dans  $M$ , on a, par le théorème de dérivation des fonctions composées,

$$\begin{aligned} \varphi^* \circ \mathcal{L}_X \circ (\varphi^{-1})^* f(x) &= T_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1})(X(\varphi(x))) = T_x f((T_x \varphi)^{-1}(X(\varphi(x)))) \\ &= \mathcal{L}_{\varphi^* X} f(x). \end{aligned}$$

Donc la propriété (iv) en découle, par unicité.  $\square$

**Exercice E.32** Soient  $M$  et  $N$  deux variétés  $C^\infty$ , soit  $\varphi : M \rightarrow N$  un  $C^\infty$ -difféomorphisme local, soit  $X$  un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $N$ , et soit  $\omega$  une forme différentielle  $C^\infty$  sur  $N$ .

(1) Montrer que

$$\varphi^*(i_X\omega) = i_{\varphi^*X}(\varphi^*\omega).$$

(2) Donner une autre démonstration de l'assertion (iv) ci-dessus.

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , soit  $X$  un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $U$ , de flot local  $(\phi_t)$ , et soit  $\omega$  une forme différentielle  $C^\infty$  sur  $U$ . Pour tout  $x_0$  dans  $U$ , l'application  $(t, x) \mapsto (\phi_t^*\omega)_x$  définie sur un voisinage de  $(0, x_0)$  dans  $\mathbb{R} \times U$ , à valeurs dans l'espace vectoriel réel de dimension finie  $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)^*$ , est  $C^\infty$ , car, en supposant par linéarité que  $\omega \in \Omega^p(U)$ , pour tous  $\xi_1, \dots, \xi_p$  dans  $\mathbb{R}^n$ , on a

$$(\phi_t^*\omega)_x(\xi_1, \dots, \xi_p) = \omega_{\phi_t(x)}(T_x\phi_t(\xi_1), \dots, T_x\phi_t(\xi_p)).$$

**Proposition 4.10** Avec les notations ci-dessus, pour tout  $x$  dans  $U$ , on a,

$$(\mathcal{L}_X\omega)_x = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\phi_t^*\omega)_x.$$

**Démonstration.** L'application  $\omega \mapsto \{x \mapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\phi_t^*\omega)_x\}$  de  $\Omega(U)$  dans lui-même est clairement linéaire graduée de degré 0. Comme  $\varphi_t^*(\alpha \wedge \beta) = (\varphi_t^*\alpha) \wedge (\varphi_t^*\beta)$ , cette application est une dérivation de l'algèbre  $\Omega(U)$ . Comme image réciproque et différentielle extérieure commutent, et comme la différentielle extérieure est linéaire, cette application commute avec la différentielle extérieure. Par unicité, le résultat en découle.  $\square$

**Remarque.** Nous aurions pu utiliser cette proposition pour définir  $\mathcal{L}_X$  sur les ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , puis, par un passage du local au global comme dans la démonstration du théorème 4.5, définir  $\mathcal{L}_X$  sur toutes les variétés. Nous laissons au lecteur le soin de rédiger une telle démonstration.

• **Gradient, divergence, rotationnel.**

Soient  $n$  un élément de  $\mathbb{N}$ , et  $U$  un ouvert de  $E = \mathbb{R}^n$ .

Si  $f$  est une application  $C^\infty$  (mais  $C^1$  suffirait pour la définition), on note  $\text{grad } f$  ou  $\nabla f$ , et on appelle *gradient* de  $f$ , le champ de vecteurs  $C^\infty$

$$x \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

L'application  $\nabla : C^\infty(U, \mathbb{R}) = \Omega^0(U) \rightarrow C^\infty(U, \mathbb{R}^n) = \Gamma(TU)$  est linéaire et

$$\nabla(fg) = f\nabla(g) + g\nabla(f).$$

Si  $X \in \Gamma(TU)$  est un champ de vecteurs  $C^\infty$  (mais  $C^1$  suffirait pour la définition) sur  $U$ , on note  $\text{div } X$ , et on appelle *divergence* de  $X$ , l'application  $C^\infty$

$$x \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i}$$

si  $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ . L'application  $\text{div} : C^\infty(U, \mathbb{R}^n) = \Gamma(TU) \rightarrow C^\infty(U, \mathbb{R}^n) = \Gamma(TU)$  est linéaire.

Si  $n = 3$  et si  $X \in \Gamma(TU)$  est un champ de vecteurs  $C^\infty$  (mais  $C^1$  suffirait pour la définition) sur  $U$ , on note  $\text{rot } X$ , et on appelle *rotationnel* de  $X$ , le champ de vecteurs  $C^\infty$

$$x \mapsto \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial z}.$$

si  $X = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} + R \frac{\partial}{\partial z}$ . L'application  $\text{rot} : C^\infty(U, \mathbb{R}^n) = \Gamma(TU) \rightarrow C^\infty(U, \mathbb{R}^n) = \Gamma(TU)$  est linéaire.

Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire usuel sur  $E$ .

Si  $X \in \Gamma(TU)$  est un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $U$ , alors l'application de  $U$  dans le dual  $\hat{E}$  de  $E$ , définie par

$$x \mapsto (v \mapsto \langle X(x), v \rangle),$$

est une 1-forme différentielle  $C^\infty$ , notée  $X^\perp$ .

Si  $\omega$  est une 1-forme différentielle  $C^\infty$ , alors l'application de  $U$  dans  $E$  définie par  $x \mapsto X(x)$ , où  $X(x)$  est l'unique élément de  $E$  tel que  $\langle X(x), v \rangle = \omega_x(v)$  est un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $U$ , notée  $\omega^\perp$ .

Il est immédiat de voir que l'application  $X \mapsto X^\perp$  est un isomorphisme linéaire de  $\Gamma(TU)$  dans  $\Omega^1(U)$ , d'inverse  $\omega \mapsto \omega^\perp$ .

**Exercice E.33** Montrer les formules suivantes.

- (1)  $\nabla f = (df)^\perp$ ,
- (2)  $i_{\text{rot } X}(dx \wedge dy \wedge dz) = d(X^\perp)$ ,
- (3)  $\mathcal{L}_X(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = (\text{div } X) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ ,
- (4)  $\text{rot}(\text{grad } f) = 0$ ,
- (5)  $\text{div}(\text{rot } X) = 0$ ,
- (6)  $\text{div}(fX) = f \text{div } X + \langle \text{grad } f, X \rangle$ .

Comme  $(\mathcal{L}_X\omega)_x = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\phi_t^*\omega)_x$ , on déduit de (3) que le flot local du champ de vecteurs  $X$  préserve la forme volume  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  si et seulement si  $\text{div } X = 0$  (voir aussi le paragraphe 4.3).

Il découle de la question (3) de cet exercice, et de la proposition 4.10, que le flot local d'un champ de vecteurs  $X$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  préserve la mesure de Lebesgue sur  $U$  si et seulement si sa divergence est nulle, c'est-à-dire  $\text{div } X = 0$ .

## 4.2 Cohomologie de de Rham

Nous renvoyons à l'excellent [God] pour le contenu, avec de nombreux compléments, de cette partie, ainsi qu'à [deR] pour un livre source sur la cohomologie de de Rham, et à [BoT].

Toutes les formes différentielles de cette partie seront  $C^\infty$ . Sauf mention explicite du contraire, le symbole  $\simeq$  désignera un isomorphisme d'espaces vectoriels réels dans toute cette partie.

Pour résumer les paragraphes qui précèdent, nous avons montré, pour toute variété  $M$  de classe  $C^\infty$ , que

$$\Omega(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Omega^p(M), d$$

est une algèbre différentielle graduée, c'est-à-dire  $\Omega(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Omega^p(M)$  est un espace vectoriel gradué, qui, muni de l'application bilinéaire  $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ , est une algèbre (unitaire, associative) graduée (c'est-à-dire  $\Omega^p(M) \wedge \Omega^q(M) \subset \Omega^{p+q}(M)$ ) anticommulative (c'est-à-dire si  $\alpha \in \Omega^p(M)$  et  $\beta \in \Omega^q(M)$ , alors  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$ ), et  $d : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$  est une application linéaire, graduée de degré  $+1$  (c'est-à-dire  $d(\Omega^p(M)) \subset \Omega^{p+1}(M)$ ), qui est une antiderivation (c'est-à-dire si  $\alpha \in \Omega^p(M)$ , alors  $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta)$ ), vérifiant l'équation cruciale

$$d \circ d = 0.$$

• **Algèbre de cohomologie de de Rham.**

Soient  $n$  un élément de  $\mathbb{N}$  et  $M$  une variété  $C^\infty$  de dimension  $n$ .

Une forme différentielle  $\alpha$  sur  $M$  est dite *fermée* si  $d\alpha = 0$ , et *exacte* s'il existe une forme différentielle  $\beta$  sur  $M$  telle que  $d\beta = \alpha$ . Une forme différentielle exacte est fermée, car  $d \circ d = 0$ .

Notons  $Z^*(M) = \text{Ker } d$  et  $Z^p(M) = Z^*(M) \cap \Omega^p(M)$ . Alors  $Z^*(M)$  est une sous-algèbre (unitaire) de  $\Omega(M)$ , somme directe (en tant qu'espace vectoriel) des  $Z^p(M)$  pour  $p$  dans  $\mathbb{N}$ . En effet, la forme différentielle constante 1 est fermée, une forme différentielle est fermée si et seulement si ses composantes dans les  $\Omega^p(M)$  sont fermées, et si  $\alpha$  et  $\beta$  sont fermées, alors  $\alpha \wedge \beta$  aussi, car  $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta)$  si  $\alpha \in \Omega^p(M)$ .

Notons  $B^*(M) = \text{Im } d$  et  $B^p(M) = B^*(M) \cap \Omega^p(M)$ . Alors  $B^*(M)$  est un idéal bilatère de  $Z^*(M)$ , somme directe (en tant qu'espace vectoriel) des  $B^p(M)$  pour  $p$  dans  $\mathbb{N}$ . En effet, si  $\alpha$  est exacte et si  $\beta$  est fermée, alors  $\alpha \wedge \beta$  est exacte (et de même pour  $\beta \wedge \alpha$  par anticommutativité), car si  $\alpha = d\alpha' \in \Omega^{p+1}(M)$ , alors  $d(\alpha' \wedge \beta) = (d\alpha') \wedge \beta + (-1)^p \alpha' \wedge (d\beta) = \alpha \wedge \beta$ .

Donc

$$H_{\text{DR}}^*(M) = Z^*(M)/B^*(M)$$

est une algèbre (associative, unitaire) anticommulative, graduée par

$$H_{\text{DR}}^*(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} H_{\text{DR}}^p(M),$$

où

$$H_{\text{DR}}^p(M) = Z^p(M)/B^p(M).$$

L'algèbre  $H_{\text{DR}}^*(M)$  s'appelle *l'algèbre* (ou parfois l'espace) *de cohomologie de de Rham* de  $M$ , et l'espace vectoriel réel  $H_{\text{DR}}^p(M)$  le  $p$ -ème espace (ou parfois le  $p$ -ème groupe) *de cohomologie de de Rham* de  $M$ . Comme la cohomologie de de Rham sera la seule cohomologie que nous rencontrerons dans ces notes, nous noterons parfois  $H^*(M)$  l'algèbre et  $H^p(M)$  les espaces vectoriels ci-dessus.

Pour tout  $\alpha$  dans  $Z^*(M)$ , nous noterons  $[\alpha]$  sa classe dans  $H^*(M)$ . Nous dirons que deux formes différentielles fermées  $\alpha$  et  $\beta$  sont *cohomologues* si  $[\alpha] = [\beta]$ . Nous notons les lois de compositions de l'algèbre  $H^*(M)$  de la même manière que les lois de compositions de  $\Omega(M)$  :

$$a[\alpha] + b[\beta] = [a\alpha + b\beta], \quad [1] = 1 \quad \text{et} \quad [\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta].$$

Comme  $\Omega^p(M) = \{0\}$  si  $p > n$  ou  $p < 0$ , on a  $H_{\text{DR}}^p(M) = 0$  si  $p > n$  ou  $p < 0$ . Comme  $d : \Omega^{-1}(M) \rightarrow \Omega^0(M)$  est l'application nulle, on a  $H^0(M) = Z^0(M)$ .

**Exercice E.34** Si  $M$  est la variété somme disjointe  $M = \coprod_{i \in I} M_i$ , alors on a des isomorphismes naturels d'algèbres

$$H_{\text{DR}}^*(M) \simeq \prod_{i \in I} H_{\text{DR}}^*(M_i),$$

et  $H_{\text{DR}}^p(M) \simeq \prod_{i \in I} H_{\text{DR}}^p(M_i)$ .

Voici le premier calcul de la cohomologie de de Rham d'une variété, celle de l'espace réduite à un point. Il nous faudra attendre le paragraphe sur la suite exacte de Mayer-Vietoris avant d'obtenir d'autres calculs de la cohomologie de de Rham.

**Proposition 4.11** (1) Si  $\pi_0 M$  est l'ensemble des composantes connexes de  $M$ , alors

$$H_{\text{DR}}^0(M) \simeq \mathbb{R}^{\pi_0 M}$$

et en particulier  $H_{\text{DR}}^0(M) = \mathbb{R}$  si  $M$  est connexe.

(2) Si  $M$  est un singleton, alors  $H_{\text{DR}}^*(M) = H_{\text{DR}}^0(M) = \mathbb{R}$ .

**Démonstration.** Par l'exercice précédent, il suffit de montrer la première assertion lorsque  $M$  est connexe. Si  $f \in Z^0(M)$ , alors  $df = 0$ , donc  $f$  est constante sur  $M$ , ce qui montre le résultat. L'identification d'une fonction constante sur  $M$  avec sa valeur donne un isomorphisme canonique entre  $H_{\text{DR}}^0(M)$  et  $\mathbb{R}$ , et nous identifierons ces espaces vectoriels par cette application.

Si  $M$  est un singleton, alors  $\Omega^p(M) = \{0\}$  si  $p > 0$ . La seconde assertion en découle.  $\square$

Soient  $N$  une variété  $C^\infty$  et  $f : M \rightarrow N$  une application  $C^\infty$ . Comme  $f^* \circ d = d \circ f^*$ , on a

$$f^*(Z^*(N)) \subset Z^*(M) \quad \text{et} \quad f^*(B^*(N)) \subset B^*(M).$$

Donc le morphisme d'algèbres graduées unitaires  $f^* : \Omega(N) \rightarrow \Omega(M)$  induit un morphisme d'algèbres graduées unitaires, encore noté  $f^*$ , entre les algèbres de cohomologie de de Rham de  $N$  et de  $M$  :

$$\begin{array}{ccc} f^* : H_{\text{DR}}^*(N) & \longrightarrow & H_{\text{DR}}^*(M) \\ [\alpha] & \mapsto & [f^*\alpha] \end{array} .$$

On a donc

$$f^*(ax + by) = af^*(x) + bf^*(y), \quad f^*(1) = 1, \quad f^*(x \wedge y) = f^*(x) \wedge f^*(y),$$

$$f^*(H_{\text{DR}}^p(N)) \subset H_{\text{DR}}^p(M) .$$

Comme pour les images réciproques des formes différentielles, on a  $\text{id}^* = \text{id}$ , et si  $P$  est une variété  $C^\infty$  et  $g : N \rightarrow P$  est une application  $C^\infty$ , alors

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* .$$

Donc l'association  $H_{\text{DR}}^*$ , à une variété  $M$  de l'algèbre  $H_{\text{DR}}^*(M)$ , et à une application  $f : M \rightarrow N$  du morphisme  $f^* : H_{\text{DR}}^*(N) \rightarrow H_{\text{DR}}^*(M)$ , est un foncteur contra-variant de la catégorie des variétés  $C^\infty$  dans la catégorie des algèbres graduées (associatives unitaires) anticommutatives. En particulier, si  $f : M \rightarrow N$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme, alors  $f^* : H_{\text{DR}}^*(N) \rightarrow H_{\text{DR}}^*(M)$  est un isomorphisme d'algèbres graduées unitaires, et

$$(f^*)^{-1} = (f^{-1})^* .$$

**Porisme 4.12** *Si deux variétés  $C^\infty$  sont  $C^\infty$ -difféomorphes, alors leurs algèbres de cohomologie de de Rham sont isomorphes.*  $\square$

**Proposition 4.13** (1) *Si  $M$  et  $N$  sont connexes, alors  $f^* : H_{\text{DR}}^0(N) = \mathbb{R} \rightarrow H_{\text{DR}}^0(M) = \mathbb{R}$  (avec les identifications précédentes) est l'identité.*

(2) *Si  $f$  est une application constante, alors  $f^* : H_{\text{DR}}^p(N) \rightarrow H_{\text{DR}}^p(M)$  est l'application nulle pour  $p \neq 0$ .*

**Démonstration.** (1) Si  $M$  est connexe, alors  $H^0(M)$  est l'espace vectoriel des applications constantes sur  $M$  et  $f^*$  envoie l'application constante valant  $a$  sur  $N$  sur l'application constante valant encore  $a$  sur  $M$ .

(2) Si  $f : M \rightarrow N$  est l'application constante valant un élément donné  $a$  de  $N$ , alors  $f$  factorise par l'application constante  $g : M \rightarrow \{a\}$  et l'injection  $i : \{a\} \rightarrow N$ . Donc par la proposition 4.11 (2), si  $p > 0$ , alors l'application linéaire  $f^* = (i \circ g)^* = g^* \circ i^* : H^p(N) \rightarrow H^p(M)$  factorise par l'application nulle  $i^* : H^p(N) \rightarrow H^p(\{a\})$ , donc est nulle.  $\square$

**Exercice E.35** *Soient  $G$  un groupe fini discret, agissant librement par  $C^\infty$ -difféomorphismes sur  $M$ , et  $\pi : M \rightarrow N = G \backslash M$  le revêtement  $C^\infty$  associé. Montrer que l'application  $\pi^* : H_{\text{DR}}^*(N) \rightarrow H_{\text{DR}}^*(M)$  est injective.*

• **Invariance par homotopie.**

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés  $C^\infty$ , et soient  $f$  et  $g$  deux applications  $C^\infty$  de  $M$  dans  $N$ .

Nous renvoyons à l'appendice A.4 pour des rappels sur les homotopies (continues) d'applications continues entre espaces topologiques. Nous commençons ce paragraphe par étendre la notion d'application homotope au cadre différentiable.

Une *homotopie*  $C^\infty$  de  $f$  à  $g$  est une application  $h : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  de classe  $C^\infty$  telle que  $h(x, t) = f(x)$  pour  $t \leq 0$  et  $h(x, t) = g(x)$  pour  $t \geq 1$ .

Par exemple,  $(x, t) \mapsto f(x)$  est une homotopie  $C^\infty$  de  $f$  à  $f$ ; si  $h$  est une homotopie  $C^\infty$  de  $f$  à  $g$ , alors  $(x, t) \mapsto h(x, 1 - t)$  est une homotopie  $C^\infty$  de  $g$  à  $f$ ; si  $h$  est une homotopie  $C^\infty$  de  $f_1$  à  $f_2$ , et si  $h'$  est une homotopie  $C^\infty$  de  $f_2$  à  $f_3$ , alors

$$(x, t) \mapsto \begin{cases} h(x, 3t) & \text{si } t < \frac{2}{3} \\ h'(x, 3t - 2) & \text{si } t > \frac{1}{3} \end{cases}$$

est une homotopie  $C^\infty$  de  $f_1$  à  $f_3$ .

Les applications  $f$  et  $g$  sont dites *différentiablement homotopes* s'il existe une homotopie  $C^\infty$  de  $f$  à  $g$ . La relation « être différemment homotopes » est donc une relation d'équivalence.

**Théorème 4.14** *Si  $f$  et  $g$  sont deux applications  $C^\infty$  différemment homotopes, alors  $f^* = g^*$ .*

**Démonstration.** La démonstration de ce théorème repose sur la proposition suivante, où, pour tout  $t$  dans  $\mathbb{R}$ , on note  $J_t : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$  l'application  $C^\infty$  définie par  $x \mapsto (x, t)$ .

**Proposition 4.15** *Pour toute variété  $M$  de classe  $C^\infty$ , il existe une application  $K : \Omega(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega(M)$  linéaire, graduée de degré  $-1$ , c'est-à-dire  $K(\Omega^p(M \times \mathbb{R})) \subset \Omega^{p-1}(M)$ , telle que*

$$d \circ K + K \circ d = J_1^* - J_0^* ,$$

*et telle que, pour toute variété  $N$  de classe  $C^\infty$  et toute application  $\varphi$  de classe  $C^\infty$  de  $M$  dans  $N$ , le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \Omega(N \times \mathbb{R}) & \xrightarrow{K} & \Omega(N) \\ (\varphi \times \text{id})^* \downarrow & & \downarrow \varphi^* \\ \Omega(M \times \mathbb{R}) & \xrightarrow{K} & \Omega(M) \end{array} .$$

**Démonstration.** Supposons tout d'abord que  $M = U$  soit un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ . On note  $x_1, \dots, x_n$  les coordonnées dans  $U$  et  $t$  la coordonnée dans  $\mathbb{R}$ , de sorte que  $x_1, \dots, x_n, t$  soient les coordonnées dans  $U \times \mathbb{R}$ . Posons, pour  $p \geq 0$  dans le premier cas et  $p \geq 1$  dans le second,

$$\begin{aligned} K\alpha &= 0 & \text{si } \alpha &= a \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\ K\beta &= \left( \int_0^1 b \, dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}} & \text{si } \beta &= b \, dt \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}} . \end{aligned}$$

Alors  $K$  définit une application linéaire de  $\Omega^p(M \times \mathbb{R})$  dans  $\Omega^{p-1}(M)$ , que l'on étend par linéarité en une application linéaire, graduée de degré  $-1$ , de  $\Omega(M \times \mathbb{R})$  dans  $\Omega(M)$ . La commutativité du dernier diagramme si  $N$  est aussi un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  est immédiate.

La vérification de la propriété (dite d'homotopie) de  $K$  découle des calculs suivants :

$$\begin{aligned} dK\alpha &= 0 \\ Kd\alpha &= \left( \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t} dt \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} = (J_1^* - J_0^*)\alpha \\ dK\beta &= \sum_{i=1}^n \left( \int_0^1 \frac{\partial b}{\partial x_i} dt \right) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}} \\ Kd\beta &= - \sum_{i=1}^n \left( \int_0^1 \frac{\partial b}{\partial x_i} dt \right) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}} \\ J_1^*\beta &= J_0^*\beta = 0. \end{aligned}$$

Maintenant, pour montrer la proposition en général, on utilise des cartes locales et un argument de partition de l'unité.

Plus précisément, choisissons  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  un atlas de cartes  $C^\infty$  et  $(\psi_i)_{i \in I}$  une partition de l'unité  $C^\infty$  subordonnée au recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$  de  $M$ . Alors  $(U_i \times \mathbb{R}, \bar{\varphi}_i = \varphi_i \times \text{id})_{i \in I}$  est un atlas de cartes  $C^\infty$  sur  $M \times \mathbb{R}$ , et  $(\bar{\psi}_i = \psi_i \circ \text{pr}_1)_{i \in I}$ , où  $\text{pr}_1 : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  est la première projection, est une partition de l'unité  $C^\infty$  subordonnée au recouvrement  $(U_i \times \mathbb{R})_{i \in I}$  de  $M \times \mathbb{R}$ . Pour tout  $\alpha \in \Omega(M \times \mathbb{R})$ , posons, avec les abus de notations évidents concernant les restrictions,

$$\widehat{K}(\alpha) = \sum_{i \in I} \varphi_i^* (K((\bar{\varphi}_i^{-1})^*(\bar{\psi}_i \alpha))) .$$

Cette formule ne dépend pas du choix de  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ ,  $(\psi_i)_{i \in I}$ . En effet, soit  $(U'_i, \varphi'_i)_{i \in I}$ ,  $(\psi'_i)_{i \in I}$  un autre choix. Par la commutativité du diagramme de l'énoncé dans le cas des ouverts numériques, si le support d'une forme différentielle  $\beta$  est contenu dans  $(U_i \cap U'_j) \times \mathbb{R}$ , alors  $\varphi_i^* K((\bar{\varphi}_i^{-1})^*(\beta)) = \varphi'_j{}^* K((\bar{\varphi}'_j{}^{-1})^*(\beta))$ . Donc

$$\begin{aligned} \widehat{K}(\alpha) &= \sum_{i \in I} \varphi_i^* K((\bar{\varphi}_i^{-1})^*(\bar{\psi}_i \sum_{j \in J} \bar{\psi}'_j \alpha)) = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \varphi_i^* K((\bar{\varphi}_i^{-1})^*(\bar{\psi}_i \bar{\psi}'_j \alpha)) = \\ &= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \varphi'_j{}^* K((\bar{\varphi}'_j{}^{-1})^*(\bar{\psi}'_j \bar{\psi}_i \alpha)) = \sum_{j \in J} \varphi'_j{}^* K((\bar{\varphi}'_j{}^{-1})^*(\bar{\psi}'_j \alpha)) . \end{aligned}$$

Alors  $\widehat{K}$  est clairement une application linéaire, graduée de degré  $-1$ , de  $\Omega(M \times \mathbb{R})$  dans  $\Omega(M)$ , rendant le dernier diagramme de l'énoncé commutatif. De plus, si le support de  $\beta$  est contenu dans  $U_i \times \mathbb{R}$ , alors celui de  $d\beta$  aussi, et  $\widehat{K}(\alpha) = \varphi_i^* K((\bar{\varphi}_i^{-1})^*(\beta))$ , car comme  $\bar{\psi}_i \beta$  est alors à support dans  $(U_i \cap U_k) \times \mathbb{R}$ , on a

$$\widehat{K}(\alpha) = \sum_{k \in I} \varphi_k^* K((\bar{\varphi}_k^{-1})^*(\bar{\psi}_k \beta)) = \sum_{k \in I} \varphi_i^* K((\bar{\varphi}_i^{-1})^*(\bar{\psi}_k \beta)) = \varphi_i^* K((\bar{\varphi}_i^{-1})^*(\beta)) .$$

Donc, en utilisant les propriétés des images réciproques, et la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{J_\nu} & U_i \times \mathbb{R} \\ \varphi_i \downarrow & & \downarrow \bar{\varphi}_i \\ \varphi_i(U_i) & \xrightarrow{J_\nu} & \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R} \end{array}$$

pour  $\nu = 0, 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} (d\widehat{K} + \widehat{K}d)\alpha &= (d\widehat{K} + \widehat{K}d)(\sum_{i \in I} \bar{\psi}_i \alpha) \\ &= \sum_{i \in I} d\widehat{K}(\bar{\psi}_i \alpha) + \widehat{K}d(\bar{\psi}_i \alpha) \\ &= \sum_{i \in I} \varphi_i^* dK((\bar{\varphi}_i^{-1})^*(\bar{\psi}_i \alpha)) + \varphi_i^* Kd((\bar{\varphi}_i^{-1})^*(\bar{\psi}_i \alpha)) \\ &= \sum_{i \in I} \varphi_i^* (J_1^* - J_0^*)((\bar{\varphi}_i^{-1})^*(\bar{\psi}_i \alpha)) \\ &= \sum_{i \in I} (J_1^* - J_0^*)(\bar{\psi}_i \alpha) \\ &= J_1^* \alpha - J_0^* \alpha , \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat.  $\square$

Terminons maintenant la démonstration du théorème 4.14. Si  $h : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  est une homotopie  $C^\infty$  de  $f$  à  $g$ , alors  $h \circ J_0 = f$  et  $h \circ J_1 = g$ . Donc, par les propriétés des images réciproques, et par la propriété d'homotopie de  $K$ , on a, pour toute forme différentielle fermée  $\alpha$ ,

$$\begin{aligned} g^* \alpha - f^* \alpha &= J_1^* h^* \alpha - J_0^* h^* \alpha \\ &= dK(h^* \alpha) + Kd(h^* \alpha) \\ &= d(Kh^* \alpha) , \end{aligned}$$

donc  $g^* \alpha$  et  $f^* \alpha$  sont cohomologues, et  $f^* = g^*$ .  $\square$

Maintenant, nous allons utiliser un théorème d'approximation de fonctions continues par des applications  $C^\infty$  pour montrer l'invariance topologique et homotopique de l'algèbre de cohomologie de de Rham.

**Théorème 4.16** (1) *Toute application continue de  $M$  dans  $N$  est homotope à une application  $C^\infty$  de  $M$  dans  $N$ .*

(2) *Deux applications  $C^\infty$  de  $M$  dans  $N$ , qui sont homotopes, sont différentiablement homotopes.*

**Démonstration.** Voir par exemple [God].  $\square$

Soit  $f : M \rightarrow N$  une application continue. Choisissons une application  $\bar{f} : M \rightarrow N$  de classe  $C^\infty$ , homotope à  $f$  (voir le théorème 4.16 (1)). Remarquons que, par le théorème 4.16 (2), si  $\bar{f}' : M \rightarrow N$  est une autre application  $C^\infty$  homotope à  $f$ , alors  $\bar{f}$  et  $\bar{f}'$  sont différentiablement homotopes, donc, par le théorème 4.14, induisent la

même application en cohomologie de de Rham. Donc l'application  $\bar{f}^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$  ne dépend pas des choix, et sera notée

$$f^* : H_{\text{DR}}^*(N) \rightarrow H_{\text{DR}}^*(M),$$

ce qui est compatible avec la notation précédente lorsque  $f$  est  $C^\infty$ .

Notons que si  $f : M \rightarrow N$  est homotope à une application  $\bar{f} : M \rightarrow N$  de classe  $C^\infty$ , si  $g : N \rightarrow P$  est une application continue homotope à une application  $\bar{g} : N \rightarrow P$  de classe  $C^\infty$ , alors  $g \circ f$  est homotope à l'application  $\bar{g} \circ \bar{f} : M \rightarrow P$ , qui est de classe  $C^\infty$  (car si  $(x, t) \mapsto h_t(x)$  est une homotopie de  $f$  à  $\bar{f}$  et  $(x, t) \mapsto h'_t(x)$  une homotopie de  $g$  à  $\bar{g}$ , alors  $(x, t) \mapsto h'_t \circ h_t(x)$  est une homotopie de  $g \circ f$  à  $\bar{g} \circ \bar{f}$ ). Donc les applications de  $H^*(P)$  dans  $H^*(M)$  suivantes coïncident :

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

Rappelons (voir l'appendice A.4) que deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$  ont même type d'homotopie s'il existe une équivalence d'homotopie de  $X$  dans  $Y$ , c'est-à-dire une application continue  $f : X \rightarrow Y$  ayant la propriété qu'il existe une application continue  $g : Y \rightarrow X$  telle que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  soient homotopes à l'identité.

**Proposition 4.17** *Si  $f : M \rightarrow N$  est une équivalence d'homotopie, alors  $f^* : H_{\text{DR}}^*(N) \rightarrow H_{\text{DR}}^*(M)$  est un isomorphisme d'algèbres.*

**Démonstration.** Soit  $g : M \rightarrow N$  une application continue telle que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  soient homotopes à l'identité. Alors  $f^* \circ g^* = \text{id}$  et  $g^* \circ f^* = \text{id}$ . Le résultat s'en déduit.  $\square$

Cette proposition montre l'invariance homotopique (et donc topologique) de l'algèbre de cohomologie de de Rham : si deux variétés  $C^\infty$  ont le même type d'homotopie, alors leurs algèbres de cohomologie de de Rham sont isomorphes.

**Porisme 4.18** (1) *Si  $f : M \rightarrow N$  est un homéomorphisme, alors  $f^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$  est un isomorphisme d'algèbres.*

(2) *Si une variété  $M$  de classe  $C^\infty$  se rétracte par déformation forte sur une sous-variété  $N$  de classe  $C^\infty$ , alors l'inclusion  $i : N \rightarrow M$  induit un isomorphisme d'algèbres*

$$i^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M).$$

(3) *L'algèbre de cohomologie de de Rham d'une variété  $M$  de classe  $C^\infty$ , qui est contractile, est isomorphe à l'algèbre  $\mathbb{R}$  :*

$$H^*(M) = H^0(M) = \mathbb{R}.$$

**Démonstration.** Un homéomorphisme est une équivalence d'homotopie. Comme rappelé dans l'appendice A.4, un espace topologique  $X$ , qui se rétracte par déformation forte sur un sous-espace  $Y$ , a le même type d'homotopie que  $Y$ , et un espace

contractile a le même type d'homotopie que l'espace réduit à un point. Le corollaire découle alors des propositions 4.17 et 4.11 (2).  $\square$

**Exemples.** (1) Un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  est dit *étoilé* s'il existe un point  $x$  dans  $U$  tel que pour tout  $y$  dans  $U$ , le segment  $[x, y]$  entre  $x$  et  $y$  soit contenu dans  $U$ . Il est immédiat qu'un ouvert étoilé est contractile, et qu'un ouvert convexe non vide est étoilé. Le *lemme de Poincaré* dit que l'algèbre de cohomologie de de Rham d'un ouvert étoilé de  $\mathbb{R}^n$  est isomorphe à l'algèbre  $\mathbb{R}$ . C'est bien un cas particulier du corollaire précédent, qui a joué un rôle historique important. Nous laissons au lecteur l'exercice de montrer ce résultat sans utiliser le théorème d'approximation 4.16.

(2) Une couronne (ou *anneau*)  $C = \{z \in \mathbb{C} : a < |z| < b\}$ , où  $a < b$ , est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  qui se rétracte (radialement) par déformation forte sur le cercle  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = (a+b)/2\}$ , donc qui a le même type d'homotopie que le cercle (dont nous calculerons ci-dessous l'algèbre de cohomologie de de Rham).

(3) L'ouvert  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  se rétracte par déformation forte sur la sphère  $\mathbb{S}_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$  (radialement, c'est-à-dire par l'homotopie  $h(x, t) = t \frac{x}{\|x\|} + (1-t)x$ ). Donc  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  a le même type d'homotopie que la sphère  $\mathbb{S}_{n-1}$  (dont nous calculerons ci-dessous l'algèbre de cohomologie de de Rham).

(4) Si  $M$  et  $N$  sont des variétés  $C^\infty$ , avec  $N$  contractile (par exemple  $N = \mathbb{R}$ ), alors  $M \times N$  se rétracte par déformation forte sur  $M \times \{x\}$  pour tout  $x$  dans  $N$ , donc  $M \times N$  et  $M$  ont le même type d'homotopie, donc leurs algèbres de cohomologie de de Rham sont isomorphes.

(5) Si  $p : E \rightarrow M$  est un fibré vectoriel  $C^\infty$  (par exemple le fibré tangent d'une variété  $C^\infty$ ), alors  $p$  est une équivalence d'homotopie, car si  $\sigma : M \rightarrow E$  est la section nulle de  $p$  (qui est un  $C^\infty$ -difféomorphisme sur son image), alors  $E$  se rétracte par déformation forte sur  $\sigma(M)$  radialement dans chaque fibre, c'est-à-dire par l'homotopie  $h : E \times [0, 1] \rightarrow E$  définie par  $(x, t) \mapsto t \sigma \circ p(x) + (1-t)x$  (en remarquant que  $\sigma \circ p(x)$  est le vecteur nul de la fibre de  $p$  passant par  $x$ ). On peut prendre une homotopie  $C^\infty$  en considérant  $h : E \times \mathbb{R} \rightarrow E$  définie par  $(x, t) \mapsto \varphi(t) \sigma \circ p(x) + (1 - \varphi(t))x$  où  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une application  $C^\infty$  valant 0 sur  $]-\infty, 0]$  et 1 sur  $[1, +\infty[$ .

Notons une conséquence négative de l'invariance homotopique de la cohomologie de de Rham : l'algèbre de cohomologie de de Rham ne permet pas de distinguer deux structures  $C^\infty$  différentes sur une même variété topologique. Des invariants plus fins sont nécessaires (comme les invariants de Donaldson en dimension 4, voir par exemple [FM, Mor], mais le problème reste encore ouvert en cette dimension).

#### • Suite exacte de Mayer-Vietoris.

Dans une variété  $M$  de classe  $C^\infty$ , soient  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $M$  recouvrant  $M$ , et

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{i} & U \\ \downarrow j & & \downarrow i \\ V & \xrightarrow{j} & M \end{array}$$

le diagramme commutatif des inclusions. On note  $(i^*, j^*) : \Omega(M) \rightarrow \Omega(U) \times \Omega(V)$  l'application

$$\omega \mapsto (i^*\omega = \omega|_U, j^*\omega = \omega|_V),$$

ainsi que l'application  $H^*(M) \rightarrow H^*(U) \times H^*(V)$  induite en cohomologie. On note  $\underline{i}^* - \underline{j}^* : \Omega(U) \times \Omega(V) \rightarrow \Omega(U \cap V)$  l'application  $(\omega, \omega') \mapsto \underline{i}^*\omega - \underline{j}^*\omega' = \omega|_{U \cap V} - \omega'|_{U \cap V}$ , ainsi que l'application  $H^*(U) \times H^*(V) \rightarrow H^*(U \cap V)$  induite en cohomologie. (On prendra garde à ne pas oublier le signe  $-$  dans les calculs.) Si  $M'$  est une autre variété  $C^\infty$  munie d'un recouvrement ouvert  $\{U', V'\}$ , on notera  $\underline{i}', \underline{j}', i', j'$  les inclusions correspondant à  $\underline{i}, \underline{j}, i, j$  ci-dessus.

**Théorème 4.19** *Pour toute variété  $M$  de classe  $C^\infty$ , munie d'un recouvrement ouvert  $\{U, V\}$ , il existe une suite exacte longue d'espaces vectoriels réels, dite suite exacte de Mayer-Vietoris de  $M$ ,*

$$\dots \rightarrow H_{\text{DR}}^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H_{\text{DR}}^k(M) \xrightarrow{(i^*, j^*)} H_{\text{DR}}^k(U) \times H_{\text{DR}}^k(V) \xrightarrow{\underline{i}^* - \underline{j}^*} H_{\text{DR}}^k(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H_{\text{DR}}^{k+1}(M) \rightarrow \dots$$

telle que, pour toute variété  $M'$  de classe  $C^\infty$ , munie d'un recouvrement ouvert  $\{U', V'\}$ , pour toute application continue  $f : M \rightarrow M'$  telle que  $f(U) \subset U', f(V) \subset V'$ , le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & H^{k-1}(U' \cap V') & \xrightarrow{\delta} & H^k(M') & \xrightarrow{(i'^*, j'^*)} & H^k(U') \times H^k(V') & \xrightarrow{\underline{i}'^* - \underline{j}'^*} & H^k(U' \cap V') & \dots \\ & \downarrow (f|_{U \cap V})^* & & \downarrow f^* & & \downarrow (f|_U)^* \times (f|_V)^* & & \downarrow (f|_{U \cap V})^* & \\ \dots & H^{k-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\delta} & H^k(M) & \xrightarrow{(i^*, j^*)} & H^k(U) \times H^k(V) & \xrightarrow{\underline{i}^* - \underline{j}^*} & H^k(U \cap V) & \dots \end{array}$$

**Démonstration.** La démonstration repose sur la proposition suivante. Nous renvoyons à l'appendice A.6 pour la définition d'une suite exacte courte de complexes de cochaînes, et d'un morphisme de suites exactes courtes de complexes de cochaînes.

**Proposition 4.20** *La suite*

$$0 \longrightarrow \Omega(M) \xrightarrow{(i^*, j^*)} \Omega(U) \times \Omega(V) \xrightarrow{\underline{i}^* - \underline{j}^*} \Omega(U \cap V) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de complexes de cochaînes, et si  $f : M \rightarrow M'$  est une application  $C^\infty$ , alors le triplet

$$(f^*, (f|_U)^* \times (f|_V)^*, (f|_{U \cap V})^*)$$

est un morphisme de suites exactes courtes de complexes de cochaînes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega(M') & \xrightarrow{(i'^*, j'^*)} & \Omega(U') \times \Omega(V') & \xrightarrow{\underline{i}'^* - \underline{j}'^*} & \Omega(U' \cap V') & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f^* & & \downarrow (f|_U)^* \times (f|_V)^* & & \downarrow (f|_{U \cap V})^* & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega(M) & \xrightarrow{(i^*, j^*)} & \Omega(U) \times \Omega(V) & \xrightarrow{\underline{i}^* - \underline{j}^*} & \Omega(U \cap V) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

**Démonstration.** L'application linéaire  $(i^*, j^*)$  est injective, car une forme différentielle sur  $M$  est déterminée par ses restrictions aux ouverts  $U$  et  $V$  qui recouvrent  $M$ .

L'égalité entre  $\text{Im}((i^*, j^*))$  et  $\text{Ker}(\underline{i}^* - \underline{j}^*)$  découle de la propriété de localité des formes différentielles : les restrictions à  $U \cap V$  des restrictions à  $U$  et à  $V$  d'une forme différentielle sur  $M$  coïncident, et si les restrictions à  $U \cap V$  de deux formes différentielles  $\alpha$  sur  $U$  et  $\beta$  sur  $V$ , toutes deux de classe  $C^\infty$ , coïncident, alors il existe une forme différentielle  $C^\infty$  sur  $M$  dont les restrictions à  $U$  et à  $V$  sont  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement.

Pour la surjectivité de  $\underline{i}^* - \underline{j}^*$ , fixons une partition de l'unité  $\{\varphi, \psi\}$  de classe  $C^\infty$  subordonnée au recouvrement  $\{U, V\}$  (voir la proposition 1.9). Donc les applications  $\varphi, \psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  sont  $C^\infty$ , positives ou nulles, de support contenu dans  $U, V$  respectivement et  $\varphi + \psi$  est l'application constante 1. Soit  $\omega \in \Omega(U \cap V)$ . Notons  $\alpha$  la forme différentielle sur  $U$ , nulle en dehors de  $U \cap V$ , et qui coïncide avec  $\psi\omega$  sur  $U \cap V$ , qui est bien  $C^\infty$  sur  $U$ . De même, notons  $\beta$  la forme différentielle sur  $V$ , nulle en dehors de  $U \cap V$ , et qui coïncide avec  $-\varphi\omega$  sur  $U \cap V$ , qui est bien  $C^\infty$  sur  $V$ . Alors, sur  $U \cap V$ ,

$$\underline{i}^*\alpha - \underline{j}^*\beta = \varphi\omega + \psi\omega = \omega.$$

Donc  $\underline{i}^* - \underline{j}^*$  est surjective.

Les commutations des diagrammes sont évidentes.  $\square$

**Démonstration.** La proposition A.21 des rappels d'algèbre homologique de l'appendice A.6 associe, de manière fonctorielle, une suite exacte longue en cohomologie à toute suite exacte courte de complexes de cochaînes. On l'applique à la proposition précédente. Le résultat en découle.  $\square$

**Remarque.** (1) Dans certaines applications, on n'a pas besoin de connaître explicitement les morphismes dans les suites exactes de Mayer-Vietoris, leur existence suffisant. On omettra donc de les désigner nommément, pour simplifier les notations. Mais par défaut, les morphismes seront ceux indiqués ci-dessus.

(2) Si  $U$  et  $V$  sont des ouverts connexes d'une variété  $M$  de classe  $C^\infty$ , tels que  $U \cap V$  soit connexe, alors l'application  $\underline{i}^* - \underline{j}^* : H_0(U) \times H_0(V) \rightarrow H_0(U \cap V)$  est surjective. En effet, après identification des espaces avec  $\mathbb{R}$  par les applications qui à une fonction constante associe sa valeur, cette application s'écrit  $(x, y) \mapsto x - y$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Une présentation pratique des calculs est la suivante :

	$M$	$U$	$V$	$U \cap V$
0	$H^0(M)$	$\rightarrow H^0(U)$	$\times H^0(V)$	$\rightarrow H^0(U \cap V)$
1	$\rightarrow H^1(M)$	$\rightarrow H^1(U)$	$\times H^1(V)$	$\rightarrow H^1(U \cap V)$
2	$\rightarrow H^2(M)$	$\rightarrow H^2(U)$	$\times H^2(V)$	$\rightarrow H^2(U \cap V)$
3	$\rightarrow$			

**Porisme 4.21** Soit  $M$  une variété  $C^\infty$ , munie d'un recouvrement ouvert  $\{U, V\}$ . Si les espaces vectoriels  $H^*(U)$ ,  $H^*(V)$  et  $H^*(U \cap V)$  sont de dimension finie, alors  $H^*(M)$  est de dimension finie.

**Démonstration.** Par exactitude de la suite de Mayer-Vietoris

$$H^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{f_-} H^k(M) \xrightarrow{f_+} H^k(U) \times H^k(V),$$

on a

$$\dim H^k(M) = \dim \text{Im } f_+ + \dim \text{Ker } f_+ = \dim \text{Im } f_+ + \dim \text{Im } f_-.$$

Le résultat en découle.  $\square$

Soit  $M$  une variété  $C^\infty$  telle que  $H^*(M)$  soit de dimension finie. Alors on appelle *caractéristique d'Euler* le nombre entier (dans  $\mathbb{Z}$ )

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim H^k(M).$$

Notons que par invariance homotopique de la cohomologie de de Rham, la caractéristique d'Euler est aussi un invariant homotopique (donc topologique, donc différentiel), c'est-à-dire si  $M$  et  $N$  sont deux variétés  $C^\infty$  qui ont le même type d'homotopie, alors  $\chi(M) = \chi(N)$ .

**Porisme 4.22** Soit  $M$  une variété  $C^\infty$ , munie d'un recouvrement ouvert  $\{U, V\}$ . Si les espaces vectoriels  $H^*(U)$ ,  $H^*(V)$  et  $H^*(U \cap V)$  sont de dimension finie, alors

$$\chi(M) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V).$$

**Démonstration.** Cette formule découle du lemme d'algèbre linéaire suivant, appliquée à la suite exacte de Mayer-Vietoris (qui n'a qu'un nombre fini de termes non nuls).

**Lemme 4.23** Si  $0 \rightarrow E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow \dots \rightarrow E^n \rightarrow 0$  est une suite exacte d'espaces vectoriels de dimension finie, alors

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \dim E^k = 0.$$

**Démonstration.** Si  $f^i$  est l'application  $E^i \rightarrow E^{i+1}$  (avec  $E^{-1} = 0$  et  $E^{n+1} = 0$ ), alors  $\dim E^i = \dim \text{Im } f^i + \dim \text{Im } f^{i-1}$ . Le résultat s'en déduit par sommation alternée.  $\square \square$

### • Calcul de la cohomologie des sphères.

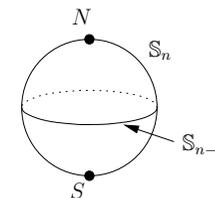
**Proposition 4.24** Pour tous  $p, n$  dans  $\mathbb{N}$ ,

$$H_{\text{DR}}^p(\mathbb{S}_n) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \text{si } 0 = p = n \\ \mathbb{R} & \text{si } 0 = p < n \\ 0 & \text{si } 0 < p < n \\ \mathbb{R} & \text{si } 0 < p = n \\ 0 & \text{si } p > n. \end{cases}$$

**Démonstration.** Si  $n = 0$ , alors  $\mathbb{S}_n = \{-1, +1\}$ , et le résultat est déjà connu (voir l'exercice corrigé E.34 et la proposition 4.11). On suppose donc  $n \geq 1$ .

On montre le résultat par récurrence sur  $p$ . Si  $p = 0$ , alors le résultat est déjà connu, car  $\mathbb{S}_n$  est connexe (proposition 4.11). On suppose donc  $p \geq 1$ .

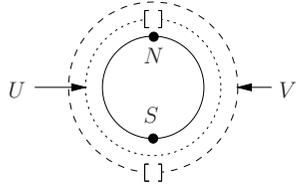
Soit  $N$  le pôle nord de  $\mathbb{S}_n$ ,  $S$  le pôle sud de  $\mathbb{S}_n$ ,  $U = \mathbb{S}_n - \{N\}$ ,  $V = \mathbb{S}_n - \{S\}$ . Alors  $U, V$  sont des ouverts contractiles, donc ont la même cohomologie de de Rham que le point. L'inclusion  $\mathbb{S}_{n-1} \hookrightarrow U \cap V$  est une équivalence d'homotopie (car  $U \cap V$  se rétracte par déformation forte sur l'équateur  $\mathbb{S}_{n-1}$  le long des grands cercles passant par les pôles). Elle induit donc un isomorphisme en cohomologie de de Rham.



Pour  $p = 1$ , la suite exacte de Mayer-Vietoris appliquée à la variété  $\mathbb{S}_n$  munie du recouvrement ouvert  $\{U, V\}$  donne une suite exacte

$$H^0(U) \times H^0(V) \xrightarrow{\phi} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\psi} H^1(M) \rightarrow H^1(U) \times H^1(V).$$

L'espace vectoriel réel  $H^1(U) \times H^1(V)$  est nul, donc  $\psi$  est surjective. L'espace vectoriel réel  $H^0(U) \times H^0(V)$  est isomorphe à  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Si  $n > 1$ , alors l'application  $\phi$  est surjective (voir la remarque (2) suivant la proposition 4.20). Donc par exactitude,  $\psi$  est l'application nulle et  $H^1(\mathbb{S}_n) = 0$ . Comme  $\dim H^0(M) = \dim H^0(U) = \dim H^0(V) = \dim H^0(U \cap V) = 1$ , on peut aussi conclure par sommation alternée des dimensions (voir le lemme 4.23).



Si  $n = 1$ , alors  $H^0(U \cap V) \simeq H^0(\mathbb{S}_0) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . L'application  $\phi$  s'écrit  $(x, y) \mapsto (x - y, x - y)$ , car l'application constante 1 sur  $U$ , qui engendre  $H^0(U)$ , s'envoie, par restriction, sur l'application constante 1 sur chacune des deux composantes connexes de  $U \cap V$  (et de même pour  $V$ ). En particulier, l'image de  $\phi$  est isomorphe à  $\mathbb{R}$ , donc par exactitude, le noyau de  $\psi$  est  $\mathbb{R}$ , et  $H^1(\mathbb{S}_1) = \mathbb{R}$ . Comme  $\dim H^0(M) = \dim H^0(U) = \dim H^0(V) = 1$  et  $\dim H^0(U \cap V) = 2$ , on peut aussi conclure par sommation alternée des dimensions (voir le lemme 4.23).

Pour  $p > 1$ , la suite exacte de Mayer-Vietoris appliquée à la variété  $\mathbb{S}_n$  munie du recouvrement ouvert  $\{U, V\}$  donne une suite exacte

$$H^{p-1}(U) \times H^{p-1}(V) \longrightarrow H^{p-1}(U \cap V) \longrightarrow H^p(\mathbb{S}_n) \longrightarrow H^p(U) \times H^p(V).$$

Les espaces vectoriels réels aux extrémités étant nuls, on a un isomorphisme

$$H^p(\mathbb{S}_n) \simeq H^{p-1}(U \cap V) \simeq H^{p-1}(\mathbb{S}_{n-1}).$$

On conclut par récurrence.  $\square$

**Porisme 4.25** Pour tout  $n \geq 1$ , l'algèbre graduée  $H_{\text{DR}}^*(\mathbb{S}_n)$  est isomorphe à l'algèbre (associative, unitaire, commutative) graduée (en degré 0 et  $n$ )  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  munie du produit  $(x, y) \wedge (x', y') = (xx', xy' + yx')$ .

**Démonstration.** On a  $H^*(\mathbb{S}_n) = H^0(\mathbb{S}_n) \oplus H^n(\mathbb{S}_n) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ , et le résultat découle des propriétés d'algèbre graduée de  $H^*(\mathbb{S}_n)$ .  $\square$

**Remarque.** Pour  $n, m \geq 1$ , les algèbres (unitaires)  $H^*(\mathbb{S}_n)$  et  $H^*(\mathbb{S}_m)$  sont isomorphes, mais les algèbres graduées  $H^*(\mathbb{S}_n)$  et  $H^*(\mathbb{S}_m)$  ne le sont pas!

Voici une application du calcul des groupes de cohomologie de de Rham des sphères et des boules, et de la propriété de fonctorialité de la cohomologie de de Rham. Le résultat suivant est une version faible du théorème d'invariance du domaine de Brouwer 1.1. Nous renvoyons à [Spa, Hat] pour d'autres applications.

**Porisme 4.26 (Théorème d'invariance du domaine de Brouwer I)** Si  $n \neq m$ , alors  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$  ne sont pas homéomorphes.

**Démonstration.** Si  $n \neq m$ , alors les espaces vectoriels  $H^n(\mathbb{S}_n)$  et  $H^m(\mathbb{S}_m)$  ne sont pas isomorphes. Par l'invariance topologique de la cohomologie de de Rham, les espaces topologiques  $\mathbb{S}_n$  et  $\mathbb{S}_m$  ne sont donc pas homéomorphes. Pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$ , le compactifié d'Alexandrov de  $\mathbb{R}^k$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}_k$  (voir l'exercice E.48 de l'appendice A.1). Si deux espaces topologiques localement compacts sont homéomorphes, alors leurs compactifiés d'Alexandrov le sont (voir l'exercice E.48 de l'appendice A.1). Donc  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$  ne sont pas homéomorphes.  $\square$

Pour  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , on note  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne standard sur  $\mathbb{R}^n$  (on rappelle que  $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ ). Soit  $\mathbb{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$  la boule unité (fermée) de  $\mathbb{R}^n$ .

**Porisme 4.27 (Théorème du point fixe de Brouwer)** Toute application continue de  $\mathbb{B}_n$  dans  $\mathbb{B}_n$  admet un point fixe.

**Démonstration.** Si  $A$  est une partie d'un espace topologique  $X$  et  $i : A \rightarrow X$  est l'inclusion, une rétraction de  $X$  dans  $A$  est une application continue  $r : X \rightarrow A$  telle que  $r \circ i = id_A$ .

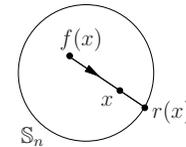
**Lemme 4.28** Il n'existe pas de rétraction  $r : \mathbb{B}_{n+1} \rightarrow \mathbb{S}_n$ .

**Démonstration.** On étend  $r$  radialement à l'extérieur de  $\mathbb{B}_{n+1}$  en une rétraction  $r : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}_n$ , et on note  $i : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'inclusion. Si le résultat n'est pas vrai, par fonctorialité, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & H^n(\mathbb{R}^{n+1}) & \\ r^* \nearrow & \longrightarrow & \searrow i^* \\ H^n(\mathbb{S}_n) & \xrightarrow{id_{H^n(\mathbb{S}_n)}} & H^n(\mathbb{S}_n) \end{array}$$

Si  $n > 0$ , alors  $H^n(\mathbb{R}^{n+1}) = 0$  et  $H^n(\mathbb{S}_n) \neq 0$ , donc  $r^*$  n'est pas injective, ce qui contredit l'injectivité de  $id_{H^n(\mathbb{S}_n)}$ . Si  $n = 0$ , alors  $H^0(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R}$  et  $H^0(\mathbb{S}_n) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  donc l'application linéaire  $i^*$  n'est pas surjective, ce qui contredit la surjectivité de  $id_{H^0(\mathbb{S}_n)}$ . (si  $n = 0$ , on peut aussi dire que  $\mathbb{S}_1$  est connexe, alors que  $\mathbb{S}_0$  ne l'est pas, donc  $\mathbb{S}_0$  n'est pas l'image d'une application continue de  $\mathbb{S}_1$  dans  $\mathbb{S}_0$ .  $\square$ )

La démonstration du théorème du point fixe de Brouwer découle de ce lemme de la manière suivante.



Le théorème est vrai pour  $n = 0$ . Supposons qu'il existe une application continue  $f : \mathbb{B}_{n+1} \rightarrow \mathbb{B}_{n+1}$  sans point fixe. Alors l'application  $r : \mathbb{B}_{n+1} \rightarrow \mathbb{S}_n$  définie par  $\{r(x)\} = \mathbb{S}_n \cap \{f(x) + t(x - f(x)) : t \geq 1\}$  est une rétraction, ce qui contredit le lemme.  $\square$

• Autres calculs de cohomologie de de Rham.

**Les tores.** Nous allons calculer l'algèbre graduée de cohomologie de de Rham des tores par transformation de Fourier. Notons  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  le tore de dimension  $n$ , et  $\mathbb{R}^n$  l'espace vectoriel dual de  $\mathbb{R}^n$ . Remarquons que l'espace vectoriel  $C^\infty(\mathbb{T}^n, \Lambda^* \mathbb{R}^n)$ , muni du produit extérieur point par point, est une algèbre graduée (associative unitaire) anticommutative différentielle (en un sens évident que nous ne précisons pas ici), qui s'identifie au sous-espace de  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \Lambda^* \mathbb{R}^n) = \Omega(\mathbb{R}^n)$

constitué des applications périodiques (par  $\mathbb{Z}^n$ ). Si  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  est l'application canonique de revêtement, alors le morphisme d'algèbres graduées différentielles  $p^* : \Omega(\mathbb{T}^n) \rightarrow \Omega(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n, \Lambda^* \tilde{\mathbb{R}}^n)$  est injectif, et a pour image la sous-algèbre des formes différentielles périodiques. Donc les algèbres graduées différentielles  $C^\infty(\mathbb{T}^n, \Lambda^* \tilde{\mathbb{R}}^n)$  et  $\Omega(\mathbb{T}^n)$  sont isomorphes, et donc calculent la même algèbre de cohomologie. (Notons qu'une situation analogue se passe pour toutes les variétés parallélisables.)

Notons  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^n$ , qui permet en particulier d'identifier  $\mathbb{R}^n$  avec son dual  $\tilde{\mathbb{R}}^n$ , par l'application  $k \mapsto \{ \check{k} : v \mapsto \langle k, v \rangle \}$ . Rappelons que, pour tout  $\omega$  dans  $C^\infty(\mathbb{T}^n, \Lambda^* \tilde{\mathbb{R}}^n)$ , pour tout  $k$  dans  $\mathbb{Z}^n$ , le  $k$ -ème coefficient de la série de Fourier de  $\omega$  est

$$w_k = \int_{x \in [0,1]^n} e^{-2\pi i \langle k, x \rangle} \omega(x) dx ,$$

qui est un élément de l'algèbre  $\Lambda^*(\tilde{\mathbb{R}}^n, \mathbb{C})$  des formes alternées sur  $\mathbb{R}^n$  à valeurs complexes, avec bien sûr  $w_k \in \Lambda^p(\tilde{\mathbb{R}}^n, \mathbb{C})$  si  $\omega \in \Omega^p(\mathbb{T}^n)$ . La transformation de Fourier inverse exprime  $\omega$  en fonction de sa série de Fourier (à décroissance rapide) par

$$\omega_x = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i \langle k, x \rangle} w_k .$$

L'application tangente en  $x$  de  $\omega$  est donc

$$T_x \omega : X \mapsto 2\pi i \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \check{k}(X) e^{2\pi i \langle k, x \rangle} w_k .$$

Le calcul de la différentielle extérieure de  $\omega$ , par sa définition même, se fait alors « fréquence par fréquence », en utilisant la définition de la différentielle extérieure comme l'application tangente rendue alternée (voir la démonstration du théorème 4.5) et la définition du produit extérieur des formes alternées (voir l'appendice A.5) :

$$(d\omega)_x = 2\pi i \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i \langle k, x \rangle} \check{k} \wedge w_k .$$

Considérons l'algèbre graduée

$$\bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \left( \prod_{k \in \mathbb{Z}^n} \Lambda^p(\tilde{\mathbb{R}}^n, \mathbb{C}) \right) ,$$

le produit s'effectuant composante par composante. En notant  $\Omega(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$  l'algèbre des formes différentielles à valeurs complexes sur  $\mathbb{T}^n$ , l'application qui à une forme différentielle associe sa série de Fourier est donc un isomorphisme d'algèbres graduées sur son image

$$\Theta : \Omega(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}) \rightarrow \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \prod_{k \in \mathbb{Z}^n} \Lambda^p(\tilde{\mathbb{R}}^n, \mathbb{C}) ,$$

qui envoie la différentielle  $d$  sur l'opérateur linéaire (préservant l'image de  $\Theta$ ) défini par

$$\delta : (w_k)_{k \in \mathbb{Z}^n} \mapsto (2\pi i \check{k} \wedge w_k)_{k \in \mathbb{Z}^n} .$$

**Lemme 4.29** Pour tout  $\omega$  dans  $\Lambda^p(\tilde{\mathbb{R}}^n, \mathbb{C})$ , et tout élément non nul  $k$  de  $\mathbb{R}^n$ , on a  $\check{k} \wedge \omega = 0$  si et seulement si  $\omega = \check{k} \wedge \omega'$  avec  $\omega'$  dans  $\Lambda^{p-1}(\tilde{\mathbb{R}}^n, \mathbb{C})$ .

**Démonstration.** Rappelons que l'espace  $\Lambda^{p-1}(\tilde{\mathbb{R}}^n, \mathbb{C})$  est nul par convention si  $p = 0$ . En utilisant le produit intérieur par  $k$  (voir la proposition A.20 de l'appendice A.5), si  $\check{k} \wedge \omega = 0$ , alors

$$0 = i_k(\check{k} \wedge \omega) = i_k(\check{k}) \wedge \omega - \check{k} \wedge i_k(\omega) .$$

Comme  $i_k(\check{k})$  est la 0-forme différentielle constante de valeur  $\|k\|^2 \neq 0$ , le lemme en découle.  $\square$

En particulier, si  $\delta(w_k)_{k \in \mathbb{Z}^n} = 0$ , alors il existe  $(w'_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$  tel que  $(w_k)_{k \in \mathbb{Z}^n} = \delta(w'_k)_{k \in \mathbb{Z}^n} + w_0$ , en identifiant  $w_0$  avec la suite indexée par  $k \in \mathbb{Z}^n$ , dont tous les éléments sont nuls, sauf celui pour  $k = 0$  qui vaut  $w_0$ . Par conséquent, l'application  $(w_k)_{k \in \mathbb{Z}^n} \mapsto w_0$  induit un isomorphisme d'algèbres graduées de l'algèbre graduée quotient  $(\text{Ker } \delta_{|\text{Im } \Theta}) / (\text{Im } \delta_{|\text{Im } \Theta})$  dans  $\Lambda^*(\tilde{\mathbb{R}}^n, \mathbb{C})$ . Le résultat suivant en découle.

**Proposition 4.30** L'application  $[\omega] \mapsto w_0$  est un isomorphisme d'algèbres graduées de  $H_{\text{DR}}^*(\mathbb{T}^n)$  dans  $\Lambda^* \tilde{\mathbb{R}}^n$ .  $\square$

En particulier, la dimension de l'espace vectoriel réel  $H^k(\mathbb{T}^n)$  est le coefficient binomial  $\binom{n}{k}$  et la dimension de l'espace vectoriel réel  $H^*(\mathbb{T}^n)$  est  $2^n$ .

### Les espaces projectifs complexes.

**Proposition 4.31** Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}$ . Les espaces de cohomologie de de Rham de l'espace projectif complexe  $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  sont

$$H_{\text{DR}}^k(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } 0 \leq k \leq 2n \text{ et } k \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

En particulier sa caractéristique d'Euler est  $n + 1$ .

**Démonstration.** On raisonne par récurrence sur  $n$ . Rappelons que  $\mathbb{P}_0(\mathbb{C})$  est réduit à un point, que la variété  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  est  $C^\infty$ -difféomorphe à la sphère  $\mathbb{S}_2$  (voir l'exercice E.15), et que  $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  est connexe et de dimension  $2n$ . Nous pouvons donc supposer  $n \geq 2$  et  $1 \leq k \leq 2n$ . Supposons le résultat vrai pour  $n - 1$ .

On munit l'espace vectoriel  $\mathbb{C}^{n+1}$  de ses coordonnées canoniques  $(z_0, \dots, z_n)$ , et on identifie  $\mathbb{C}^n$  avec l'hyperplan vectoriel d'équation  $z_0 = 0$  dans  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Dans l'espace projectif complexe  $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ , on considère le point  $x$  de coordonnées homogènes  $[1 : 0 : \dots : 0]$ , l'ouvert  $U = \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) - \{x\}$  et l'ouvert  $V = \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) - \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ . Nous avons vu (voir le paragraphe 1.4.3) que  $V$  est  $C^\infty$ -difféomorphe à  $\mathbb{C}^n$  (c'est le domaine d'une carte affine d'hyperplan à l'infini  $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ ), donc  $V$  a le même type d'homotopie que le point. De plus,  $U$  se rétracte par déformation forte sur  $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ , par l'homotopie  $([z_0 : z_1 : \dots : z_n], t) \mapsto [tz_0 : z_1 : \dots : z_n]$ , donc a le même type d'homotopie que

$\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ . L'intersection  $U \cap V$  est  $C^\infty$ -difféomorphe à  $\mathbb{C}^n - \{0\}$ , donc a le même type d'homotopie que la sphère  $\mathbb{S}_{2n-1}$ .

La suite exacte de Mayer-Vietoris

$$\cdots \rightarrow H^{k-1}(U \cap V) \rightarrow H^k(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) \rightarrow H^k(U) \times H^k(V) \rightarrow H^k(U \cap V) \rightarrow \cdots$$

donne donc des suites exactes

$$H^0(U) \times H^0(V) \rightarrow H^0(U \cap V) \rightarrow H^1(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) \rightarrow H^1(\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})) = 0,$$

$$0 \rightarrow H^{2n-1}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) \rightarrow H^{2n-1}(\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})) = 0 \rightarrow H^{2n-1}(\mathbb{S}_{2n-1}) \rightarrow H^{2n}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) \rightarrow 0,$$

et, pour  $1 < k < 2n - 1$ ,

$$0 \rightarrow H^k(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) \rightarrow H^k(\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})) \rightarrow 0.$$

Comme l'application  $H^0(U) \times H^0(V) \rightarrow H^0(U \cap V)$  est surjective (puisque  $U, V, U \cap V$  sont connexes, voir la remarque (2) suivant la proposition 4.20), le résultat s'en déduit.  $\square$

**Les sommes connexes.** Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux variétés  $C^\infty$  connexes de même dimension  $n$ . On appelle *somme connexe* de  $M_1$  et  $M_2$ , et l'on note  $M_1 \# M_2$ , toute variété construite de la manière suivante. Notons  $B(0, r)$  et  $\overline{B}(0, r)$  les boules ouvertes et fermées de rayon  $r$  dans l'espace euclidien usuel  $\mathbb{R}^n$ . Pour  $i = 1, 2$ , notons  $\varphi_i : B(0, 3) \rightarrow M_i$  un plongement  $C^\infty$ , et  $B_i = \varphi_i(\overline{B}(0, 1/2))$ . Notons  $\psi : B(0, 2) - \overline{B}(0, 1/2) \rightarrow B(0, 2) - \overline{B}(0, 1/2)$  le  $C^\infty$ -difféomorphisme  $x \mapsto x/(||x||^2)$ . On définit  $M_1 \# M_2$  comme l'espace topologique quotient de la variété  $C^\infty$  somme disjointe  $(M_1 - B_1) \amalg (M_2 - B_2)$  par la relation d'équivalence engendrée par  $\varphi_1(x) \sim \varphi_2 \circ \psi(x)$  pour tout  $x$  dans  $B(0, 2) - \overline{B}(0, 1/2)$ . Il n'est pas difficile de montrer que  $M_1 \# M_2$  admet une unique structure de variété  $C^\infty$  telle que la projection canonique induise un plongement  $C^\infty$  de  $M_1 - B_1$  et de  $M_2 - B_2$  sur des ouverts de  $M_1 \# M_2$ . Cette construction dépend du choix des  $\varphi_1, \varphi_2$ , mais on montre (voir par exemple [Hir]) qu'à  $C^\infty$ -difféomorphisme près, elle n'en dépend pas. On montre de même qu'à  $C^\infty$ -difféomorphisme près, l'opération de somme connexe est associative. La variété topologique sous-jacente à  $M_1 \# M_2$  est la variété topologique somme connexe au sens du paragraphe 1.4.1 des variétés topologiques sous-jacentes à  $M_1$  et  $M_2$ .

**Lemme 4.32** Soit  $M$  une variété  $C^\infty$  de dimension  $n \geq 2$ , et  $x$  un point de  $M$ . Alors l'inclusion  $M - \{x\} \rightarrow M$  induit un isomorphisme en cohomologie de de Rham, pour tout  $k \neq n, n - 1$  :

$$H^k(M) \simeq H^k(M - \{x\}).$$

**Démonstration.** Le résultat est vrai pour  $k = 0$ , car comme  $n \geq 2$ , le point  $x$  ne disconnecte pas la composante connexe de  $M$  qui le contient. On suppose donc  $k \geq 1$ .

On utilise la suite de Mayer-Vietoris pour le recouvrement ouvert  $\{M - \{x\}, V\}$  de  $M$ , où  $V$  est un voisinage ouvert de  $x$  difféomorphe à la boule ouverte unité de

$\mathbb{R}^n$ , en utilisant que  $V$  est contractile, donc possède la même cohomologie que le point, et que  $(M - \{x\}) \cap V = V - \{x\}$  possède le même type d'homotopie, donc la même cohomologie, que la sphère  $\mathbb{S}_{n-1}$ . Comme  $H^k(V) = 0$ , on a une suite exacte

$$H^{k-1}(V - \{x\}) \longrightarrow H^k(M) \longrightarrow H^k(M - \{x\}) \longrightarrow H^k(V - \{x\}).$$

Le terme  $H^{k-1}(V - \{x\})$  est nul si  $k \neq 1, n$ . Si  $k = 1$ , alors la flèche précédente dans la suite exacte de Mayer-Vietoris  $H^{k-1}(M - \{x\}) \times H^{k-1}(V) \rightarrow H^{k-1}(V - \{x\})$  est surjective (car  $M - \{x\}, V, V - \{x\}$  sont connexes, voir la remarque (2) suivant la proposition 4.20), donc  $H^{k-1}(V - \{x\}) \rightarrow H^k(M)$  est l'application nulle. Le terme  $H^k(V - \{x\})$  est nul si  $k \neq n - 1$ .  $\square$

**Proposition 4.33** Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux variétés  $C^\infty$  connexes de même dimension  $n \geq 3$ . Alors, pour tout  $k \neq 0, n, n - 1$ , on a un isomorphisme

$$H^k(M_1 \# M_2) \simeq H^k(M_1) \times H^k(M_2).$$

**Démonstration.** Montrons que pour tout  $k$  différent de  $0, n, n - 1$ , on a un isomorphisme  $H^k(M_1 \# M_2) \rightarrow H^k(M_1 - \{x_1\}) \times H^k(M_2 - \{x_2\})$ . Le résultat découlera alors du lemme précédent.

On reprend les notations de la définition de  $M_1 \# M_2$ . Notons  $U_1, U_2$  les images de  $M_1 - B_1$  et de  $M_2 - B_2$  dans  $M_1 \# M_2$ . L'intersection  $U_1 \cap U_2$  a le même type d'homotopie que la sphère  $\mathbb{S}_{n-1}$ . Remarquons que  $M_1 - B_1$  et  $M_2 - B_2$  ont le même type d'homotopie que  $M_1 - \{x_1\}$  et  $M_2 - \{x_2\}$  pour  $x_1, x_2$  des points de  $B_1, B_2$  respectivement. La suite exacte de Mayer-Vietoris de  $M_1 \# M_2$  pour le recouvrement  $\{U_1, U_2\}$  donne une suite exacte

$$H^{k-1}(\mathbb{S}_{n-1}) \longrightarrow H^k(M_1 \# M_2) \longrightarrow H^k(M_1 - \{x_1\}) \times H^k(M_2 - \{x_2\}) \longrightarrow H^k(\mathbb{S}_{n-1}).$$

Si  $k \neq 0, 1, n, n - 1$  les termes extrêmes sont nuls. Si  $k = 1$ , un raisonnement déjà vu (voir la remarque (2) suivant la proposition 4.20) montre que la flèche la plus à gauche est nulle.  $\square$

**Remarque.** Pour  $n \geq 1$  et  $k = 0, n$ , le résultat précédent est faux, comme le montre le cas  $M_1 = M_2 = \mathbb{S}_n$ . Comme le montre l'exercice E.36 (2) ci-dessous, le résultat est faux si  $n = 2$  et  $k = 1$ , mais il est vrai par la proposition 4.35 ci-dessous si  $k = 1$  et si  $M_1$  et  $M_2$  sont deux surfaces compactes connexes orientables. Il découle de la dualité de Poincaré (voir le paragraphe 4.5) que le résultat est vrai si  $n \geq 3$ ,  $k = n - 1$  et  $M_1$  et  $M_2$  sont deux variétés compactes connexes orientables.

**Les surfaces.**

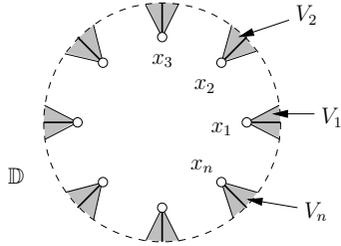
Notons  $\mathbb{D}$  le disque unité ouvert du plan euclidien  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ , et  $x_1, \dots, x_n$  des points distincts, avec  $n \geq 0$ .

**Proposition 4.34** Les espaces de cohomologie de de Rham du disque privé de  $n$  points sont

$$H_{\text{DR}}^k(\mathbb{D} - \{x_1, \dots, x_n\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{R}^n & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier sa caractéristique d'Euler est  $1 - n$ .

**Démonstration.** Par connexité, le résultat est clair pour  $k = 0$ . Par dimension, le résultat est clair si  $k > 2$ . Nous pouvons donc supposer que  $k = 1, 2$ . À difféomorphisme près, nous pouvons supposer que  $x_j = \frac{1}{2}e^{2\pi j/n}$  pour  $1 \leq j \leq n$ . Notons  $M = \mathbb{D} - \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $U$  le disque  $D$  privé des segments entre  $x_j$  et  $e^{2\pi j/n}$ ,  $V_j$  un voisinage de ce segment dans  $M$  comme dans le dessin ci-dessous, et  $V = \cup_{j=1}^n V_j$ .



Notons que les ouverts  $U$  et  $V_j$  sont contractiles et que  $U \cap V_k$  a le type d'homotopie de la somme disjointe de deux points. Donc par la suite exacte de Mayer-Vietoris, on a  $H^k(M) = 0$  si  $k = 2$ . De plus, le début de la suite exacte de Mayer-Vietoris

$$0 \longrightarrow H^0(M) \longrightarrow H^0(U) \times H^0(V) \longrightarrow H^0(U \cap V) \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow H^1(U) \times H^1(V)$$

s'écrit donc

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow 0.$$

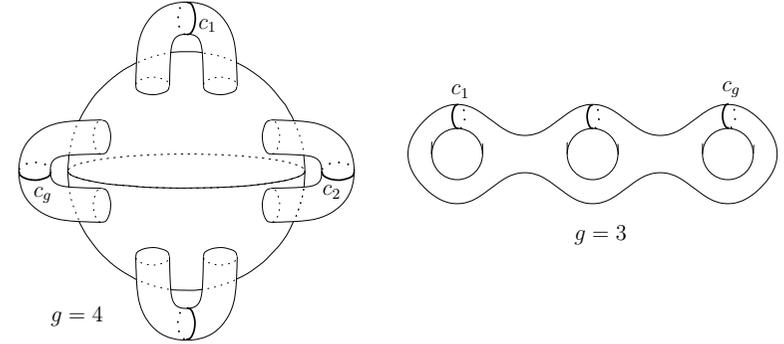
Un simple argument de dimension (voir par exemple le lemme 4.23) permet alors de conclure.  $\square$

**Proposition 4.35** Les espaces de cohomologie de de Rham de la somme connexe  $\#_g \mathbb{T}^2$  de  $g \geq 0$  tores de dimension 2 sont

$$H_{\text{DR}}^k(\#_g \mathbb{T}^2) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, 2 \\ \mathbb{R}^{2g} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier sa caractéristique d'Euler est  $2 - 2g$ .

**Démonstration.** Posons  $M = \#_g \mathbb{T}^2$ . Notons  $U$  un ouvert de  $M$  obtenu en enlevant  $g$  cercles  $C_1, \dots, C_g$  plongés de manière disjointe dans  $M$ , de sorte que  $U$  soit difféomorphe à la sphère  $\mathbb{S}_2$  privée de  $2g$  disques fermés, donc ait le même type d'homotopie qu'un disque privé de  $2g - 1$  points. Notons  $V$  la réunion disjointe de voisinages ouverts  $V_i$  de chacun de ces cercles, où chaque  $V_i$  est difféomorphe à une couronne, donc a le même type d'homotopie qu'un cercle, et tel que  $V_i - C_i$  soit difféomorphe à la somme disjointe de deux anneaux.



Comme  $M$  est de dimension 2, on a  $H^k(M) = 0$  si  $k > 2$ . Le début de la suite exacte de Mayer-Vietoris est

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(M) \longrightarrow H^0(U) \times H^0(V) \longrightarrow H^0(U \cap V) \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow H^1(U) \times H^1(V) \\ \longrightarrow H^1(U \cap V) \longrightarrow H^2(M) \longrightarrow H^2(U) \times H^2(V). \end{aligned}$$

Nous verrons que  $H^2(M) \simeq \mathbb{R}$  dans le paragraphe suivant (mais on peut aussi le calculer en explicitant les flèches). On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{g+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{2g} \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow \mathbb{R}^{3g-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{2g} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0.$$

Un argument de dimension (voir par exemple le lemme 4.23) permet alors de conclure que  $H^1(M) \simeq \mathbb{R}^{2g}$ .  $\square$

**Exercice E.36** (1) Montrer que les espaces de cohomologie de de Rham de  $\#_g \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , la somme connexe de  $g \geq 1$  plans projectifs, sont

$$H_{\text{DR}}^k(\#_g \mathbb{P}_2(\mathbb{R})) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{R}^{g-1} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En déduire que sa caractéristique d'Euler est  $2 - g$ .

(2) Montrer que les espaces de cohomologie de de Rham de  $\#_g \mathbb{T}^2 - \{x_1, \dots, x_n\}$ , la somme connexe de  $g \geq 0$  tores de dimension 2 privée de  $n \geq 1$  points distincts, sont

$$H_{\text{DR}}^k(\#_g \mathbb{T}^2 - \{x_1, \dots, x_n\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{R}^{2g+n-1} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En déduire que sa caractéristique d'Euler est  $2 - 2g - n$ .

(3) Montrer que les espaces de cohomologie de de Rham de la variété  $\sharp_g \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) - \{x_1, \dots, x_n\}$ , la somme connexe de  $g \geq 1$  plans projectifs privée de  $n \geq 1$  points distincts, sont

$$H_{\text{DR}}^k(\sharp_g \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) - \{x_1, \dots, x_n\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{R}^{g+n-1} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

En déduire que sa caractéristique d'Euler est  $2 - g - n$ .

On montre (voir par exemple [Hir, Gra]) que toute surface  $C^\infty$  compacte connexe est  $C^\infty$ -difféomorphe à  $\sharp_g \mathbb{T}^2$ , c'est-à-dire à une somme connexe de  $g \geq 0$  tores de dimension 2, ou à  $\sharp_g \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire à une somme connexe de  $g \geq 1$  plans projectifs. La proposition 4.35 et l'exercice E.36 (1) montrent que deux telles surfaces ne sont pas  $C^\infty$ -difféomorphes (et même n'ont pas le même type d'homotopie), car leurs cohomologies de de Rham diffèrent.

### 4.3 Intégration des formes différentielles

Toutes les formes différentielles dans ce paragraphe seront supposées  $C^\infty$ , pour simplifier, mais une régularité  $C^0, C^1$ , voire  $C^2$  suffit dans la plupart des cas (voir la remarque finale de ce paragraphe).

Le but de ce paragraphe est de définir une intégration des formes différentielles de degré maximum sur une variété  $M$  de classe  $C^\infty$ . Deux problèmes vont se poser, la non compacité (mais c'est un problème classique pour l'intégration usuelle, facilement contournable) et la non orientabilité (qui est la grosse différence entre l'intégration usuelle et l'intégration des formes différentielles)

Si  $\omega$  est une forme différentielle  $C^\infty$  sur  $M$ , appelons *support* de  $\omega$  l'adhérence des points  $x$  où  $\omega_x$  n'est pas nul. On note  $\Omega_c(M)$  la sous-algèbre graduée de  $\Omega(M)$  (qui n'est pas unitaire si  $M$  n'est pas compacte) des formes différentielles à support compact sur  $M$ .

#### • Intégration dans les ouverts de $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N} - \{0\}$ . Rappelons que si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , alors toute  $n$ -forme différentielle est de la forme  $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  où  $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ . Notons  $dx_1 \dots dx_n$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout borélien  $B$  de  $U$ , et toute  $n$ -forme différentielle  $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  sur  $U$  telle que  $f|_B \in \mathbb{L}^1(B, dx_1 \dots dx_n)$ , on pose

$$\int_B \omega = \int_B f dx_1 \dots dx_n .$$

La condition d'intégrabilité est satisfaite par exemple si l'intersection de  $B$  et du support de  $\omega$  est contenue dans un compact, car toute fonction  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$  est localement intégrable pour la mesure de Lebesgue. Lorsque  $\omega$  est à support compact dans  $U$ , l'application

$$B \mapsto \int_B \omega = \int_B f dx_1 \dots dx_n$$

où  $B$  parcourt les boréliens de  $U$ , est une mesure de Radon (borélienne, réelle, régulière) finie sur  $U$ , qui est positive si  $f$  est positive. (C'est juste la mesure de densité  $f$  par rapport à la mesure de Lebesgue).

**Lemme 4.36 (Formule du changement de variable local)** Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\varphi : U \rightarrow V$  un  $C^\infty$ -difféomorphisme,  $\omega \in \Omega^n(V)$  et  $K$  un compact de  $V$  tel que le signe  $\varepsilon$  du jacobien  $J_\varphi$  de  $\varphi$  soit constant sur  $\varphi^{-1}(K)$ . Alors

$$\int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^* \omega = \varepsilon \int_K \omega .$$

**Démonstration.** On a vu (juste après la proposition 4.3) que

$$(\varphi^*(f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n))_x = f \circ \varphi(x) J_\varphi(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n .$$

Comme sur  $\varphi^{-1}(K)$ , on a  $J_\varphi(x) = \varepsilon |J_\varphi(x)|$ , le résultat découle alors de la formule de changement de variable pour la mesure de Lebesgue, car  $\int_{\varphi^{-1}(K)} \mu = \int_K \varphi_* \mu$  pour toute mesure  $\mu$  sur  $\varphi^{-1}(K)$ ,  $\varphi_*(g dx_1 \dots dx_n) = g \circ \varphi^{-1} |J_{\varphi^{-1}}| dx_1 \dots dx_n$  pour toute fonction mesurable  $g$  sur  $\varphi^{-1}(K)$  et  $J_\varphi \circ \varphi^{-1} \cdot J_{\varphi^{-1}} = 1$ .  $\square$

**Exemples.** Soit  $U$  un voisinage ouvert de l'intervalle  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ , avec  $a < b$ .

(1) Si  $\omega = f dx$ , alors

$$\int_{[a,b]} \omega = \int_a^b f(x) dx .$$

(2) Soient  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i \in \Omega^1(V)$ ,  $U$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ , et  $\gamma : U \rightarrow V$  un chemin  $C^\infty$  dans  $V$ , de composantes  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ . Alors  $\gamma^* \omega \in \Omega^1(U)$  et, pour tous  $a, b$  dans  $U$ ,

$$\int_{[a,b]} \gamma^* \omega = \sum_{i=1}^n \int_{[a,b]} (\omega_i \circ \gamma) \gamma'_i(t) dt .$$

Si  $\alpha = \gamma|_{[a,b]}$ , cette intégrale est appelée l'*intégrale* de  $\omega$  le long du chemin  $\alpha$ , et parfois notée  $\int_\alpha \omega$ .

La présence du signe  $\varepsilon$  dans la formule du changement de variable local ci-dessus pose des problèmes si l'on essaie d'étendre la notion d'intégrale de formes différentielles des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  aux variétés générales.

#### • Orientation des variétés.

Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N} - \{0\}$ .

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n$ . Rappelons qu'une *orientation* de  $E$  est une classe d'équivalence de bases de  $E$  pour la relation  $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$  si l'application linéaire envoyant  $\mathcal{B}$  sur  $\mathcal{B}'$  est de déterminant strictement positif, ou, de manière équivalente, est une classe d'équivalence de  $n$ -formes alternées sur  $E$  pour la relation  $\omega \sim \omega'$  s'il existe  $\lambda > 0$  tel que  $\omega' = \lambda \omega$ . Il existe exactement deux

orientations sur  $E$ . On dit que  $E$  est *orienté* s'il est muni d'une orientation. Une base appartenant à cette orientation est alors dite *positive*. Une  $n$ -forme alternée appartenant à cette orientation est alors dite *positive*. La correspondance entre les deux définitions d'orientation se comprend comme suit : si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , de base duale  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ , alors  $e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$  est positive si et seulement si  $(e_1, \dots, e_n)$  est positive. Un isomorphisme linéaire de  $E$  dans un espace vectoriel réel orienté  $F$  *préserve l'orientation* s'il envoie l'orientation de  $E$  sur l'orientation de  $F$ , c'est-à-dire s'il envoie une/toute base positive de  $E$  sur une base positive de  $F$ , ou de manière équivalente, si son déterminant, dans des bases positives de  $E$  et de  $F$ , est strictement positif. L'espace  $\mathbb{R}^n$  est muni de l'orientation (dite *canonique*) telle que sa base canonique soit positive.

Un  $C^\infty$ -difféomorphisme entre des ouverts  $U$  et  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  *préserve l'orientation* si le signe de son jacobien est positif en tout point, ou de manière équivalente, si pour tout point  $x$  de  $U$ , sa différentielle en  $x$  est un automorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^n$  qui préserve l'orientation.

Un atlas de cartes  $C^\infty$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  sur un espace topologique  $M$  est dit *orienté* si ses applications de changement de cartes préservent l'orientation. Une *variété orientée*  $C^\infty$  est un espace topologique  $N$ , séparé et à base dénombrable (ou, de manière équivalente, métrisable et séparable, voir la proposition 1.2), muni d'un atlas de cartes  $C^\infty$  orienté, maximal parmi les atlas de cartes  $C^\infty$  orientés. Une carte de cet atlas sera appelée une *carte orientée* (ou *positive*) de  $N$ . Si  $M$  est une variété orientée  $C^\infty$ , nous noterons encore  $M$  par abus la variété  $C^\infty$ , qui est l'espace topologique sous-jacent de  $M$ , muni de l'atlas de cartes  $C^\infty$  maximal contenant l'atlas de cartes  $C^\infty$  orienté de  $M$ .

Soit  $M$  une variété de classe  $C^\infty$ . Une *orientation* de  $M$  est un sous-atlas orienté maximal de son atlas de cartes maximal. L'espace topologique sous-jacent à  $M$ , muni de ce sous-atlas, est alors une variété orientée  $C^\infty$ . On dit que  $M$  est *orientable* si elle admet une orientation. *Orienter*  $M$ , c'est choisir une orientation sur  $M$ , et nous noterons souvent de la même manière la variété orientée  $C^\infty$  obtenue.

Un  $C^\infty$ -difféomorphisme local  $f : M \rightarrow N$  entre deux variétés  $C^\infty$  orientées *préserve l'orientation* si  $f$  envoie toute carte orientée suffisamment petite de  $M$  sur une carte orientée de  $N$ , c'est-à-dire pour toute carte orientée  $(V, \varphi)$  de  $N$  et tout ouvert  $U$  de  $M$  tels que  $f|_U : U \rightarrow V$  soit un  $C^\infty$ -difféomorphisme, la carte  $(U, \varphi \circ f)$  est une carte orientée de  $M$ , ou, de manière équivalente, si l'application  $f$ , lue dans toute paire de cartes orientées suffisamment petites, préserve l'orientation (en tant que  $C^\infty$ -difféomorphisme entre ouverts de  $\mathbb{R}^n$ ). Il est immédiat qu'alors  $f^{-1}$  préserve aussi l'orientation.

**Exemples.** (1) La variété  $\mathbb{R}^n$  est orientable, et orientée par l'atlas orienté maximal contenant l'application identité.

(2) Tout ouvert  $U$  d'une variété orientable  $M$  est orientable, en prenant les cartes orientées de  $M$  de domaine contenu dans  $U$ , et sera, sauf mention explicite du contraire, munie de cette orientation.

(3) Si  $(M_i)_{i \in I}$  est une famille dénombrable de variétés orientées  $C^\infty$ , alors l'espace

topologique somme disjointe des espaces topologiques sous-jacents de  $(M_i)_{i \in I}$ , muni de l'atlas  $C^\infty$  orienté maximal contenant la réunion des atlas  $C^\infty$  orientés maximaux des  $M_i$ , est l'unique structure de variété orientée  $C^\infty$  sur l'ensemble somme disjointe des ensembles  $M_i$  telle que l'inclusion canonique  $M_i \rightarrow M$  soit un  $C^\infty$ -difféomorphisme sur son image qui préserve l'orientation. Cette variété orientée  $C^\infty$  est notée  $\coprod_{i \in I} M_i$ , et appelée *variété orientée somme disjointe*.

(4) Si  $M_1, M_2$  sont deux variétés orientées  $C^\infty$ , alors l'espace topologique produit des espaces topologiques sous-jacents de  $M_1, M_2$ , muni de l'atlas  $C^\infty$  orienté maximal contenant les produits de cartes locales orientées de  $M_1, M_2$ , est une variété  $C^\infty$  orientée, notée  $M_1 \times M_2$ , et appelée *variété orientée produit*.

(5) Soient  $M_1, M_2$  deux variétés connexes orientées  $C^\infty$ , et  $M_1 \# M_2$  la variété somme connexe, construite à partir de plongements préservant l'orientation  $\varphi_i : B(0, 3) \rightarrow M_i$  pour  $i = 0, 1$ , comme dans la partie précédente. Comme le difféomorphisme de recollement  $\psi : B(0, 2) - \overline{B(0, 1/2)} \rightarrow B(0, 2) - \overline{B(0, 1/2)}$  renverse l'orientation (c'est une restriction de l'inversion par rapport à la sphère unité), la variété  $M_1 \# M_2$  admet une unique structure de variété orientée, telle que toute carte locale orientée de  $M_i$ , de domaine contenue dans  $M_i - \varphi_i(\overline{B(0, 1/2)})$  soit une carte orientée de  $M_1 \# M_2$ . La variété  $M_1 \# M_2$ , munie de cette orientation, est appelée la variété *somme connexe orientée* de  $M_1$  et  $M_2$ . À difféomorphisme préservant l'orientation près, elle ne dépend pas des choix des  $\varphi_i$  (voir par exemple [Hir]).

(6) Un point important est qu'alors que tout espace vectoriel réel de dimension finie, et tout ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , admet une orientation, il existe des variétés  $C^\infty$  qui ne sont pas orientables. C'est le cas par exemple du ruban de Möbius, qui est la variété quotient de  $\mathbb{R}^2$  par l'action libre et propre du groupe  $\mathbb{Z}$ , où  $1 \in \mathbb{Z}$  agit par  $(x, y) \mapsto (x + 1, -y)$ , voir l'exercice ci-dessous.

**Exercice E.37** (1) Montrer que tout revêtement de classe  $C^\infty$  d'une variété orientée  $C^\infty$  admet une unique orientation, dite image réciproque, telle que la projection de revêtement soit un  $C^\infty$ -difféomorphisme local préservant l'orientation.

(2) Soit  $M$  une variété  $C^\infty$ , munie d'une action libre et propre par  $C^\infty$ -difféomorphismes d'un groupe discret  $G$ . Montrer que si la variété quotient  $G \backslash M$  est orientée, alors  $G$  agit par  $C^\infty$ -difféomorphismes préservant l'orientation pour l'orientation image réciproque sur  $M$ . Montrer que si  $M$  est orientée et si  $G$  agit par  $C^\infty$ -difféomorphismes préservant l'orientation, alors la variété quotient  $G \backslash M$  est orientable, et admet une unique orientation telle que l'orientation image réciproque sur  $M$  soit l'orientation originelle de  $M$ .

(3) Montrer que le ruban de Möbius n'est pas orientable.

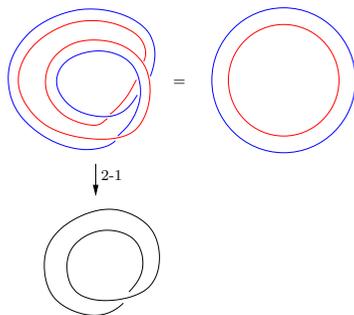
(4) Montrer que l'espace projectif  $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  est orientable.

(5) Montrer que l'espace projectif  $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  est orientable si et seulement si  $n$  est impair.

(6) Montrer que toute variété  $M$  de classe  $C^\infty$  admet un revêtement double (c'est-à-dire à deux feuillets)  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$  qui est orientable. Si  $M$  est connexe, et non orientable, montrer que ce revêtement est connexe et unique à isomorphisme de revêtements près, et qu'il existe une action libre de  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sur  $\widetilde{M}$  telle que

la variété quotient  $G \backslash \widetilde{M}$  soit  $C^\infty$ -difféomorphe à  $M$ . (On l'appelle un revêtement d'orientation de  $M$ .)

**Exemples.** (1) Le cylindre  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_1$ , identifié au quotient de  $\mathbb{R}^2$  par l'action libre et propre du groupe  $\mathbb{Z}$ , où  $1 \in \mathbb{Z}$  agit par  $(x, y) \mapsto (x + 2, y)$ , muni de sa projection naturelle sur le ruban de Möbius, est un revêtement d'orientation du ruban de Möbius.



(2) Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N} - \{0\}$ , la projection canonique  $\mathbb{S}_{2n} \rightarrow \mathbb{P}_{2n}(\mathbb{R})$  est un revêtement d'orientation de l'espace projectif réel de dimension  $2n$  par la sphère de dimension  $2n$ .

**Proposition 4.37** Soit  $M$  une variété  $C^\infty$  orientée de dimension  $n$ . Il existe une forme différentielle  $\omega$  dans  $\Omega^n(M)$ , unique à multiplication près par une application  $C^\infty$  strictement positive sur  $M$ , telle que, pour toute carte orientée  $(U, \varphi)$  de  $M$ ,

$$(\varphi^{-1})^*(\omega|_U) = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

où  $f$  est à valeurs strictement positives sur  $\varphi(U)$ .

Une telle forme  $\omega$  sera appelée une *forme volume* de  $M$ .

**Démonstration.** Soit  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  un atlas de cartes  $C^\infty$  orienté de  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , et  $(f_i)_{i \in I}$  une partition de l'unité  $C^\infty$  subordonnée au recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$ . Pour tout  $i$ , on prolonge par 0 en dehors de  $U_i$  la forme différentielle  $f_i \varphi_i^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)$ , et on pose

$$\omega = \sum_{i \in I} f_i \varphi_i^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n).$$

Cette somme étant localement finie, elle définit une forme différentielle sur  $M$ . Il n'est pas difficile de montrer qu'elle convient et vérifie la propriété d'unicité de l'énoncé, par la formule du changement de variable local (lemme 4.36). L'unicité est facile à démontrer.  $\square$

**Remarques.** Soit  $M$  une variété  $C^\infty$  de dimension  $n$ .

(1) La variété  $M$  est orientable si et seulement s'il existe une  $n$ -forme différentielle  $\omega$  qui ne s'annule pas sur  $M$ .

En effet, si  $M$  est orientable, alors toute forme volume d'une orientation de  $M$  vérifie cette propriété de ne pas s'annuler sur  $M$ . Réciproquement, si  $\omega$  est une  $n$ -forme différentielle  $\omega$  ne s'annulant pas sur  $M$ , alors l'ensemble des cartes locales

$(U, \varphi)$  de  $M$  telles que  $(\varphi^{-1})^*(\omega|_U) = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$  où  $f \in C^\infty(\varphi(U), \mathbb{R}_+^*)$ , est un atlas de cartes  $C^\infty$  orienté maximal, par la formule de changement de variable. Le fait que les domaines de ces cartes recouvrent  $M$  vient du fait que, pour toute carte locale  $(U, \varphi)$  de  $M$ , sur l'ouvert  $\varphi(U)$  de  $\mathbb{R}^n$ , toute  $n$ -forme différentielle ne s'annulant pas est de la forme  $f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$  où  $f \in C^\infty(\varphi(U), \mathbb{R})$  est de signe constant (sur chaque composante connexe de  $\varphi(U)$ ), donc quitte à composer la carte  $\varphi$  par une réflexion (sur chaque composante connexe de  $U$  où  $f \circ \varphi$  est négative), on obtient une carte de la bonne forme.

(2) La formule du changement de variable local (lemme 4.36) montre aussi que si  $M$  est munie d'une orientation et si  $\omega$  est une forme volume sur  $M$  pour cette orientation, alors une carte locale  $(U, \varphi)$  de la variété  $C^\infty$  est orientée si et seulement si  $(\varphi^{-1})^*(\omega|_U) = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$  où  $f$  est à valeurs strictement positives sur  $\varphi(U)$ .

(3) L'application, qui à une orientation de  $M$  associe une de ses formes volumes, induit une bijection de l'ensemble des orientations de  $M$  dans l'ensemble des classes d'équivalence des  $n$ -formes différentielles ne s'annulant pas sur  $M$ , modulo multiplication par un élément de  $C^\infty(M, \mathbb{R}_+^*)$ . Si  $\pi_0(M)$  est l'ensemble des composantes connexes de  $M$ , lorsque  $M$  est orientable, il y a donc une bijection entre l'ensemble des orientations de  $M$  et  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\pi_0(M)}$ , puisqu'une application continue qui ne s'annule pas sur un connexe est ou bien partout strictement positive, ou bien partout strictement négative. En particulier, une variété  $C^\infty$  connexe admet 0 ou 2 orientations.

(4) Rappelons qu'une orientation d'un espace vectoriel réel  $E$  de dimension finie  $n \geq 1$  est défini, de manière équivalente, comme le choix de l'une des deux classes de bases de  $E$  modulo l'action des automorphismes linéaires de déterminant strictement positif, ou comme le choix de l'un des deux éléments de  $(\Lambda^n E)/\mathbb{R}_+^*$ . Si  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels orientés, alors l'espace vectoriel produit  $E \times F$  est l'espace vectoriel produit, muni de l'orientation telle qu'une base obtenue en prenant une base positive de  $E$  suivie d'une base positive de  $F$  soit positive. Tout espace vectoriel orienté est naturellement une variété orientée, pour l'atlas orienté maximal contenant un isomorphisme linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{R}^n$  préservant l'orientation.

Si  $M$  est orientée, alors l'espace tangent en chaque point de  $M$  est orienté, de sorte qu'une carte locale  $(U, \varphi)$  de  $M$  soit orientée si et seulement si  $T_x \varphi : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n$  préserve l'orientation pour tout  $x$  dans  $U$ .

Orienter une variété  $M$  revient à trouver une orientation (localement) cohérente des espaces tangents. Plus précisément,  $M$  est orientable si et seulement s'il existe une orientation de l'espace tangent en tout point de  $M$ , telle que pour toute carte locale  $(U, \varphi)$  de  $M$ , l'isomorphisme linéaire  $T_x \varphi : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n$  préserve l'orientation pour tout  $x$  dans  $U$  : l'ensemble des telles cartes locales est un atlas orienté.

Si  $M_1, M_2$  sont deux variétés orientées  $C^\infty$ , et si  $M = M_1 \times M_2$  est la variété orientée produit, alors, pour tout  $(x, y)$  dans  $M$ , l'orientation de l'espace vectoriel  $T_{(x,y)} M$  est l'orientation produit  $T_x M_1 \times T_y M_2$  des orientations des espaces vectoriels  $T_x M_1$  et  $T_y M_2$ .

(5) La variété  $TM$  est toujours orientable, car l'atlas de cartes  $C^\infty$  de  $TM$  associé

à un atlas de cartes  $C^\infty$  de  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  (par la construction du paragraphe 2.3) est un atlas de cartes  $C^\infty$  orienté à valeurs dans  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Exemples.** (1) La sphère  $\mathbb{S}_n$  est orientable. En effet, si

$$\sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i x_i dx_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

alors  $\sigma$  est (en restriction à  $\mathbb{S}_n$ ) une forme volume sur  $\mathbb{S}_n$ , car si  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base de  $T_x \mathbb{S}_n$  (identifié à  $x^\perp$ ), alors

$$\sigma_x(v_1, \dots, v_n) = \det(x, v_1, \dots, v_n) \neq 0.$$

En fait, si

$$X = \sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

est le champ de vecteurs normal sortant sur  $\mathbb{S}_n$ , et si  $\omega = dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_n$ , alors

$$\sigma = i_X \omega.$$

(2) L'espace projectif complexe  $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  est orientable (voir l'exercice E.37 (4)).

(3) Toute variété  $M$  de classe  $C^\infty$  parallélisable est orientable. En effet, (la dimension  $n$  de  $M$  a été supposée non nulle) le fibré tangent de  $M$  est isomorphe à  $M \times \mathbb{R}^n$ , donc son fibré des formes  $n$ -linéaires alternées est isomorphe à  $M \times \Lambda^n(\mathbb{R}^n)^*$ , et si  $\omega$  est une  $n$ -forme alternée non nulle sur  $\mathbb{R}^n$ , alors  $x \mapsto (x, \omega)$  est une  $n$ -forme différentielle  $C^\infty$  sur  $M$ , qui ne s'annule pas, donc est une forme volume.

En particulier, tout groupe de Lie  $G$  est orientable. De plus, en supposant la dimension  $n$  de  $G$  non nulle, si  $\omega$  est une forme  $n$ -linéaires alternée non nulle sur l'algèbre de Lie de  $G$ , alors

$$g \mapsto \omega_g = (T_e L_g)^* \omega$$

est une  $n$ -forme différentielle  $C^\infty$  sur  $G$ , qui est une forme volume de  $G$ .

(4) La surface compacte connexe, somme connexe de  $g \geq 1$  tores  $\mathbb{T}^2$ , est orientable. En effet, le tore  $\mathbb{T}^2$  est orientable, par exemple car parallélisable, ou car quotient de la variété orientée  $\mathbb{R}^2$  par le groupe  $\mathbb{Z}^2$  agissant librement et proprement en préservant l'orientation (voir l'exercice E.37 (2)). On applique alors l'exemple (5) précédant l'exercice E.37.

#### • Intégration de formes différentielles.

**Proposition 4.38** Soit  $M$  une variété  $C^\infty$  orientée, de dimension  $n \geq 1$ . Il existe une unique forme linéaire  $\int_M : \Omega_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour toute carte orientée  $(U, \varphi)$  de  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , et pour tout  $\omega$  dans  $\Omega_c^n(U)$ ,

$$\int_M \omega = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega.$$

**Démonstration.** Soient  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  un atlas de cartes  $C^\infty$  orienté de  $M$ , et  $(f_i)_{i \in I}$  une partition de l'unité  $C^\infty$  subordonnée au recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$ . Comme pour tout  $\omega$  dans  $\Omega_c^n(M)$ , on a  $\omega = \sum_{i \in I} f_i \omega$  où  $f_i \omega \in \Omega_c^n(U_i)$ , on doit avoir par linéarité

$$\int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(U_i)} (\varphi_i^{-1})^* (f_i \omega).$$

En particulier, ceci montre l'unicité. Cette formule permet aussi de définir une forme linéaire  $\int_M$ . Le fait qu'elle vérifie la propriété voulue découle de la formule de changement de variables pour les ouverts de  $\mathbb{R}^n$  (voir le lemme 4.36). En effet, si  $\omega \in \Omega_c^n(U)$ , alors

$$\begin{aligned} \int_M \omega &= \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(U_i \cap U)} (\varphi_i^{-1})^* (f_i \omega) = \sum_{i \in I} \int_{\varphi(U_i \cap U)} (\varphi^{-1})^* (f_i \omega) = \\ &= \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \left( \sum_{i \in I} f_i \omega \right) = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega. \end{aligned}$$

□

**Remarques.** (1) Cette forme linéaire  $\int_M$  dépend de l'orientation de  $M$ . Si  $M$  est connexe, et si  $-M$  est la variété  $M$  munie de l'orientation différente, dite *opposée*, alors

$$\int_{-M} = - \int_M.$$

(2) Si  $U$  est un ouvert de  $M$ , muni de l'orientation induite, alors, pour tout  $\omega$  dans  $\Omega_c^n(M)$ , si le support de  $\omega$  est contenu dans  $U$ , alors

$$\int_M \omega = \int_U \omega|_U.$$

(3) Si  $(M_i)_{i \in I}$  est une famille dénombrable de variétés orientées  $C^\infty$ , et  $M = \coprod_{i \in I} M_i$  la variété orientée somme disjointe, alors pour tout  $\omega$  dans  $\Omega_c^n(M)$ , le support de  $\omega$  ne rencontre qu'un nombre fini de  $M_i$ , et

$$\int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_{M_i} \omega|_{M_i}.$$

(4) Si  $\varphi : M \rightarrow N$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme préservant l'orientation entre variétés  $C^\infty$  orientées, alors, par unicité, pour tout  $\omega$  dans  $\Omega_c^n(N)$ , on a la *formule de changement de variable globale* pour l'intégration des formes différentielles

$$\int_M \varphi^* \omega = \int_N \omega.$$

(5) Pour tout borélien  $B$  de  $M$ , on définit de même la forme linéaire  $\int_B$  comme l'unique forme linéaire sur l'espace vectoriel des  $n$ -formes différentielles  $C^\infty$  dont l'intersection du support avec  $B$  est contenue dans un compact, telle que, pour toute

telle forme différentielle  $\omega$  et toute carte locale orientée  $(U, \varphi)$  telle que l'intersection du support de  $\omega$  avec  $B$  soit contenue dans un compact de  $U$ , on ait  $\int_B \omega = \int_{\varphi(U \cap B)} (\varphi^{-1})^* \omega$ . Lorsque  $U$  est un ouvert de  $M$ , on a  $\int_U \omega = \int_U \omega|_U$  pour tout  $\omega$  à support compact dans  $U$ . En particulier, si  $\omega \in \Omega_c^n(M)$ , alors  $B \mapsto \int_B \omega$  est une mesure de Radon (borélienne, réelle, régulière) finie, positive si  $\omega$  est une forme volume de la variété orientée  $M$ .

(6) Une partie  $A$  d'une variété  $N$  de classe  $C^1$  est dite *de mesure nulle* si pour toute carte locale  $(U, \varphi)$  de  $N$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , la partie  $\varphi(A \cap U)$  est de mesure nulle. Comme les difféomorphismes  $C^1$  entre ouverts de  $\mathbb{R}^n$  préservent les ensembles de mesure nulle, il suffit de le vérifier pour une famille de cartes locales de  $N$  dont les domaines recouvrent  $A$ .

Si  $A$  est une partie de mesure nulle d'une variété  $C^\infty$  orientée  $M$ , alors pour tout  $\omega$  dans  $\Omega_c^n(M)$ , on a  $\int_A \omega = 0$ .

(7) Si la variété  $\mathbb{R}$  est munie de l'orientation usuelle, alors pour tous  $a < b$  et tout  $\omega = f dt$  dans  $\Omega^1(\mathbb{R})$ , on a

$$\int_{[a,b]} \omega = \int_a^b f(t) dt .$$

**Remarque.** Si  $n = 0$ , on définit une *orientation* de  $M$  comme une application  $\varepsilon : M \rightarrow \{\pm 1\}$ . L'intégration sur une variété orientée de dimension 0, et d'orientation  $\varepsilon : M \rightarrow \{\pm 1\}$ , est définie en posant, pour tout  $\omega \in \Omega_c^0(M)$ ,

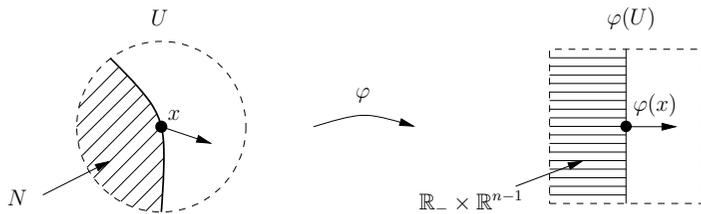
$$\int_M \omega = \sum_{x \in M} \varepsilon(x) \omega(x) .$$

• **Le théorème de Stokes.**

On note  $\mathbb{R}_- = ]-\infty, 0]$ . Soit  $M$  une variété  $C^\infty$  de dimension  $n \geq 1$ .

Une partie  $N$  de  $M$  est un *domaine à bord lisse* ou *domaine régulier* (ou une *sous-variété fermée*  $C^\infty$  à bord, de codimension 0) si pour tout point  $x$  de  $M$ , il existe une carte locale  $(U, \varphi)$  de classe  $C^\infty$  de  $M$  en  $x$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , telle que  $\varphi(U \cap N) = (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap \varphi(U)$ .

Un domaine à bord lisse de  $M$  est fermé dans  $M$  (car on demande la propriété ci-dessus pour tout point  $x$  de  $M$ , et pas seulement pour tout point  $x$  de  $N$ ). La frontière  $\partial N = N \cap \overset{\circ}{N}$  de  $N$  dans  $M$  est aussi appelée le *bord* de  $N$ . Si  $x$  est un point de  $\partial N$ , alors le dessin à avoir en tête est le suivant :



**Proposition 4.39** Soit  $M$  une variété  $C^\infty$  de dimension  $n \geq 1$ , et  $N$  un domaine à bord lisse de  $M$ .

(1) Le bord  $\partial N$  de  $N$  est une sous-variété  $C^\infty$  de codimension 1 de  $M$ .

(2) Si  $M$  est orientée et si  $n \geq 2$ , alors il existe une unique orientation sur  $\partial N$  telle que l'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée :

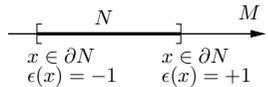
(i) en posant  $\text{pr} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_2, \dots, x_n)$ , si  $(U, \varphi)$  est une carte locale orientée de  $M$  en  $x \in \partial N$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , telle que  $\varphi(U \cap N) = (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap \varphi(U)$ , alors le couple  $(U \cap \partial N, \text{pr} \circ \varphi)$  est une carte locale orientée de  $\partial N$  ;

(ii) pour tout  $x$  dans  $\partial N$ , si  $(v_2, \dots, v_n)$  est une base orientée de  $T_x \partial N$ , et si  $v_1$  est un vecteur tangent en  $x$  à  $M$  pointant vers l'extérieur (c'est-à-dire  $v_1 = \dot{c}(0)$  où  $c : ]-\epsilon, +\epsilon[ \rightarrow M$  de classe  $C^\infty$ , avec  $c(0) = x$ ,  $\dot{c}(0) \notin T_x N$  et  $c(t) \notin N$  si  $t > 0$ ), alors  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  est une base orientée de  $T_x M$ .

L'orientation de  $\partial N$  ci-dessus est appelée l'*orientation par la direction sortante* (ou *normale sortante*). Sauf mention explicite du contraire, le bord de tout domaine à bord lisse d'une variété  $C^\infty$  orientée sera muni de cette orientation.

**Exemple :** Nous le savions déjà, mais la sphère  $\mathbb{S}_n$  et la surface compacte connexe, somme connexe de  $g \geq 0$  tores  $\mathbb{T}^2$ , sont orientables, car frontières de domaines réguliers.

**Remarque.** Si  $M$  est orientée et si  $n = 1$ , alors la définition (ii) a encore un sens : il existe une unique orientation sur la variété  $\partial N$  de dimension 0 telle que si  $(U, \varphi)$  est une carte locale orientée de  $M$  en  $x \in \partial N$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  (avec  $U$  suffisamment petit), alors la valeur en  $x$  de l'orientation de  $\partial N$  est, par définition,  $+1$  si au voisinage de  $\varphi(x)$ , l'image  $\varphi(U \cap N)$  est contenue dans  $]-\infty, \varphi(x)[$ .



**Démonstration de la proposition 4.39.** (1) Pour tout point  $x$  de  $\partial N$ , soit  $(U, \varphi)$  une carte locale de  $M$  en  $x$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , telle que  $\varphi(U \cap N) = (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap \varphi(U)$ . Alors  $\varphi(U \cap \partial N) = (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap \varphi(U)$ , ce qui montre le résultat (par la définition locale par redressement d'une sous-variété, voir le théorème 1.5).

(2) Ceci découle du fait que si un automorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^n$  préservant l'orientation, préserve un demi-espace, alors sa restriction au bord du demi-espace préserve l'orientation de ce demi-espace définie par le vecteur sortant du demi-espace.  $\square$

Pour motiver le résultat suivant, rappelons le *théorème fondamental de l'intégration*. Un intervalle compact  $N = [a, b]$  est un domaine à bord lisse de la variété orientée  $M = \mathbb{R}$  de dimension  $n = 1$ . Une forme différentielle  $\omega$  de degré  $n - 1 = 0$  sur  $\mathbb{R}$  est une fonction  $\omega : t \mapsto \omega(t)$  de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , et sa différentielle extérieure  $d\omega$  s'écrit donc  $\omega'(t) dt$ . Le théorème fondamental de l'intégration

$\int_a^b \omega'(t) dt = \omega(b) - \omega(a)$  s'écrit donc

$$\int_N d\omega = \int_{\partial N} i^* \omega .$$

**Théorème 4.40 (Formule de Stokes)** Soit  $M$  une variété  $C^\infty$  orientée de dimension  $n \geq 1$ . Soit  $N$  un domaine à bord lisse de  $M$ , et  $i : \partial N \rightarrow M$  l'inclusion. Pour toute  $(n-1)$ -forme différentielle  $\omega$  de classe  $C^\infty$  sur  $M$  dont l'intersection du support avec  $N$  est compacte, on a

$$\int_{\partial N} i^* \omega = \int_N d\omega .$$

Nous noterons  $\int_{\partial N} \omega = \int_{\partial N} i^* \omega$  par abus ( $\omega$  est une  $(n-1)$ -forme différentielle). Puisque  $N$  est un borélien de  $M$ , le nombre  $\int_N d\omega$  a été défini dans la remarque (5) précédente.

**Démonstration.** Supposons tout d'abord que  $M = \mathbb{R}^n$  et  $N = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Une  $(n-1)$ -forme différentielle  $\omega$  s'écrit  $\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_n$ . Donc

$$d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n .$$

En appliquant le théorème de Fubini à l'intégrale  $\int_N d\omega$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_N d\omega &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_{-\infty}^0 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_n + \sum_{i=2}^n \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-2}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \cdots \widehat{dx}_i \cdots dx_n . \end{aligned} \quad (1)$$

Comme  $f_k$  est à support compact en restriction à  $N$ , on a  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i = 0$  pour  $2 \leq i \leq n$ , et  $\int_{-\infty}^0 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 = f_1(0, x_2, \dots, x_n)$ . Comme  $i^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_n) = 0$  si  $i \neq 1$  (car  $x_1$  est constant sur  $\partial N$ ), on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial N} \omega &= \int_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}} i^* \left( \sum_{i=1}^n f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_n \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_1(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \cdots dx_n = \int_N d\omega . \end{aligned}$$

Maintenant, soit  $\omega$  comme dans l'énoncé. Par compacité du support de  $\omega$  dans  $N$ , il existe un atlas de cartes  $C^\infty$  orienté  $(U_j, \varphi_j)_{j \in I}$  de  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , tel que

$$\varphi_j(U_j \cap N) = (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap \varphi_j(U_j) ,$$

et  $(f_j)_{j \in I}$  une partition de l'unité  $C^\infty$  subordonnée au recouvrement  $(U_j)_{j \in I}$ , tels que la somme

$$\omega = \sum_{j \in I} f_j \omega$$

n'ait qu'un nombre fini de termes non identiquement nuls sur  $N$ .

Posons  $\alpha_j = (\varphi_j^{-1})^*(f_j \omega|_{U_j})$ , qui, prolongée par 0 en dehors de  $\varphi_j(U_j)$ , est une  $(n-1)$ -forme différentielle  $C^\infty$  dans  $M' = \mathbb{R}^n$ , dont l'intersection du support avec  $N' = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}$  est compact. Notons que  $\varphi_j|_{\partial N}$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme, préservant les orientations par les directions sortantes, de l'ouvert  $\partial N \cap U_j$  de  $\partial N$  sur son ouvert image dans  $\partial N'$ . Notons que  $\alpha_j$  est nulle au voisinage de tout point de  $\partial N'$  qui n'est pas dans  $\varphi_j(\partial N \cap U_j)$  et que  $i^*(f_j \omega)$  est à support dans  $\partial N \cap U_j$ . Donc (avec l'abus de notation mentionné ci-dessus), par la formule de changement de variable globale,

$$\int_{\partial N} (f_j \omega) = \int_{\partial N'} \alpha_j .$$

Comme  $\varphi_j$  préserve l'orientation, et comme  $\varphi_j^*$  commute avec la différentielle, on a, par la formule de changement de variable globale,

$$\int_N d(f_j \omega) = \int_{N'} d\alpha_j .$$

Par sommation, le résultat découle donc du cas particulier traité en premier.  $\square$

**Porisme 4.41** Soit  $M$  une variété  $C^\infty$  orientée de dimension  $n \geq 1$ . Pour tout  $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$ , on a

$$\int_M d\omega = 0 .$$

**Démonstration.** La partie  $M$  de  $M$  est un domaine à bord lisse, dont le bord est vide. La formule de Stokes permet alors de conclure.  $\square$

**Exemples.** (1) Soit  $D$  un domaine à bord lisse, compact, de  $\mathbb{R}^2$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  contenant  $D$  et  $\alpha = Pdx + Qdy$  une 1-forme différentielle  $C^\infty$  sur  $U$ . Alors la formule de Stokes donne

$$\int_{\partial D} (P dx + Q dy) = \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy .$$

Cette formule est connue sous le nom de *formule de Green-Riemann*.

(2) Soit  $D$  un domaine à bord lisse, compact, de  $\mathbb{R}^3$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  contenant  $D$  et  $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ . Si  $X$  est un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $U$ , alors  $i_X \omega$  est une 2-forme différentielle  $C^\infty$  sur  $U$ , et

$$d(i_X \omega) = \mathcal{L}_X \omega = (\operatorname{div} X) \omega$$

par le paragraphe 4.1. Alors la formule de Stokes donne  $\int_{\partial D} i_X \omega = \int_D (\operatorname{div} X) \omega$ , c'est-à-dire, si  $X = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y} + R \frac{\partial}{\partial z}$ ,

$$\int_{\partial D} (P \, dy \wedge dz + Q \, dz \wedge dx + R \, dx \wedge dy) = \int_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz .$$

Cette formule est connue sous le nom de *formule de Gauss-Ostrogradski*.

Notons  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $N$  le champ de vecteurs unitaires normal sortant sur  $\partial D$ , étendu de n'importe quelle manière  $C^\infty$  à  $\mathbb{R}^3$ , et  $j : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'inclusion. On appelle *forme d'aire* de  $\partial D$  la 2-forme différentielle sur  $\partial D$  définie par

$$\sigma = j^*(i_N(dx \wedge dy \wedge dz)) .$$

On définit le *flux* du champ de vecteurs  $X$  à travers  $\partial D$  par

$$\operatorname{flux}_{\partial D}(X) = \int_{\partial D} \langle X, N \rangle \sigma .$$

Comme  $\omega$  est une 3-forme différentielle, elle est nulle en restriction à tout sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace tangent en un point. En écrivant le champ de vecteurs  $X$  le long de  $\partial D$  comme somme d'un champ de vecteurs  $\langle X, N \rangle N$  colinéaire au champ normal  $N$  et d'un champ de vecteurs tangent à  $\partial D$ , on obtient  $j^*(i_X(dx \wedge dy \wedge dz)) = \langle X, N \rangle \sigma$ . La formule d'Ostrogradski pour le champ de vecteurs  $X$  s'écrit donc

$$\operatorname{flux}_{\partial D}(X) = \int_D (\operatorname{div} X) \, dx \, dy \, dz .$$

(3) Soit  $S$  un domaine à bord lisse, compact, d'une surface plongée dans  $\mathbb{R}^3$ , et  $C$  le bord de  $S$ . Soit  $X$  un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur (un voisinage ouvert de  $S$  dans)  $\mathbb{R}^3$ , et  $X^\perp$  la 1-forme différentielle (sur ce voisinage) définie avant l'exercice E.33. Alors  $d(X^\perp) = i_{\operatorname{rot} X}(dx \wedge dy \wedge dz)$  par cet exercice. La formule de Stokes donne donc

$$\int_C X^\perp = \int_S i_{\operatorname{rot} X}(dx \wedge dy \wedge dz) .$$

Cette formule est connue sous le nom de *formule d'Ampère-Stokes* (le flux du rotationnel du champ magnétique à travers n'importe quelle surface plongée de bord  $C$  est indépendant de cette surface).

- **Régularité.**

Concluons cette partie par une remarque sur la régularité. Dans le lemme 4.36, on peut prendre  $\omega$  de classe  $C^0$ , et  $\varphi$  un  $C^1$ -difféomorphisme. Les définitions d'orientation des variétés sont valables en classe  $C^1$ . La proposition 4.37 est vraie pour  $M$  de classe  $C^1$ , la forme volume  $\omega$  étant alors  $C^0$ , et unique à multiplication près par une fonction continue strictement positive. Les remarques (1), (2), (3), (4) suivant cette proposition sont valables en  $C^1$ , et la remarque (5) en  $C^2$ . La proposition 4.38 est vérifiée avec  $M$  de classe  $C^1$ , et les formes différentielles  $C^0$ , ainsi que les remarques

(1) à (6) qui suivent (en demandant une régularité  $C^1$  pour  $\varphi$  dans (4)). La définition de domaine à bord lisse et la proposition 4.39 sont valables en remplaçant  $C^\infty$  par  $C^1$ . La formule de Stokes est vraie au moins lorsque  $M$  et  $N$  sont  $C^2$ , et lorsque  $\omega$  est  $C^1$ . Pour les formules de Green-Riemann et d'Ostrogradski, des hypothèses de régularité  $C^1$  sur  $P, Q, R$  et  $C^1$  par morceaux sur le domaine  $D$  suffisent.

#### 4.4 Cohomologie à support compact

Soit  $M$  une variété  $C^\infty$  de dimension  $n \geq 0$ .

La différentielle extérieure  $d$  préserve la sous-algèbre (associative, mais pas unitaire si  $M$  est non compact) anticommutative, graduée  $\Omega_c(M)$  des formes différentielles à support compact dans  $M$ . Le noyau de

$$d : \Omega_c(M) \rightarrow \Omega_c(M)$$

est noté  $Z_c^*(M)$  et son image  $B_c^*(M)$ . On pose  $Z_c^p(M) = Z_c^*(M) \cap \Omega_c^p(M)$  et  $B_c^p(M) = B_c^*(M) \cap \Omega_c^p(M)$ . Alors  $Z_c^*(M)$  est une sous-algèbre de  $\Omega_c(M)$ , somme directe (en tant qu'espace vectoriel) des  $Z_c^p(M)$  pour  $p$  dans  $\mathbb{N}$ , et  $B_c^*(M)$  est un idéal bilatère de  $Z_c^*(M)$ , somme directe (en tant qu'espace vectoriel) des  $B_c^p(M)$  pour  $p$  dans  $\mathbb{N}$ .

Donc

$$H_c^*(M) = Z_c^*(M) / B_c^*(M)$$

est une algèbre (associative, mais pas unitaire si  $M$  est non compact) anticommutative, graduée par

$$H_c^*(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} H_c^p(M) ,$$

où

$$H_c^p(M) = Z_c^p(M) / B_c^p(M) .$$

L'algèbre  $H_c^*(M)$  s'appelle *l'algèbre* (ou parfois l'espace) *de cohomologie de de Rham à support compact* de  $M$ , et l'espace vectoriel réel  $H_c^p(M)$  le  $p$ -ème espace (ou parfois le  $p$ -ème groupe) de *cohomologie de de Rham à support compact* de  $M$ .

Comme  $\Omega_c^p(M) = \{0\}$  si  $p > n$  ou  $p < 0$ , on a  $H_c^p(M) = 0$  si  $p > n$  ou  $p < 0$ . Comme  $d : \Omega_c^{-1}(M) \rightarrow \Omega_c^0(M)$  est l'application nulle, on a  $H_c^0(M) = Z_c^0(M)$ .

**Remarques.** (1) Si  $M$  est compacte, alors  $\Omega_c(M) = \Omega(M)$ , donc  $H_c^*(M) = H^*(M)$ .

(2) Si  $M$  est la variété somme disjointe  $M = \coprod_{i \in I} M_i$ , comme une forme différentielle à support compact sur  $M$  ne rencontre qu'un nombre fini de composantes connexes de  $M$ , alors on a un isomorphisme naturel d'algèbres graduées

$$H_c^*(M) \simeq \bigoplus_{i \in I} H_c^*(M_i) ,$$

et des isomorphismes naturels d'espaces vectoriels  $H_c^p(M) \simeq \bigoplus_{i \in I} H_c^p(M_i)$  (noter le symbole somme et non plus produit).

(3) Une application constante non nulle est à support compact si et seulement si son domaine de définition est compact. Donc, si  $\pi_{0,c}M$  est l'ensemble des composantes connexes compactes de  $M$ , alors

$$H_c^0(M) \simeq \mathbb{R}^{(\pi_{0,c}M)} .$$

(Si  $E$  est un ensemble, on ne confondra pas l'espace vectoriel produit  $\mathbb{R}^E$  et l'espace vectoriel somme  $\mathbb{R}^{(E)}$  des applications  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  ne prenant une valeur non nulle qu'en un nombre fini d'éléments de  $E$  : toutefois  $\mathbb{R}^E$  et  $\mathbb{R}^{(E)}$  coïncident si  $E$  est fini.)

En particulier  $H_c^0(M) = \{0\}$  si  $M$  est connexe non compacte.

Rappelons (voir l'appendice A.1) qu'une application entre deux espaces topologiques localement compacts est propre si l'image réciproque de tout compact est compacte.

Soient  $N$  une variété  $C^\infty$  et  $f : M \rightarrow N$  une application  $C^\infty$  propre. Comme le support de  $f^*\omega$  est l'image réciproque par  $f$  du support de  $\omega$ , on a

$$f^*(\Omega_c(N)) \subset \Omega_c(M) .$$

Comme  $f^* \circ d = d \circ f^*$ , on a

$$f^*(Z_c^*(N)) \subset Z_c^*(M) \quad \text{et} \quad f^*(B_c^*(N)) \subset B_c^*(M) .$$

Donc le morphisme d'algèbres graduées  $f^* : \Omega_c(N) \rightarrow \Omega_c(M)$  induit un morphisme d'algèbres graduées, encore noté  $f^*$ , entre les algèbres de cohomologie de de Rham à support compact de  $N$  et de  $M$  :

$$\begin{array}{ccc} f^* : H_c^*(N) & \longrightarrow & H_c^*(M) \\ [\alpha] & \longmapsto & [f^*\alpha] \end{array} .$$

Comme pour les images réciproques des formes différentielles, on a  $\text{id}^* = \text{id}$ , et si  $P$  est une variété  $C^\infty$  et  $g : N \rightarrow P$  est une application  $C^\infty$  propre, alors

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* .$$

Donc l'association  $H_{\text{DR},c}^*$ , à une variété  $M$  de l'algèbre  $H_c^*(M)$ , et à une application  $f : M \rightarrow N$  du morphisme  $f^* : H_c^*(N) \rightarrow H_c^*(M)$  est un foncteur contravariant de la catégorie des variétés  $C^\infty$  et des applications  $C^\infty$  propres, dans la catégorie des algèbres graduées (associatives, mais pas forcément unitaires) anticommutatives. En particulier, si  $f : M \rightarrow N$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme, alors  $f^* : H_c^*(N) \rightarrow H_c^*(M)$  est un isomorphisme d'algèbres graduées, et

$$(f^*)^{-1} = (f^{-1})^* .$$

**Porisme 4.42** *Si deux variétés  $C^\infty$  sont  $C^\infty$ -difféomorphes, alors leurs algèbres graduées de cohomologie de de Rham à support compact sont isomorphes.*  $\square$

• **Invariance par homotopie.**

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés  $C^\infty$ , et  $f$  et  $g$  deux applications  $C^\infty$  propres de  $M$  dans  $N$ .

Les applications  $f$  et  $g$  sont dites *proprement différentiablement homotopes* s'il existe  $h : M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ , une homotopie  $C^\infty$  de  $f$  à  $g$ , qui est propre en restriction à  $M \times [0, 1]$ . La relation « être proprement différentiablement homotopes » est une relation d'équivalence.

**Théorème 4.43** *Si  $f$  et  $g$  sont deux applications  $C^\infty$  proprement différentiablement homotopes, alors  $f^* = g^* : H_c^*(N) \rightarrow H_c^*(M)$ .*

Comme dans la démonstration du théorème 4.14, ce résultat découle de la proposition suivante. Notons  $\Omega_\kappa(M \times \mathbb{R})$  la sous-algèbre des formes différentielles sur  $M \times \mathbb{R}$  dont la projection du support sur  $M$  est compacte.

**Proposition 4.44** *Il existe une application  $K : \Omega_\kappa(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_c(M)$  linéaire, graduée de degré  $-1$ , c'est-à-dire  $K(\Omega_\kappa^p(M \times \mathbb{R})) \subset \Omega_c^{p-1}(M)$ , telle que*

$$d \circ K + K \circ d = J_1^* - J_0^* .$$

La démonstration de ce résultat est analogue à celle de la proposition 4.15, en prenant  $U$  un ouvert relativement compact de  $\mathbb{R}^n$  et  $(U_i)_{i \in I}$  des ouverts relativement compacts de  $M$ .

Le théorème d'approximation 4.16 de fonctions continues par des applications  $C^\infty$  s'étend aux applications propres.

**Théorème 4.45** (1) *Toute application continue propre de  $M$  dans  $N$  est proprement homotope (au sens de l'appendice A.4) à une application  $C^\infty$  propre de  $M$  dans  $N$ .*

(2) *Deux applications  $C^\infty$  propres de  $M$  dans  $N$ , qui sont proprement homotopes, sont proprement différentiablement homotopes.*

**Démonstration.** Voir par exemple [God].  $\square$

Soit  $f : M \rightarrow N$  une application continue propre. Si  $\bar{f} : M \rightarrow N$  est une application  $C^\infty$  propre, proprement homotope à  $f$ , alors l'application  $\bar{f}^* : H_c^*(N) \rightarrow H_c^*(M)$  ne dépend pas du choix de  $\bar{f}$ , et sera notée

$$f^* : H_c^*(N) \rightarrow H_c^*(M) .$$

Si  $f$  et  $g$  sont deux applications continues propres, alors on a encore

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* .$$

Ceci montre l'invariance topologique de l'algèbre de cohomologie de de Rham : si deux variétés  $C^\infty$  sont homéomorphes, alors leurs algèbres graduées de cohomologie de de Rham à support compact sont isomorphes.

• **Suite exacte de Mayer-Vietoris.**

La restriction à un ouvert de son domaine d'une forme différentielle à support compact n'est pas forcément à support compact. Par contre, les formes différentielles à support compact peuvent s'étendre par 0 sur un ouvert contenant leur domaine. Ceci explique le changement de sens dans la suite exacte de Mayer-Vietoris à support compact ci-dessous par rapport à la suite de Mayer-Vietoris précédente.

Soient  $M$  une variété  $C^\infty$ , et  $U, V$  deux ouverts de  $M$  recouvrant  $M$ . Notons alors  $\underline{i}_c : \Omega_c(U \cap V) \rightarrow \Omega_c(U)$ ,  $\underline{j}_c : \Omega_c(U \cap V) \rightarrow \Omega_c(V)$ ,  $i_c : \Omega_c(U) \rightarrow \Omega_c(M)$  et  $j_c : \Omega_c(V) \rightarrow \Omega_c(M)$  les applications d'extension par 0 des formes différentielles à support compact. Ces applications d'extension commutent avec les différentielles extérieures, donc envoient formes fermées sur formes fermées, et formes exactes sur formes exactes. On note

$$I : \Omega_c(U \cap V) \rightarrow \Omega_c(U) \times \Omega_c(V)$$

l'application  $\omega \mapsto (\underline{i}_c \omega, \underline{j}_c \omega)$ , et  $I^*$  l'application  $H_c^*(U \cap V) \rightarrow H_c^*(U) \times H_c^*(V)$  induite en cohomologie à support compact. On note

$$J : \Omega_c(U) \times \Omega_c(V) \rightarrow \Omega_c(M)$$

l'application  $(\omega, \omega') \mapsto i_c \omega - j_c \omega'$ , et  $J^*$  l'application  $H_c^*(U) \times H_c^*(V) \rightarrow H_c^*(M)$  induite en cohomologie à support compact.

**Théorème 4.46** *La suite*

$$0 \rightarrow \Omega_c(U \cap V) \xrightarrow{I} \Omega_c(U) \times \Omega_c(V) \xrightarrow{J} \Omega_c(M) \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte de complexes de cochaînes, qui induit une suite exacte longue d'espaces vectoriels réels, dite suite exacte de Mayer-Vietoris à support compact de  $M$ ,

$$\dots \rightarrow H_c^{k-1}(M) \xrightarrow{\delta} H_c^k(U \cap V) \xrightarrow{I^*} H_c^k(U) \times H_c^k(V) \xrightarrow{J^*} H_c^k(M) \xrightarrow{\delta} H_c^{k+1}(U \cap V) \rightarrow \dots$$

**Démonstration.** L'application linéaire  $I$  est injective, car  $\underline{i}_c$  l'est. On a  $J \circ I = 0$ , car  $i_c \circ \underline{i}_c = j_c \circ \underline{j}_c$ . Si  $(\omega, \omega') \in \Omega_c(U) \times \Omega_c(V)$  vérifie  $J(\omega, \omega') = 0$ , alors  $\omega$  est nulle en dehors du support de  $\omega'$ ,  $\omega'$  est nulle en dehors du support de  $\omega$ , et  $\omega = -\omega'$  sur l'intersection des supports de  $\omega$  et de  $\omega'$ , qui est un compact de  $U \cap V$ . Donc  $(\omega, \omega') = I(\omega'')$  où  $\omega''$  est la restriction de  $\omega = -\omega'$  sur  $U \cap V$ . Enfin, l'application linéaire  $J$  est surjective, car si  $\{\varphi, \psi\}$  est une partition de l'unité  $C^\infty$  subordonnée au recouvrement  $\{U, V\}$  (voir la proposition 1.9), si  $\omega \in \Omega_c(M)$ , alors  $(\varphi\omega)|_U \in \Omega_c(U)$ ,  $(\psi\omega)|_V \in \Omega_c(V)$  et

$$J((\varphi\omega)|_U, (\psi\omega)|_V) = \varphi\omega + \psi\omega = \omega.$$

La dernière assertion du théorème découle de la première, comme dans la démonstration du théorème 4.19.  $\square$

Le résultat suivant se démontre alors exactement comme le corollaire 4.21.

**Porisme 4.47** *Soit  $M$  une variété  $C^\infty$ , munie d'un recouvrement ouvert  $\{U, V\}$ . Si les espaces vectoriels  $H_c^*(U)$ ,  $H_c^*(V)$  et  $H_c^*(U \cap V)$  sont de dimension finie, alors  $H_c^*(M)$  est de dimension finie.*  $\square$

## 4.5 Dualité de Poincaré

Nous commençons cette partie par un cas particulier du théorème de dualité de Poincaré, qui sera utile pour sa démonstration.

**Lemme 4.48** *Pour tout  $n \geq 1$ , l'intégration  $\int_{\mathbb{R}^n} : \Omega_c^n(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  induit un isomorphisme linéaire*

$$H_c^n(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}$$

défini par

$$[\omega] \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \omega,$$

et on a

$$H_c^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Démonstration.** Cette application est bien définie par le corollaire 4.41. La linéarité et la surjectivité sont immédiates. Soit  $\omega \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ . Montrons que  $\omega$  est exacte si et seulement si  $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$ . Ceci implique que l'application  $[\omega] \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \omega$  est injective.

Toute  $n$ -forme différentielle sur  $\mathbb{R}^n$  s'écrit

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Toute  $(n-1)$ -forme différentielle sur  $\mathbb{R}^n$  s'écrit

$$\eta = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n,$$

et sa différentielle est

$$d\eta = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Il suffit donc de montrer que pour toute application  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  telle que  $\int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n = 0$ , pour tout  $i$ , il existe  $f_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  tels que  $f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ .

Pour cela, on raisonne par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 1$ , il suffit de poser  $f_1(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ , qui est bien nulle au voisinage de  $\pm\infty$ .

Supposons le résultat vrai pour  $n-1$ . Posons

$$g(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_{n-1}, t) dt.$$

Alors  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$  et par le théorème de Fubini,  $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g dx_1 \dots dx_{n-1} = 0$ . Donc par l'hypothèse de récurrence, il existe  $g_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$  tels que  $g = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial g_i}{\partial x_i}$ . Soit

$\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  tel que  $\int_{\mathbb{R}} \rho = 1$ . Posons  $f_i(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = g_i(x_1, \dots, x_{n-1})\rho(x_n)$  pour  $1 \leq i \leq n-1$  et

$$f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} (f(x_1, \dots, x_{n-1}, t) - g(x_1, \dots, x_{n-1})\rho(t)) dt.$$

On vérifie que les  $f_i$  sont  $C^\infty$  à support compact sur  $\mathbb{R}^n$ , et que  $f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ . La première affirmation du lemme 4.48 en découle.

Maintenant, le calcul de  $H_c^k(\mathbb{R}^n)$  est connu pour  $k \leq 0$  et  $k \geq n$ . On peut donc supposer  $1 \leq k \leq n-1$ . On identifie  $\mathbb{R}^n$  (par la projection stéréographique, par exemple) avec le complémentaire dans la sphère  $\mathbb{S}_n$  du pôle nord  $N$ . Alors les formes différentielles à support compact sur  $\mathbb{R}^n$  s'identifient avec les formes différentielles sur  $\mathbb{S}_n$  nulles au voisinage de  $N$ , ceci de manière compatible avec les différentielles extérieures. Si  $\alpha \in \Omega_c^k(\mathbb{R}^n)$  est fermée, par le calcul des groupes de cohomologie de de Rham de  $\mathbb{S}_n$ , il existe une  $(k-1)$ -forme différentielle  $\beta$  sur  $\mathbb{S}_n$ , telle que  $d\beta = \alpha$ . En particulier,  $d\beta = 0$  au voisinage de  $N$ . Si  $k=1$ , alors  $\beta$  est une fonction constante égale à  $c$  sur un voisinage de  $N$ , et  $\alpha = d(\beta - c)$ , avec  $\beta - c$  une  $(k-1)$ -forme différentielle nulle sur un voisinage de  $N$ . Si  $k \geq 2$ , il existe donc, sur un voisinage ouvert  $U$  de  $N$  homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ , une  $(k-2)$ -forme différentielle  $\gamma$  sur  $U$  telle que  $\beta|_U = d\gamma$ . À l'aide d'une fonction plateau, on construit une forme différentielle  $\gamma'$  sur  $\mathbb{S}_n$  telle que  $\gamma'$  et  $\gamma$  coïncident au voisinage de  $N$ . Alors  $\beta - d\gamma'$  est nulle au voisinage de l'infini, donc définit un élément de  $\Omega_c^{k-1}(\mathbb{R}^n)$  tel que  $\alpha = d(\beta - d\gamma')$ .  $\square$

Soit  $M$  une variété  $C^\infty$  de dimension  $n \geq 1$ . Un recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $M$  est dit à *intersections cellulaires* si pour toute partie  $J$  de  $I$ , l'intersection  $\bigcap_{j \in J} U_j$  est vide ou homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ .

Le résultat technique suivant sera bien utile.

**Proposition 4.49** *Toute variété  $C^\infty$  compacte  $M$  admet au moins un recouvrement ouvert fini à intersections cellulaires.*

**Démonstration.** Soit  $x \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_x$  une application qui à un point  $x$  de  $M$  associe un produit scalaire sur  $T_x M$ , telle que, pour tous les champs de vecteurs  $X, Y$  de classe  $C^\infty$  sur  $M$ , l'application  $x \mapsto \langle X(x), Y(x) \rangle_x$  soit  $C^\infty$ . (Une telle application est une section  $C^\infty$  du fibré  $C^\infty$  des formes bilinéaires symétriques sur les espaces tangents de  $M$ , que l'on construit comme le fibré des formes alternées sur les espaces tangents de  $M$  (voir le paragraphe 2.7), et qui de plus est définie positive sur chaque espace tangent). L'existence d'une telle application est immédiate sur une carte locale, et par partition de l'unité, l'existence globale en découle. Une autre manière est de plonger  $M$  dans  $\mathbb{R}^m$  pour  $m$  assez grand (voir le théorème 1.19) et de prendre pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$  la restriction à  $T_x M$  du produit scalaire de  $\mathbb{R}^m$ . Nous noterons  $\|v\|_x = \langle v, v \rangle_x$  la norme associée sur  $T_x M$ .

Pour toute courbe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  de classe  $C^1$  par morceaux, posons

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)} dt.$$

Pour tous  $x, y$  dans  $M$ , notons  $d(x, y)$  la borne inférieure des  $\ell(\gamma)$  pour  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  une courbe de classe  $C^1$  par morceaux entre  $x$  et  $y$ . Alors  $d$  vérifie l'inégalité triangulaire, et est symétrique. De plus, par continuité du produit scalaire,  $d$  ne s'annule que sur la diagonale de  $M \times M$ . Donc  $d$  est une distance.

Pour toute carte locale  $(U, \varphi)$  de  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , et tout dans  $U$ , si  $\epsilon > 0$  est assez petit, alors, par convexité stricte des boules d'un produit scalaire sur un espace vectoriel réel de dimension finie, et par un argument de continuité, l'image  $\varphi(B(x, \epsilon))$  est un convexe de  $\mathbb{R}^n$ . Comme l'intersection de convexes est un convexe, un argument de compacité permet alors de conclure.  $\square$

**Proposition 4.50** *Soit  $M$  une variété  $C^\infty$ , admettant un recouvrement ouvert fini à intersections cellulaires. Alors l'algèbre de cohomologie de de Rham de  $M$  est de dimension finie, et l'algèbre de cohomologie de de Rham à support compact de  $M$  est de dimension finie.*

**Démonstration.** Notons que l'algèbre de cohomologie de de Rham de  $\mathbb{R}^n$ , qui est  $\mathbb{R}$ , est de dimension finie. Par récurrence sur le cardinal d'un tel recouvrement, la première assertion découle du lemme 4.21. La même démonstration fournit la seconde assertion, en utilisant cette fois le lemme 4.48 qui implique que l'algèbre de cohomologie de de Rham à support compact de  $\mathbb{R}^n$  est de dimension finie, ainsi que le corollaire 4.47.  $\square$

Par exemple, si  $M$  est compacte, alors les deux propositions précédentes impliquent que l'espace vectoriel réel  $H^*(M) = H_c^*(M)$  est de dimension finie.

Rappelons que si  $E$  est un espace vectoriel réel, alors  $E^*$  ou  $\tilde{E}$  désigne le dual de  $E$ .

**Théorème 4.51 (Dualité de Poincaré)** *Soit  $M$  une variété orientée  $C^\infty$  de dimension  $n \geq 1$ , admettant un recouvrement ouvert fini à intersections cellulaires. Alors pour  $0 \leq k \leq n$ , l'application*

$$\Omega^k(M) \rightarrow \Omega_c^{n-k}(M)^*,$$

définie par

$$\alpha \mapsto \left\{ \beta \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta \right\},$$

induit un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\mathcal{P}_M : H^k(M) \rightarrow H_c^{n-k}(M)^*.$$

**Démonstration.** Le fait que l'application  $\alpha \mapsto \left\{ \beta \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta \right\}$  induise une telle application  $\mathcal{P}_M$  vient du fait que si  $\alpha$  et  $\beta$  sont fermées, alors la valeur de cette intégrale est inchangée si on remplace  $\alpha$  par  $\alpha + d\alpha'$  et  $\beta$  par  $\beta + d\beta'$ , par la formule

de la différentielle extérieure du produit extérieur de deux formes différentielles, ainsi que par le corollaire 4.41 (car  $\beta$  et  $\beta'$  sont à support compacts) :

$$\begin{aligned} \int_M (\alpha + d\alpha') \wedge (\beta + d\beta') &= \int_M \alpha \wedge \beta + \int_M d(\alpha' \wedge (\beta + d\beta')) \pm \int_M d((\alpha + d\alpha') \wedge \beta') \\ &= \int_M \alpha \wedge \beta . \end{aligned}$$

La linéarité est immédiate.

Pour montrer que  $\mathcal{P}_M$  est un isomorphisme, on raisonne par récurrence sur le cardinal  $p$  d'un recouvrement ouvert  $(U_i)_{1 \leq i \leq p}$  fini à intersections cellulaires. Si  $p = 1$ , le résultat découle du lemme 4.48 (et de l'invariance par homéomorphismes de la cohomologie de de Rham).

On pose  $U = U_p$ ,  $V = U_1 \cup \dots \cup U_{p-1}$ . Ainsi  $\{U, V\}$  est un recouvrement ouvert de  $M$ , et  $U, V, U \cap V = \bigcup_{i=1}^{p-1} (U_i \cap U_p)$  sont des variétés  $C^\infty$  orientées, admettant un recouvrement ouvert fini à intersections cellulaires, de cardinal inférieur ou égal à  $p - 1$ . Considérons le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccc} H^{k-1}(U) \times H^{k-1}(V) & \longrightarrow & H^{k-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\delta} & H^k(M) & \longrightarrow \\ \downarrow \mathcal{P}_U \times \mathcal{P}_V & & \downarrow \mathcal{P}_{U \cap V} & & \downarrow \mathcal{P}_M & \\ H_c^{n-k+1}(U)^* \times H_c^{n-k+1}(V)^* & \longrightarrow & H_c^{n-k+1}(U \cap V)^* & \xrightarrow{t\delta} & H_c^{n-k}(M)^* & \longrightarrow \\ & & & & & \\ \longrightarrow & H^k(U) \times H^k(V) & \longrightarrow & H^k(U \cap V) & & \\ & \downarrow \mathcal{P}_U \times \mathcal{P}_V & & \downarrow \mathcal{P}_{U \cap V} & & \\ \longrightarrow & H_c^{n-k}(U)^* \times H_c^{n-k}(V)^* & \longrightarrow & H_c^{n-k}(U \cap V)^* & & \end{array}$$

Tous les espaces vectoriels sont de dimension finie par la proposition 4.50. La première ligne est la suite exacte de Mayer-Vietoris de  $M$  pour le recouvrement ouvert  $\{U, V\}$ . La seconde ligne est la suite duale de la suite exacte de Mayer-Vietoris à support compact de  $M$  pour le recouvrement ouvert  $\{U, V\}$ , où l'on identifie de manière usuelle  $\check{E} \times \check{F}$  au dual de  $E \times F$ , par l'application qui à  $(f, g)$  associe  $(x, y) \mapsto f(x) + g(y)$ . En particulier,  ${}^t\delta$  est l'opérateur dual de  $\delta : H_c^{n-k}(M) \rightarrow H_c^{n-k+1}(U \cap V)$ . La seconde ligne est exacte, car prendre le dual préserve l'exactitude des suites d'espaces vectoriels.

On vérifie facilement que le diagramme est commutatif, sauf peut-être la relation

$$\mathcal{P}_M \circ \delta = {}^t\delta \circ \mathcal{P}_{U \cap V} ,$$

qui se montre ainsi. Par définition des opérateurs  $\delta$  (voir la démonstration de la proposition A.21 de l'appendice A.6), si  $z \in Z^{k-1}(U \cap V)$ , on a  $\delta[z] = [x]$  où  $x \in Z^k(M)$  et il existe  $(y, y') \in \Omega^{k-1}(U) \times \Omega^{k-1}(V)$  tels que  $y|_{U \cap V} - y'|_{U \cap V} = z$  et  $(x|_U, x|_V) = (dy, dy')$ . De plus, si  $\gamma \in Z_c^{n-k}(M)$ , on a  $\delta[\gamma] = [\alpha]$  où  $\alpha \in Z^{n-k+1}(U \cap V)$  et il existe  $(\beta, \beta') \in \Omega_c^{n-k}(U) \times \Omega_c^{n-k}(V)$  tels que, on notant  $\bar{\omega}^W$  l'extension par 0 à un ouvert  $W$ , on ait  $\bar{\beta}^M - \bar{\beta}'^M = \gamma$  et  $(\bar{\alpha}^U, \bar{\alpha}^V) = (d\beta, d\beta')$ . La relation de commutation

cherchée découle alors du calcul suivant, où les notations sont les précédentes, et la troisième égalité découle de la formule de Stokes (plus précisément du corollaire 4.41) :

$$\begin{aligned} \int_{U \cap V} z \wedge \alpha &= \int_U y \wedge \bar{\alpha}^U - \int_V y' \wedge \bar{\alpha}^V = \int_U y \wedge d\beta - \int_V y' \wedge d\beta' = \\ \int_U dy \wedge \beta - \int_V dy' \wedge \beta' &= \int_M x \wedge \bar{\beta}^M - \int_M x \wedge \bar{\beta}'^M = \int_M x \wedge \gamma . \end{aligned}$$

Par récurrence, le théorème découle alors du lemme des cinq (voir l'exercice E.66 de l'appendice A.6).  $\square$

**Porisme 4.52** Soit  $M$  une variété  $C^\infty$  de dimension  $n \geq 1$ , compacte et orientée. Alors pour  $0 \leq k \leq n$ , l'application

$$H^k(M) \rightarrow H^{n-k}(M)^*$$

définie par

$$[\alpha] \mapsto \left\{ [\beta] \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta \right\} ,$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

**Démonstration.** Ce résultat découle du théorème 4.51, par la proposition 4.49.  $\square$

**Porisme 4.53** Soit  $M$  une variété  $C^\infty$  compacte orientable de dimension  $n \geq 1$ . Alors les espaces vectoriels réels  $H^k(M)$  et  $H^{n-k}(M)$  ont même dimension.

Si  $n$  est impair, alors la caractéristique d'Euler  $\chi(M)$  est nulle.

**Démonstration.** La première assertion découle du fait qu'un espace vectoriel et son dual ont la même dimension. Si  $n = 2k + 1$ , alors

$$\sum_{i=0}^{2k+1} (-1)^i \dim H^i(M) = \sum_{i=0}^k (-1)^i (\dim H^i(M) - \dim H^{2k+1-i}(M)) = 0 . \quad \square$$

**Porisme 4.54** Si  $M$  est une variété  $C^\infty$  compacte connexe orientée de dimension  $n \geq 1$ , alors l'application

$$H^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$[\omega] \mapsto \int_M \omega$$

est un isomorphisme linéaire.

**Démonstration.** En effet,  $H^0(M) = \mathbb{R}$ , et on applique le corollaire précédent pour  $k = 0$ .  $\square$

Par exemple, si  $M$  est une surface compacte connexe, somme connexe de  $g \geq 1$  tores  $\mathbb{T}^2$ , alors  $H^2(M) \simeq \mathbb{R}$ .

Ce résultat 4.54 reste valable, en remplaçant  $H^n(M)$  par  $H_c^n(M)$  lorsque  $M$  n'est pas supposée compacte (voir par exemple [God]). Dans le cas non orientable, le résultat change complètement :

**Proposition 4.55** *Si  $M$  est une variété  $C^\infty$  connexe non orientable de dimension  $n \geq 1$ , alors*

$$H_c^n(M) = \{0\}.$$

**Démonstration.** Soit  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$  le revêtement à deux feuillets d'orientation de  $M$ , et  $\sigma : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$  l'isomorphisme de revêtements non trivial (voir l'exercice E.37). La variété  $\widetilde{M}$  est orientable, connexe et  $\sigma$  renverse l'orientation.

Si  $\omega \in \Omega_c^n(M)$ , alors  $\tilde{\omega} = \pi^*\omega \in \Omega_c^n(\widetilde{M})$  vérifie  $\sigma^*\tilde{\omega} = -\tilde{\omega}$ . Donc, en munissant  $\widetilde{M}$  d'une orientation quelconque,

$$\int_{\widetilde{M}} \tilde{\omega} = \int_{\widetilde{M}} \sigma^*\tilde{\omega} = - \int_{\widetilde{M}} \tilde{\omega}.$$

Donc  $\int_{\widetilde{M}} \tilde{\omega} = 0$  et  $\tilde{\omega}$  est exacte, par le corollaire précédent. Soit  $\tilde{\alpha} \in \Omega_c^{n-1}(\widetilde{M})$  tel que  $\tilde{\omega} = d\tilde{\alpha}$ . Alors  $\frac{1}{2}(\tilde{\alpha} + \sigma^*\tilde{\alpha})$  est une  $(n-1)$ -forme différentielle sur  $\widetilde{M}$ , invariante par  $\sigma$ , dont la différentielle coïncide avec  $\tilde{\omega}$ . Elle définit donc une forme différentielle  $\alpha$  sur  $M$ , telle que  $\pi^*\alpha = \tilde{\alpha}$ . Alors  $\omega = d\alpha$ , car  $\pi$  est un difféomorphisme local, ce qui montre le résultat.  $\square$

Par conséquent, si  $M$  est une variété  $C^\infty$  compacte connexe non orientable de dimension  $n \geq 1$ , alors

$$H^n(M) = \{0\}.$$

### • Cohomologie de de Rham des espaces projectifs réels.

**Proposition 4.56** *Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}$ . Les espaces de cohomologie de de Rham de l'espace projectif réel  $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  sont*

$$H_{\text{DR}}^k(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, \text{ ou si } k = n \text{ avec } n \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, sa caractéristique d'Euler est 1 si  $n$  est pair, et 0 sinon.

**Démonstration.** Rappelons que  $\mathbb{P}_0(\mathbb{R})$  est réduit à un point, que la variété  $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$  est  $C^\infty$ -difféomorphe au cercle  $\mathbb{S}_1$ , et que  $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  est connexe et de dimension  $n$ . De plus, si  $n \geq 1$ , alors  $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  est orientable si et seulement si  $n$  est impair (voir l'exercice E.37 (3)), donc le corollaire 4.54 et la proposition 4.55 donnent la valeur

de  $H^n(\mathbb{P}_n(\mathbb{R}))$ . Nous pouvons donc supposer  $n \geq 2$  et  $1 \leq k \leq n-1$ . On raisonne par récurrence sur  $n$ . Supposons le résultat vrai pour  $n-1$ .

On munit l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{n+1}$  de ses coordonnées  $(x_0, \dots, x_n)$ , et on identifie  $\mathbb{R}^n$  avec l'hyperplan vectoriel d'équation  $x_0 = 0$ . Dans l'espace projectif réel  $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ , on considère le point  $x$  de coordonnées homogènes  $[1 : 0 : \dots : 0]$ , l'ouvert  $U = \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) - \{x\}$  et l'ouvert  $V = \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) - \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ . Nous avons vu (voir le paragraphe 1.4.3) que  $V$  est  $C^\infty$ -difféomorphe à  $\mathbb{R}^n$  (c'est le domaine d'une carte affine d'hyperplan à l'infini  $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ ), donc  $V$  a le même type d'homotopie que le point. De plus,  $U$  se rétracte par déformation forte sur  $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ , par l'homotopie  $([x_0 : x_1 : \dots : x_n], t) \mapsto [tx_0 : x_1 : \dots : x_n]$ , donc a le même type d'homotopie que  $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ . L'intersection  $U \cap V$  est  $C^\infty$ -difféomorphe à  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ , donc a le même type d'homotopie que la sphère  $\mathbb{S}_{n-1}$ .

La suite exacte de Mayer-Vietoris

$$\dots \rightarrow H^{k-1}(U \cap V) \rightarrow H^k(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) \rightarrow H^k(U) \times H^k(V) \rightarrow H^k(U \cap V) \rightarrow \dots$$

donne donc des suites exactes

$$H^0(U) \times H^0(V) \rightarrow H^0(U \cap V) \rightarrow H^1(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) \rightarrow H^1(\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})) \rightarrow H^1(\mathbb{S}_{n-1}) \rightarrow H^2(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})),$$

$$0 \rightarrow H^{n-1}(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) \rightarrow H^{n-1}(\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})) \rightarrow H^{n-1}(\mathbb{S}_{n-1}) \rightarrow H^n(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) \rightarrow 0,$$

et, pour  $1 < k < n-1$ ,

$$0 \rightarrow H^k(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) \rightarrow H^k(\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})) \rightarrow 0.$$

Comme l'application  $H^0(U) \times H^0(V) \rightarrow H^0(U \cap V)$  est surjective (voir la remarque (2) suivant la proposition 4.20), la première équation donne  $H^1(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = 0$  (en distinguant les cas  $n = 2$  et  $n > 2$ ). La seconde équation donne  $H^{n-1}(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = 0$  pour  $n > 2$  (en distinguant les cas  $n$  pair et  $n$  impair). Par récurrence, la dernière équation donne  $H^k(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = 0$  pour  $1 < k < n-1$ . Le résultat s'en déduit.  $\square$

## 4.6 Théorie du degré

### 4.6.1 Degré d'une application entre variétés de même dimension.

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés orientées  $C^\infty$  compactes de dimension  $n \geq 1$ , avec  $N$  connexe, et  $f : M \rightarrow N$  une application continue.

Nous appellerons *degré* de  $f$ , et noterons  $\deg f$ , le nombre réel  $r$  tel que, pour  $m_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application de multiplication par  $r$ , le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^n(N) & \xrightarrow{f^*} & H^n(M) \\ f_N \downarrow & & \downarrow f_M \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{m_r} & \mathbb{R} \end{array}$$

Ce nombre existe par linéarité, et le fait que la flèche verticale de gauche soit un isomorphisme par connexité de  $N$ , voir le corollaire 4.54. Donc, par définition de  $f^*$ , si  $g$  est une application  $C^\infty$  homotope à  $f$ , alors

$$\deg f = \frac{\int_M g^* \omega}{\int_N \omega}$$

pour tout  $\omega \in \Omega^n(N)$  tel que  $\int_N \omega \neq 0$ .

**Remarques.** Le degré des applications vérifie les propriétés suivantes.

(1) *Le degré d'une application constante est nulle.* Si  $f$  est constante, alors  $\deg f = 0$ , car  $f^* : H^n(N) \rightarrow H^n(M)$  est l'application nulle, puisque  $n \geq 1$ .

Plus généralement, le degré d'une application continue non surjective  $f$  de  $M$  dans  $N$  est nul. En effet, soit  $\omega$  une forme différentielle à support compact contenu dans le complémentaire de l'image de  $f$ , telle que  $\int_N \omega = 1$  (qui existe, car ce complémentaire est un ouvert non vide de  $N$ , car  $M$  est compacte). Soit  $g : M \rightarrow N - \text{Supp } \omega$  une application  $C^\infty$  homotope à  $f$ . Alors  $\deg f = \int_M g^* \omega = 0$ .

(2) *Le degré dépend en général de l'orientation des variétés  $M$  et  $N$ .* Plus précisément, pour  $\epsilon$  dans  $\{\pm 1\}$  et  $P$  une variété orientée  $C^\infty$ , notons  $\epsilon P$  la variété orientée  $P$  si  $\epsilon = +1$ , et la variété  $P$  où chaque composante connexe de  $P$  est munie de l'orientation opposée si  $\epsilon = -1$ . Soient  $\epsilon, \epsilon'$  dans  $\{\pm 1\}$  et notons  $g$  l'application  $f$  de la variété orientée  $\epsilon M$  dans la variété orientée  $\epsilon' N$ . Alors par construction

$$\deg g = \epsilon \epsilon' \deg f .$$

Par exemple, si  $f$  est un  $C^\infty$ -difféomorphisme, alors  $\deg f$  vaut 1 si  $f$  préserve l'orientation, par la formule de changement de variable globale, et donc  $-1$  sinon (car alors  $f$  préserve l'orientation de  $M$  dans la variété orientée opposée de  $N$ ).

En particulier, comme l'antipodie  $-\text{id}$  de  $\mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$  renverse l'orientation si et seulement si  $n$  est pair, on en déduit que

$$\deg (-\text{id} : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n) = (-1)^{n-1} .$$

Remarquons aussi que si  $N = M$ , alors le degré de  $f$  ne dépend pas de l'orientation de  $M$  (à condition de prendre la même à la source et au but!).

(3) *Le degré est additif pour les sommes disjointes à la source.* Plus précisément, si  $M_1, \dots, M_k$  sont des variétés orientées  $C^\infty$  compactes de dimension  $n$ , en notant  $M' = \coprod_{1 \leq i \leq k} M_i$  la variété orientée somme disjointe, alors pour toute application continue  $f : M' \rightarrow N$ , on a

$$\deg f = \sum_{i=1}^k \deg f|_{M_i} .$$

En effet, si  $g : M \rightarrow N$  est une application  $C^\infty$  homotope à  $f$ , alors  $g|_{M_i}$  est  $C^\infty$  et homotope à  $f|_{M_i}$ , et pour tout  $\omega \in \Omega^n(N)$  tel que  $\int_N \omega = 1$ ,

$$\deg f = \int_{M'} g^* \omega = \sum_{i=1}^k \int_{M_i} (g|_{M_i})^* \omega = \sum_{i=1}^k \deg f|_{M_i} .$$

(4) *Le degré est invariant par homotopie.* Plus précisément, si  $g : M \rightarrow N$  est une application continue, qui est homotope à  $f$ , alors

$$\deg g = \deg f .$$

Ceci découle de l'invariance par homotopie de la cohomologie de de Rham.

Par exemple, si  $M = N$ , alors l'application  $\text{id} : M \rightarrow M$ , de degré 1, n'est pas homotope à une application continue non surjective (par exemple constante), qui est de degré 0.

**Porisme 4.57 (Théorème de non-peignage des sphères)** *Pour tout entier  $n \geq 1$ , tout champ de vecteurs continu sur la sphère  $\mathbb{S}_{2n}$  possède au moins un zéro.*

**Démonstration.** Sinon,  $\mathbb{S}_{2n}$  possède un champ de vecteurs  $X$  continu de norme 1. L'application  $h : \mathbb{S}_{2n} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}_{2n}$  définie par

$$(x, t) \mapsto (\cos \pi t) x + (\sin \pi t) X(x)$$

est une homotopie entre les applications  $\text{id}$  et  $-\text{id}$ , qui sont de degré 1 et  $(-1)^{2n-1}$  respectivement, contradiction.  $\square$

(5) *Le degré est invariant par cobordisme,* au sens suivant : si  $M$  est la variété orientée frontière d'un domaine à bord lisse  $D$  d'une variété  $C^\infty$  orientée  $P$ , si  $M$  est compacte, alors

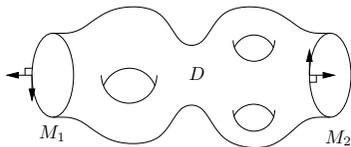
$$\deg f = 0 .$$

(Remarquons que  $M$  n'est pas forcément connexe, et qu'elle est orientée par la normale sortante). En effet, grâce à une partition de l'unité, on prolonge une application  $g : M \rightarrow N$  de classe  $C^\infty$  et homotope à  $f$  en une application  $g' : P \rightarrow N$  de classe  $C^\infty$ . En notant  $i : M = \partial D \rightarrow P$  l'inclusion, on a donc  $g' \circ i = g$ . D'où, pour tout  $\omega \in \Omega^n(N)$ , qui est en particulier fermée, on a par le théorème de Stokes,

$$\int_M g^* \omega = \int_M i^* (g')^* \omega = \int_D d((g')^* \omega) = \int_D (g')^* (d\omega) = 0 .$$

Par conséquent, si  $M_1, M_2$  sont les deux composantes connexes de la frontière d'un domaine  $D$  à bord lisse compact (orientées par la normale sortante) dans une variété  $C^\infty$ , si  $f_1 : M_1 \rightarrow N$  et  $f_2 : M_2 \rightarrow N$  sont deux applications continues, alors

$$\deg f_1 = -\deg f_2 .$$



La remarque (4) est un cas particulier de cette remarque, en prenant le domaine à bord lisse  $D = M \times [0, 1]$  dans  $M \times \mathbb{R}$ , et en faisant attention que les orientations par la normale sortante des deux composantes de bord de  $D$  donnent des orientations opposées sur  $M$  identifié d'une part à  $M \times \{0\}$ , de l'autre à  $M \times \{1\}$ .

(6) *Le degré est multiplicatif pour la composition.* Si  $P$  est une variété orientée  $C^\infty$  compacte connexe de dimension  $n \geq 1$ , et  $g : N \rightarrow P$  une application continue, alors

$$\deg(g \circ f) = (\deg f)(\deg g).$$

Ceci découle immédiatement du fait que  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ , et que  $m_{rr'} = m_{r'} \circ m_r$ .

En particulier, si  $M = N$  et si  $g : M \rightarrow P$  est un homéomorphisme, alors

$$\deg(g \circ f \circ g^{-1}) = \deg f.$$

Donnons maintenant un moyen pratique de calculer le degré d'une application, ce qui montrera aussi que le degré est un nombre entier.

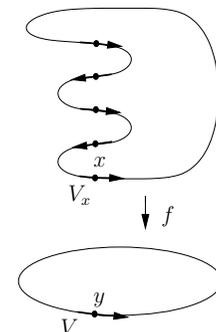
Rappelons que l'orientation d'une variété définit une orientation de l'espace tangent en tout point (voir la partie 4.3). Pour tout point  $x$  de  $M$  tel que l'application linéaire  $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  soit bijective (et il suffit, par égalité des dimensions, que  $f$  soit une immersion ou une submersion en  $x$ ), appelons *indice de  $f$  en  $x$* , et notons  $\text{Ind}(f, x)$ , le nombre  $+1$  si  $T_x f$  préserve l'orientation, et  $-1$  sinon.

**Théorème 4.58** *Soient  $M$  et  $N$  deux variétés orientées  $C^\infty$  compactes de dimension  $n \geq 1$ , avec  $N$  connexe, et  $f : M \rightarrow N$  une application de classe  $C^\infty$ . Si  $y \in N$  est une valeur régulière de  $f$ , alors*

$$\deg f = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{Ind}(f, x).$$

**Démonstration.** Si  $y$  est une valeur régulière, alors  $F = f^{-1}(y)$  est une sous-variété de dimension  $n - n = 0$  de  $M$ , donc est discrète, et comme  $M$  est compacte, la fibre  $F$  est finie. Pour tout  $x$  dans  $F$ , l'application  $f$  est une submersion en  $x$ , donc  $T_x f$  est bijective. Donc le membre de droite est bien défini (et appartient à  $\mathbb{Z}$ ).

Par le théorème d'inversion locale et par finitude de  $F$ , il existe un voisinage ouvert connexe  $V$  de  $y$ , que nous supposons contenu dans un domaine de carte de  $N$ , et, pour tout  $x$  dans  $F$ , un voisinage ouvert  $V_x$  de  $x$ , avec les  $V_x$  deux à deux disjoints, tels que  $f|_{V_x} : V_x \rightarrow V$  soit un  $C^\infty$ -difféomorphisme pour tout  $x$  dans  $F$ . Soit  $\omega \in \Omega^n(N)$  à support contenu dans  $V$  telle que  $\int_N \omega = 1$ , ce qui existe. Alors le support de  $f^* \omega$  est contenu dans  $f^{-1}(V)$ , qui est réunion disjointe des  $V_x$  pour  $x$  dans  $F$ .



Par le théorème de changement de variable local 4.36, on a

$$\begin{aligned} \deg f &= \int_M f^* \omega = \int_{f^{-1}(V)} f^* \omega = \sum_{x \in F} \int_{V_x} (f|_{V_x})^* \omega = \\ &= \sum_{x \in F} \text{Ind}(f, x) \int_V \omega = \sum_{x \in F} \text{Ind}(f, x). \quad \square \end{aligned}$$

Ce théorème est utilisable à cause du théorème de Sard, qui dit que l'ensemble des valeurs régulières de  $f$  est dense dans  $N$  (voir le théorème 1.21). Comme nous n'en avons pas donné de démonstration, en voici une adaptée à notre cas (voir le théorème 1.21 pour un énoncé plus général).

**Proposition 4.59 (Théorème de Sard)** *Soient  $M, N$  deux variétés  $C^1$  de même dimension  $n \geq 1$ , et  $f : M \rightarrow N$  une application  $C^1$ . L'ensemble des valeurs régulières de  $f$  est dense.*

**Démonstration.** En utilisant des cartes locales, il suffit de montrer le résultat lorsque  $M = U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $N = \mathbb{R}^n$ . Nous allons montrer que, pour  $C$  l'ensemble des points critiques, l'ensemble  $f(C)$  est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue  $\lambda$ , ce qui implique le résultat. Rappelons que la mesure de Lebesgue d'une boule de rayon  $r$  dans  $\mathbb{R}^n$  est  $\omega_n r^n$  où  $\omega_n > 0$  est une constante.

**Lemme 4.60** *Pour tout compact  $K$  dans  $U$ , il existe  $\delta > 0$  et  $\epsilon : [0, \delta] \rightarrow [0, +\infty[$  telle que  $\lim_{t \rightarrow 0} \epsilon(t) = 0$ , et, pour tous  $x, y$  dans  $K$  tels que  $\|x - y\| \leq \delta$ ,*

$$\|f(y) - f(x) - Df_x(y - x)\| \leq \epsilon(\|x - y\|) \|x - y\|.$$

**Démonstration.** On a  $f(y) - f(x) = \int_0^1 Df_{x+t(y-x)}(y - x) dt$ , donc

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x) - Df_x(y - x)\| &\leq \left\| \int_0^1 (Df_{x+t(y-x)}(y - x) - Df_x(y - x)) dt \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|Df_{x+t(y-x)} - Df_x\| dt \|x - y\|. \end{aligned}$$

D'où le résultat par uniforme continuité de  $Df$  sur  $K$ .  $\square$

Il suffit de montrer que  $f(C \cap B)$  est de mesure nulle, pour tout cube  $B$  de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $x \in C$ , alors  $Df_x$  n'est pas surjective, donc son image est contenue dans (au moins) un hyperplan  $H_x$  de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $r > 0$  et  $y \in U$  tel que  $\|y - x\| < r$ .

Par le lemme,  $d(f(y), f(x) + H_x) < r\epsilon(r)$ . Si  $K = \max_{x \in B} \|Df_x\|$ , alors  $\|f(y) - f(x)\| \leq Kr$ . Par conséquent,  $f(B(x, r))$  est contenue dans le cylindre dont la base est  $(f(x) + H_x) \cap B(f(x), Kr)$  et la hauteur  $2r\epsilon(r)$ . Ce cylindre est de mesure de Lebesgue  $2r\epsilon(r) \times \omega_{n-1}(Kr)^{n-1}$ . Si  $a$  est la longueur d'une arête du cube  $B$ , alors  $B$  est réunion de  $k^n$  cubes de longueurs d'arête  $a/k$ . Chacun de ces cubes rencontrant  $C$  est contenu dans une boule  $B(x, 2a\sqrt{n}/k)$  où  $x \in C$ . Donc

$$\lambda(f(C \cap B)) \leq 2k^n K^{n-1} \omega_{n-1} (2a\sqrt{n}/k)^n \epsilon(2a\sqrt{n}/k).$$

D'où le résultat en faisant tendre  $k$  vers  $+\infty$ .  $\square$

**Porisme 4.61** (1) Le degré de  $f$  est un élément de  $\mathbb{Z}$ .

(2) Le cardinal d'une fibre régulière est constant modulo 2.

(3) Si le degré de  $f$  est non nul, alors  $f$  est surjective.

En particulier, si  $f$  est homotope à une application non surjective, alors  $\deg f = 0$ .

(4) Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application  $C^\infty$  qui vaut l'identité au voisinage de l'infini (c'est-à-dire en dehors d'un compact), alors  $f$  est surjective.

(5) Si  $f$  est un revêtement à  $n$  feuilletés préservant l'orientation, alors

$$\deg f = n.$$

**Démonstration.** Par le théorème de Sard, l'application  $f$  admet au moins une valeur régulière. L'assertion (1) est alors immédiate à partir du théorème 4.58. Celui-ci montre aussi que si  $\deg f$  est non nul, alors l'image réciproque  $f^{-1}(y)$  de toute valeur régulière de  $f$  est non vide. Or tout élément de  $N$  qui n'est pas dans l'image de  $f$  est une valeur régulière de  $f$ , donc l'assertion (3) en découle.

L'assertion (2) est immédiate, car  $\deg f = \text{Card } f^{-1}(y) \pmod 2$  pour toute valeur régulière  $y$ , puisque  $1 = -1 \pmod 2$ .

En identifiant  $\mathbb{R}^n$  avec le complémentaire d'un point dans  $\mathbb{S}_n$  (par projection stéréographique), on prolonge  $f$  en une application  $g : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$  de classe  $C^\infty$ , valant l'identité au voisinage d'un point. Donc le théorème 4.58 appliqué en ce point (qui est régulier) montre que le degré de  $g$  vaut 1, donc est non nul. Par conséquent  $g$  est surjective par (3), donc  $f$  est surjective, ce qui montre (4).

La dernière assertion découle du fait que pour tout  $y$  dans  $N$ , le point  $y$  est une valeur régulière de  $f$ , d'image réciproque de cardinal  $n$ , en tout point de laquelle l'application tangente de  $f$  préserve l'orientation, par définition d'un  $C^\infty$ -difféomorphisme local préservant l'orientation.  $\square$

En particulier, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{Z}$ , l'application  $f : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$  définie par  $z = e^{i\theta} \mapsto z^n = e^{in\theta}$  est de degré  $n$ .

**Exercice E.38** Soit  $f \in \mathbb{C}(X)$  une fraction rationnelle à coefficients complexes, et  $Z$  l'ensemble (fini) des ses pôles. Nous identifions  $\mathbb{C}$  au domaine d'une carte affine de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  (voir partie 1.4.3), et nous notons  $\infty$  le point complémentaire.

(1) Montrer que  $f : \mathbb{C} - Z \rightarrow \mathbb{C}$  s'étend en une application holomorphe, donc  $C^\infty$ , de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  dans  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ , encore notée  $f$ .

(2) Montrer que si  $f$  est un polynôme non nul de degré  $d$ , alors

$$\deg f = d.$$

(Il n'y a donc pas de conflit notational. La condition de non nullité de  $f$  est nécessaire, car le degré d'une application constante est nul, alors que le degré du polynôme nul est  $-\infty$ .)

(3) Montrer que si  $f = P/Q$  avec  $P, Q$  deux polynômes non nuls premiers entre eux, alors

$$\deg f = [\mathbb{C}(X) : \mathbb{C}(f)] = \max\{\deg P, \deg Q\},$$

où  $[\mathbb{C}(X) : \mathbb{C}(f)]$  est le degré de l'extension  $\mathbb{C}(X)$  du sous-corps  $\mathbb{C}(f)$  engendré par  $f$ .

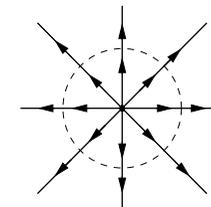
#### 4.6.2 Indice d'un champ de vecteurs en un zéro isolé.

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  où  $n \geq 2$ , et  $X \in \Gamma(TU) = C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$  un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $U$ . Si  $x \in U$  est un zéro isolé de  $X$ , définissons l'indice du champ de vecteurs  $X$  en  $x$  comme le degré de l'application de  $\mathbb{S}_{n-1}$  dans  $\mathbb{S}_{n-1}$  (orientée par la normale sortante de la boule) définie par

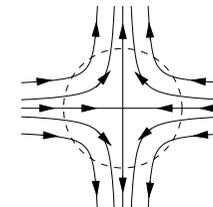
$$v \mapsto \frac{X(x + \epsilon v)}{\|X(x + \epsilon v)\|}$$

pour tout  $\epsilon > 0$  suffisamment petit (ce qui, par invariance du degré par homotopie, ne dépend pas d'un tel  $\epsilon$ ).

Soient  $M$  une variété  $C^\infty$  de dimension  $n \geq 2$ , et  $X \in \Gamma(TM)$  un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $M$ . Si  $x \in M$  est un zéro isolé de  $X$ , et si  $(U, \varphi)$  est une carte locale de  $M$  en  $x$ , définissons l'indice du champ de vecteurs  $X$  en  $x$ , que nous noterons  $\text{Ind}(X, x)$ , comme l'indice en  $\varphi(x)$  du champ de vecteurs  $X$  lu dans cette carte, c'est-à-dire du champ de vecteurs  $(\varphi^{-1})^*X$  sur l'ouvert  $\varphi(U)$ . Ceci ne dépend pas de la carte locale, par la remarque (6) précédente.



puits  
Ind = 1



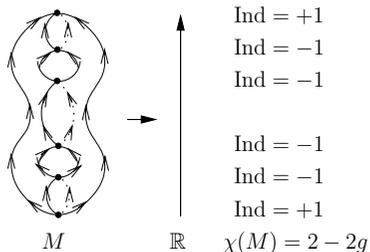
selle à  $2k$  branches  
Ind =  $1 - k$

Nous renvoyons par exemple à [Spi] pour une démonstration du théorème remarquable suivant.

**Théorème 4.62 (Théorème de Poincaré-Hopf)** Soient  $M$  une variété  $C^\infty$  compacte de dimension  $n \geq 2$ , et  $X \in \Gamma(TM)$  un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $M$ , dont l'ensemble des zéros  $Z$  est fini. Alors

$$\chi(M) = \sum_{x \in Z} \text{Ind}(X, x) . \quad \square$$

Par exemple, on retrouve facilement, en considérant le champ de vecteurs gradient d'une fonction hauteur sur une surface compacte connexe orientable de genre  $g$ , que sa caractéristique d'Euler est  $2 - 2g$ , car le champ de vecteurs ci-contre possède  $2g + 2$  zéros, dont un puits et une source, d'indice  $+1$ , et  $2g$  selles à quatre branches, d'indice  $-1$ .



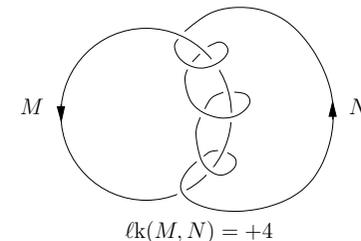
Ce résultat montre de nouveau que pour tout entier  $n \geq 1$ , tout champ de vecteurs  $C^\infty$  sur la sphère  $\mathbb{S}_{2n}$  possède au moins un zéro, car la caractéristique d'Euler de  $\mathbb{S}_{2n}$  vaut 2, qui est non nul.

Plus généralement, si  $\chi(M)$  est non nul, alors il n'existe pas de champ de vecteurs ne s'annulant pas sur  $M$ . Par exemple, parmi les surfaces compactes connexes orientables  $C^\infty$ , seul le tore est de caractéristique d'Euler non nulle, et il admet un champ de vecteurs ne s'annulant pas, comme on peut le voir en prenant pour le tore le quotient de  $\mathbb{R}^2$  par son sous-groupe discret  $\mathbb{Z}^2$ , et pour le champ de vecteurs, le champ de vecteurs quotient du champ de vecteurs  $\frac{\partial}{\partial x}$ .

### 4.6.3 Nombre d'enlacement.

Soient  $M$  et  $N$  des sous-variétés  $C^\infty$  orientées compactes disjointes, de dimension  $p$  et  $q$  respectivement, dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , avec  $p, q \geq 1$  et  $p + q = n$ . On appelle *nombre d'enlacement* de  $N$  et  $M$  dans  $\mathbb{R}^n$ , et on note  $\ell k(M, N)$ , le degré de l'application  $\psi_{M,N}$  de la variété orientée produit  $M \times N$  dans la variété orientée  $\mathbb{S}_n$  (par la normale sortante de la boule), définie par

$$\psi_{M,N} : (x, y) \mapsto \frac{y - x}{\|y - x\|} .$$



**Remarque.** Le nombre d'enlacement vérifie les propriétés suivantes :

(1) Il est additif par somme disjointe en  $M$  et en  $N$  : si  $M$  est la somme disjointe orientée de  $M_1, \dots, M_r$  et  $N$  est la somme disjointe orientée de  $N_1, \dots, N_s$ , alors la variété orientée produit  $M \times N$  est la somme disjointe orientée des variétés orientées produits  $M_i \times N_j$ , donc par l'additivité par somme connexe du degré, on a

$$\ell k(M, N) = \sum_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s} \ell k(M_i, N_j) .$$

(2) Il dépend en général de l'orientation de chaque composante connexe de  $M$  et de  $N$ . Avec les notations vues ci-dessus,

$$\ell k(\epsilon M, \epsilon' N) = \epsilon \epsilon' \ell k(M, N) .$$

(3) Il est antisymétrique en  $M$  et  $N$  :

$$\ell k(N, M) = (-1)^{(p+1)(q+1)} \ell k(M, N) .$$

En particulier, si  $p$  ou  $q$  est impair, alors  $\ell k(N, M) = \ell k(M, N)$ .

En effet, si  $\sigma : (x, y) \mapsto (y, x)$  est l'application d'échange de  $M \times N$  dans  $N \times M$ , alors son degré est  $(-1)^{pq}$  et le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\psi_{M,N}} & \mathbb{S}_n \\ \sigma \downarrow & & \downarrow -\text{id} \\ N \times M & \xrightarrow{\psi_{N,M}} & \mathbb{S}_n \end{array} .$$

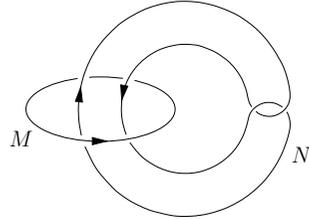
Comme l'antipodie de  $\mathbb{S}_n$  est de degré  $(-1)^{n+1}$ , le résultat découle alors de la remarque (5) précédente.

(4) S'il existe un hyperplan affine séparant  $M$  de  $N$ , alors

$$\ell k(M, N) = 0 .$$

En effet, l'application  $\psi_{M,N}$  n'est alors pas surjective.

La réciproque est fautive, par exemple, dans l'entrelac de *Whitehead* ci-contre, le nombre d'enlacement des deux nœuds  $M$  et  $N$  est nul, mais on ne peut pas disjoindre l'un de l'autre.



(5) Le nombre d'enlacement est invariant par isotopie. Plus précisément, s'il existe des applications continues  $f : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g : N \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  telles que, en notant  $f_t : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'application définie par  $f_t(x) = f(x, t)$  et  $g_t : N \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'application définie par  $g_t(x) = g(x, t)$ , les applications  $f_0, g_0, f_1, g_1$  soient des plongements  $C^\infty$ , et que pour tout  $t$ , les images de  $f_t$  et de  $g_t$  soient disjointes, alors

$$\text{lk}(f_0(M), g_0(N)) = \text{lk}(f_1(M), g_1(N)).$$

En effet, l'application

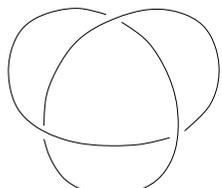
$$(x, y, t) \mapsto \frac{f_t(x) - g_t(y)}{\|f_t(x) - g_t(y)\|}$$

est bien définie, et continue. C'est une homotopie entre les applications

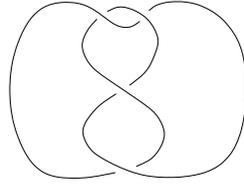
$$(x, y) \mapsto \frac{f_0(x) - g_0(y)}{\|f_0(x) - g_0(y)\|} \quad \text{et} \quad (x, y) \mapsto \frac{f_1(x) - g_1(y)}{\|f_1(x) - g_1(y)\|}.$$

Ces applications ont donc même degré.

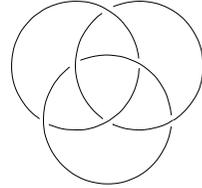
(6) Supposons que  $p = q = 1$ . Donc  $n + 1 = 3$ , et  $M$  et  $N$  sont deux sous-variétés  $C^\infty$  compactes orientées de dimension 1 dans  $\mathbb{R}^3$ . Une telle sous-variété est appelée un *entrelac orienté*, ou *nœud orienté* si elle est connexe. Parmi les très nombreuses références sur les nœuds et entrelacs, nous recommandons [Rol] (voir aussi [BZ, KRT]), et pour avoir une idée des nombreux problèmes de recherche actuels, dont certains sont plus profonds que d'autres, voir par exemple les actes de conférences [Kaw, GJK]).



Nœud de trèfle



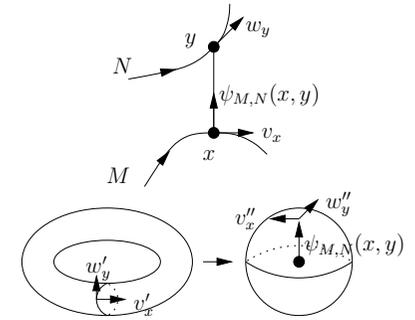
Nœud de huit



Entrelac borroméen

Donnons pour finir quelques formules de calcul du nombre d'enlacement de deux entrelacs orientés  $M$  et  $N$ .

(i) Pour tout  $(x, y) \in M \times N$ , notons  $v_x$  le vecteur tangent unitaire orienté de  $M$  en  $x$  et  $w_y$  le vecteur tangent unitaire orienté de  $N$  en  $y$ . Alors  $(x, y)$  est un point régulier pour  $\psi_{M,N}$  si et seulement si  $(\psi_{M,N}(x, y), v_x, w_y)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , et  $\psi_{M,N}$  préserve l'orientation d'un voisinage d'un point régulier  $(x, y)$  dans  $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$  dans un voisinage de  $\psi_{M,N}(x, y)$  dans  $\mathbb{S}_2$  (et donc le diféomorphisme local  $\psi_{M,N}$  en  $(x, y)$  est d'indice  $+1$ ) si et seulement si cette base est directe. Par exemple, dans le dessin ci-contre, cette base n'est pas directe, et  $\psi_{M,N}$  renverse l'orientation au voisinage de  $(x, y)$  (attention au signe dans  $y - x$ !).

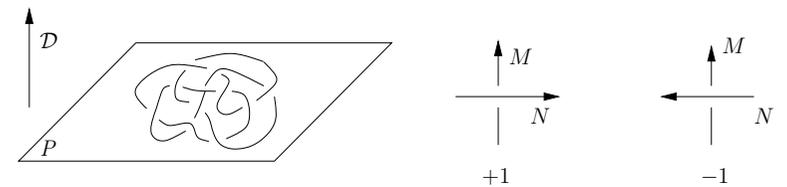


Donc, par le théorème 4.58, pour toute valeur régulière  $u$  de  $\psi_{M,N}$  dans  $\mathbb{S}_2$ , on a

$$\text{lk}(M, N) = \sum_{(x,y) \in \psi_{M,N}^{-1}(u)} \varepsilon(x, y),$$

où  $\varepsilon(x, y)$  est le signe du déterminant de  $u, v_x, w_y$ .

(ii) Soit  $\mathcal{D}$  une direction de droite orientée de  $\mathbb{R}^3$ , ne contenant pas de droite tangente à  $M \cup N$ , ni de droite passant par trois points de  $M \cup N$ , ni de droite  $D$  passant par un point  $x$  de  $M \cup N$  et un point  $y$  de  $M \cup N$  telle que les plans  $D \oplus T_x(M \cup N)$  et  $D \oplus T_y(M \cup N)$  soient confondus. Alors la projection orthogonale  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow P$  sur le plan vectoriel  $P$  orthogonal à  $\mathcal{D}$  est une immersion en restriction en  $M \cup N$ , les points multiples de son image sont doubles, et les deux tangentes en un point double de l'image sont distinctes. De plus, l'orientation de  $\mathcal{D}$  permet de donner un sens aux expressions « passer au-dessous » ou « passer en-dessus » au voisinage d'un point double. Le plan  $P$  est muni de l'orientation qui, suivie de l'orientation de  $\mathcal{D}$ , donne l'orientation de  $\mathbb{R}^3$ .



Pour tout point double  $\alpha$  où  $M$  passe au-dessous de  $N$ , posons  $\varepsilon_\alpha = +1$  si l'orientation de  $\pi(N)$  en  $\alpha$  suivie de l'orientation de  $\pi(M)$  en  $\alpha$  coïncide avec l'orientation

de  $P$  en  $\alpha$ , et  $-1$  sinon (voir figure précédente). Soit  $Z$  l'ensemble des points doubles de  $\pi(M \cup N)$  où  $M$  passe en-dessous de  $N$ .

**Proposition 4.63**

$$\ell k(M, N) = \sum_{\alpha \in Z} \varepsilon_\alpha.$$

**Démonstration.** La démonstration découle de la formule du point (i) ci-dessus, en prenant pour point  $u$  de  $\mathbb{S}_2$  le point défini par la direction orientée  $\mathcal{D}$ , qui est bien une valeur régulière pour  $\psi_{M,N}$ , dont la préimage par  $\psi_{M,N}$  est formée des points  $(x, y)$  de  $M \times N$  tels que  $\alpha = \pi(x) = \pi(y)$  soit un point double de  $\pi(M \cup N)$  où  $M$  passe en-dessous de  $N$ , et  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon(x, y)$ .  $\square$

(iii) Nous terminons par une très jolie formule intégrale.

**Proposition 4.64 (Formule de Gauss)** *Si  $M$  et  $N$  sont deux nœuds orientés disjoints dans  $\mathbb{R}^3$ , alors pour  $\alpha : \mathbb{R}/a\mathbb{R} \rightarrow M$  et  $\beta : \mathbb{R}/b\mathbb{R} \rightarrow N$  des difféomorphismes préservant l'orientation, qui sont des paramétrages par longueur d'arc,*

$$\ell k(M, N) = \frac{1}{4\pi} \int_0^a \int_0^b \frac{\det(\alpha(s) - \beta(t), \dot{\alpha}(s), \dot{\beta}(t))}{\|\alpha(s) - \beta(t)\|^3} ds dt.$$

**Démonstration.** Si  $\theta, \varphi$  sont les angles de latitude et de longitude sur  $\mathbb{S}_2$ , alors  $\omega = \frac{1}{4\pi} \sin \theta d\theta d\varphi$  est une forme d'aire normalisée (c'est-à-dire une forme volume de  $\mathbb{S}_2$ , définissant l'orientation de  $\mathbb{S}_2$ , d'intégrale 1 sur  $\mathbb{S}_2$ , invariante par rotations). Elle est proportionnelle par un coefficient positif à la 2-forme  $x dy \wedge dz - y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$ .

Un petit calcul montre que le membre de droite de l'équation (appelé *intégrale de Gauss*) vaut  $\int_{\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1} (\psi_{M,N})^* \omega$ , qui, comme  $\omega$  est d'intégrale 1, coïncide avec le nombre d'enlacement  $\ell k(M, N)$  par la définition de celui-ci comme degré de l'application  $\psi_{M,N}$ . D'où le résultat.  $\square$

## 5 Exercices de dérouillage de neurones et d'incitation à l'apprentissage

Dans ces petits exercices indépendants destinés à faciliter l'apprentissage du cours, toutes les variétés et sous-variétés sont différentielles, réelles,  $C^\infty$ . La sphère de dimension  $n$  est notée

$$\mathbb{S}_n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

### 5.1 Énoncés

**Exercice E.39** Pour quels  $a \geq 0$  le sous-espace

$$M_a = \{(x = (a + \cos \varphi) \cos \theta, y = (a + \cos \varphi) \sin \theta, z = \sin \varphi) : \theta, \varphi \in \mathbb{R}\}$$

est-il une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ ?

**Exercice E.40** Le nombre minimal de cartes dans un atlas de cartes de la variété  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$  est-il 4?

**Exercice E.41** Existe-t-il une immersion lisse de  $\mathbb{S}_1$  dans  $\mathbb{R}$ ?

**Exercice E.42** Soient  $M, N, P$  des variétés lisses,  $g : N \rightarrow P$  une application et  $f : M \rightarrow N$  une submersion surjective  $C^\infty$ . Montrer que  $g$  est  $C^\infty$  si et seulement si  $g \circ f$  l'est.

**Exercice E.43** Donner un champ de vecteurs sur  $\mathbb{S}_2$  ne s'annulant qu'en un point.

**Exercice E.44** Pour tout  $a \in \mathbb{R}^2$ , soit  $X_a$  le champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2$  défini par  $x \mapsto a - x$ . Calculer  $[X_a, X_b]$  pour tous les  $a, b \in \mathbb{R}^2$ .

**Exercice E.45** Calculer  $H_{\text{DR}}^*(\mathbb{R}^2 - \{0\})$  et  $H_{\text{DR}}^*(\mathbb{R}^2 - \{(-1, 0), (1, 0)\})$ .

**Exercice E.46** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , quelle est la caractéristique d'Euler de  $\mathbb{S}_n$ ?

**Exercice E.47** Soient  $f : \mathbb{S}_3 \rightarrow \mathbb{S}_2$  de classe  $C^\infty$  et  $\omega$  une forme volume sur  $\mathbb{S}_2$  telle que  $\int_{\mathbb{S}_2} \omega = 1$ .

a) Montrer qu'il existe  $\beta \in \Omega(\mathbb{S}_3)$  telle que  $f^* \omega = d\beta$ .

b) Montrer que  $H(f) = \int_{\mathbb{S}_3} \beta \wedge d\beta$  est indépendant de  $\beta$  et de la classe d'homotopie de  $f$ .

c) Calculer  $H(f)$  si  $f : \mathbb{S}_3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\} \rightarrow \mathbb{S}_2$ , où  $\mathbb{S}_2$  est identifiée avec  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  par la projection stéréographique, est l'application  $(z, w) \mapsto z/w$  si  $w \neq 0$  et  $(z, 0) \mapsto \infty$ .

## 5.2 Indications pour la résolution des exercices

**Schème E.39** Si  $a = 0$ , alors  $M_a = \mathbb{S}_2$ , donc  $M_a$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ . Si  $a > 1$ , l'application  $f_a$  de  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par

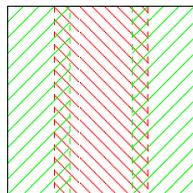
$$(\theta, \varphi) \mapsto (x = (a + \cos \varphi) \cos \theta, y = (a + \cos \varphi) \sin \theta, z = \sin \varphi)$$

est une immersion injective, de source compacte, donc un difféomorphisme sur une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ , qui est  $M_a$ . Si  $a = 1$ , un voisinage de  $(0, 0)$  dans  $M_a$  est homéomorphe à un cône, donc n'est pas une sous-variété. Si  $0 < a < 1$ , alors  $f_a$  est une immersion en dehors des  $(\theta, \varphi)$  tels que  $\cos \varphi = -a$ , mais les espaces tangents aux points  $f_a(\pi - \arccos a, 0) = f_a(\pi - \arccos a, \pi)$  sont transverses, donc  $M_a$  n'est pas une sous-variété.

**Schème E.40** Non. Les restrictions à respectivement

$$\left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[ \times \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[, \quad \left] -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right[ \times \left] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right[ \cup \left] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right[ \times \left] -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right[, \quad \left] \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right[ \times \left] \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right[$$

sont des difféomorphismes sur des ouverts  $U_1, U_2, U_3$  de  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , dont les inverses sont notés  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . Alors  $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), (U_3, \varphi_3)\}$  est un atlas de cartes de  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  de domaines dont chaque composante connexe est simplement connexe.



Mais deux cartes suffisent (par exemple de domaines les anneaux images de  $[0, 1] \times \left] \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right[$  et  $[0, 1] \times ([0, \frac{1}{3} \cup \frac{2}{3}, 1])$ ).

**Schème E.41** Non, par compacité de  $\mathbb{S}_1$ , en un maximum d'une fonction lisse de  $\mathbb{S}_1$  dans  $\mathbb{R}$ , son application tangente s'annule.

**Schème E.42** Puisque  $f : M \rightarrow N$  est une submersion surjective  $C^\infty$  (en utilisant par exemple le théorème de forme normale des submersions), en tout point  $y$  de  $N$ , il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $y$  et une application lisse  $s : V \rightarrow M$  telle que  $f \circ s = \text{id}_V$ . Si  $g$  est  $C^\infty$  alors  $g \circ f$  l'est par composition. Réciproquement, si  $g \circ f$  est  $C^\infty$ , alors en tout point de  $V$ , nous avons  $g = g \circ f \circ s$ , donc  $g$  est aussi  $C^\infty$ .

**Schème E.43** Il suffit de prendre l'image par la projection stéréographique de pôle nord d'un champ de vecteurs constant non nul sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Schème E.44** Pour tous les  $x \in \mathbb{R}^2$  et  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ , nous avons  $X_a(f)(x) = df_x(a - x)$ , donc  $X_a(X_b(f))(x) = d^2f_x(b - x, a - x) + df_x(x - a)$  et  $[X_a, X_b]$  est le champ de vecteurs constant  $b - a$ .

**Schème E.45** Puisque  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  se rétracte par déformation forte sur  $\mathbb{S}_1$ , nous avons  $H_{\text{DR}}^p(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \simeq xH^p(\mathbb{S}_1)$ , qui vaut  $\mathbb{R}$  si  $p = 0$  ou  $p = 1$ , et 0 sinon. Soit

$M = \mathbb{R}^2 - \{(-1, 0), (1, 0)\}$ . Nous avons  $H_{\text{DR}}^p(M) \simeq \mathbb{R}$  si  $p = 0$  par connexité, ainsi que  $H_{\text{DR}}^p(M) = 0$  si  $p > 2$  par dimension. Soient  $U = \{(x, y) \in M : x < \frac{1}{2}\}$  et  $V = \{(x, y) \in M : x > -\frac{1}{2}\}$ . Alors  $U$  et  $V$  ont le type d'homotopie du cercle et  $U \cap V$  est contractile, donc par Mayer-Vietoris, nous avons une suite exacte

$$H^0(U) \times H^0(V) \rightarrow H^0(U \cap V) \rightarrow H^1(M) \rightarrow H^1(U) \times H^1(V) \rightarrow H^1(U \cap V) = 0$$

$$0 = H^1(U \cap V) \rightarrow H^2(M) \rightarrow H^2(U) \times H^2(V) = 0.$$

Donc la première application est nulle. Donc  $H^1(M) \simeq \mathbb{R}^2$  et  $H^2(M) = 0$ .

**Schème E.46** Si  $n = 0$ , alors  $\chi(\mathbb{S}_n) = b_0(\mathbb{S}_0) = 2$  et si  $n \geq 1$ , alors  $\chi(\mathbb{S}_n) = b_0(\mathbb{S}_n) + (-1)^n b_n(\mathbb{S}_n) = 1 + (-1)^n$ , qui vaut 0 si  $n$  est impair et 2 sinon.

**Schème E.47** Lire tous les exercices de ce cours et trouver celui qui s'applique ici.

## A Annexes : rappels divers

### A.1 Rappels de topologie

Les références pour cette partie sont [Bou2, Dug, Per] et [Pau2]. Soit  $X$  un espace topologique.

Rappelons qu'un ensemble  $\mathcal{B}$  de parties de  $X$  est une *base d'ouverts* de la topologie de  $X$  si tout ouvert de  $X$  est réunion d'éléments de  $\mathcal{B}$ . Si  $E$  est un ensemble, un critère bien pratique pour qu'un ensemble  $\mathcal{B}$  de parties de  $E$  soit une base d'ouverts d'une topologie sur  $E$  est que

$$\forall A, B \in \mathcal{B}, \forall x \in A \cap B, \exists C \in \mathcal{B}, x \in C \subset A \cap B. \quad (*)$$

Une famille  $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  de parties de  $X$  est *localement finie* si pour tout  $x$  dans  $X$ , il existe un voisinage de  $x$  ne rencontrant qu'un nombre fini de  $U_\alpha$ . Un recouvrement ouvert  $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  est *plus fin* qu'un recouvrement ouvert  $(V_\beta)_{\beta \in \mathcal{B}}$  si pour tout  $\alpha \in \mathcal{A}$ , il existe  $\beta \in \mathcal{B}$  tel que  $V_\beta$  contienne  $U_\alpha$ .

On dit que  $X$  est

- à *base dénombrable* s'il admet une base d'ouverts dénombrable,
- *séparé* (on dit *Hausdorff* en langue anglaise) si deux points distincts admettent des voisinages disjoints,
- *séparable* s'il admet une partie dénombrable dense,
- *localement compact* s'il est séparé et si tout point admet un voisinage compact (ces deux conditions impliquent que tout point admet alors un système fondamental de voisinages compacts, donc fermés),
- $\sigma$ -*compact* s'il est séparé et union dénombrable de compacts,
- *dénombrable à l'infini* s'il est séparé et s'il existe une suite (dite *exhaustive*) de compacts  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de réunion  $X$  tels que  $K_i$  soit contenu dans l'intérieur de  $K_{i+1}$ ,
- *paracompact* s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert admet un recouvrement ouvert localement fini plus fin.

Attention à ne pas confondre la *séparation* (c'est-à-dire le fait d'être séparé) et la *séparabilité* (c'est-à-dire le fait d'être séparable). La séparation est cruciale pour montrer qu'un sous-espace compact d'un espace topologique séparé est fermé, ainsi que pour montrer qu'une application continue bijective d'un espace compact dans un espace séparé est un homéomorphisme. Certains ouvrages, surtout de langue anglaise, omettent, à tort, l'hypothèse de séparation dans la définition de la compacité, locale compacité,  $\sigma$ -compacité, dénombrabilité à l'infini, paracompacité.

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques localement compacts. Une application  $f : X \rightarrow Y$  est dite *propre* si l'image réciproque de tout compact est compacte. Par exemple, si  $X$  est compact, toute application continue  $f : X \rightarrow Y$  est propre. Une application continue injective propre entre espaces localement compacts est un homéomorphisme sur son image.

**Exercice E.48** Soient  $X$  un espace topologique localement compact, et  $\infty$  un ensemble. Sur l'ensemble somme disjointe  $\widehat{X} = X \sqcup \{\infty\}$ , on considère l'ensemble  $\mathcal{O}$  de parties de  $\widehat{X}$ , formé des parties ouvertes  $U$  de  $X$  et des complémentaires  ${}^c K \cup \{\infty\}$  de parties compactes  $K$  de  $X$ .

(1) Montrer que  $(\widehat{X}, \mathcal{O})$  est un espace topologique compact dans lequel  $X$  est ouvert, et de plus dense si  $X$  est non compact. Cet espace topologique est appelé le compactifié d'Alexandrov de  $X$ .

(2) Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , montrer que le compactifié d'Alexandrov de  $\mathbb{R}^n$  est homéomorphe à la sphère  $\mathbb{S}_n$ .

(3) Montrer qu'une application continue propre (resp. un homéomorphisme)  $f : X \rightarrow Y$  entre deux espaces topologiques localement compacts s'étend de manière unique en une application continue (resp. un homéomorphisme)  $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$ , de sorte que  $\widehat{\text{id}} = \text{id}$  et  $\widehat{f \circ g} = \widehat{f} \circ \widehat{g}$ .

Si  $\mathcal{P}$  est une propriété d'espaces topologiques, on dit qu'un espace topologique  $X$  est *localement  $\mathcal{P}$*  si tout point de  $X$  admet un système fondamental de voisinages qui possèdent la propriété  $\mathcal{P}$  (pour la topologie induite). Attention, cette terminologie n'est pas toujours consistante dans la littérature, voire dans ces notes : par exemple, la condition d'être localement compact comporte la clause globale de séparation.

**Exercice E.49** Soit  $A$  une partie d'un espace topologique  $X$ . Montrer que  $A$  est localement fermée (c'est-à-dire tel que tout point de  $A$  admet un voisinage  $U$  dans  $X$  tel que  $A \cap U$  soit fermé dans  $U$ ) si et seulement si  $A$  est ouverte dans son adhérence, et si et seulement si  $A$  est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé.

Notons  $\ell^2(\mathbb{R})$  l'espace de Hilbert réel des suites de réels de carrés sommables

$$\ell^2(\mathbb{R}) = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^2 < +\infty\},$$

muni du produit scalaire  $\langle (x_i)_i | (y_i)_i \rangle = \sum_i x_i y_i$ . Notons que  $\ell^2(\mathbb{R})$  est métrisable séparable (l'ensemble des suites presque nulles de rationnels est dense) et que tout espace métrisable séparable admet un plongement topologique dans  $\ell^2(\mathbb{R})$ . En effet, si  $(X, d)$  est un espace métrique contenant une suite dénombrable dense  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , alors l'application  $x \mapsto (\frac{1}{i+1} \min\{1, d(x, x_i)\})_{i \in \mathbb{N}}$  est un homéomorphisme de  $X$  sur son image dans  $\ell^2(\mathbb{R})$ .

### Topologies initiales et finales

Si  $E$  est un ensemble, et  $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$  deux topologies sur  $E$ , on dit que  $\mathcal{O}'$  est *plus fine* que  $\mathcal{O}$  si  $\mathcal{O}'$  « possède plus d'ouverts que »  $\mathcal{O}$ , c'est-à-dire si  $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ .

Soient  $X$  un ensemble et  $\mathcal{R} \subset X \times X$  une relation d'équivalence sur  $X$ . On note  $X/\mathcal{R}$  l'ensemble des classes d'équivalence de  $\mathcal{R}$  et

$$\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$$

la projection canonique, qui à  $x \in X$  associe sa classe d'équivalence  $\mathcal{R}(x)$ , que l'on note souvent  $[x]$  s'il n'y a pas d'ambiguïté. On rappelle la propriété universelle des quotients : pour tout ensemble  $Z$  et pour toute application  $f : X \rightarrow Z$  constante sur chaque classe d'équivalence de  $\mathcal{R}$ , il existe une et une seule application (dite *induite par passage au quotient*)  $f' : X/\mathcal{R} \rightarrow Z$  telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Z \\ \pi \downarrow & \nearrow f' & \\ X/\mathcal{R} & & \end{array}$$

commute.

Si  $X$  est un espace topologique, l'ensemble  $Y = X/\mathcal{R}$  admet une unique topologie, appelée la *topologie quotient*, telle qu'une partie  $U$  de  $Y$  est ouverte si et seulement si  $\pi^{-1}(U)$  est ouvert dans  $X$ . Sauf mention contraire tout ensemble quotient d'un espace topologique sera muni de la topologie quotient. Celle-ci vérifie les propriétés suivantes.

- Une partie  $F$  de  $Y$  est fermée si et seulement si  $\pi^{-1}(F)$  est fermé dans  $X$ .
- La projection canonique  $\pi$  est continue, et la topologie quotient est la topologie la plus fine sur  $Y$  rendant continue  $\pi$ .
- Pour tout espace topologique  $Z$ , une application  $g : Y \rightarrow Z$  est continue si et seulement si  $g \circ \pi : X \rightarrow Z$  est continue.

L'une des principales difficultés de la topologie quotient vient du fait qu'un espace topologique quotient d'un espace topologique séparé n'est pas toujours séparé (comme par exemple le quotient de  $\mathbb{R}$  par la relation d'équivalence définie par  $x \sim y$  si et seulement si  $y - x \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ , voir aussi l'exercice E.3). Vérifier la propriété de séparation (ou de non-séparation) d'un espace topologique quotient doit être un réflexe !

Si  $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  est une famille d'espaces topologiques et  $X = \coprod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$  est l'ensemble réunion disjointe de cette famille d'ensembles, alors la *topologie somme disjointe* sur  $X$  est la topologie la plus fine rendant continue les injections canoniques  $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow X$  (c'est-à-dire une partie  $U$  de  $X$  est ouverte si et seulement si  $i_\alpha^{-1}(U)$  est un ouvert de  $X_\alpha$  pour tout  $\alpha$ ). On identifie souvent  $X_\alpha$  avec son image dans  $X$  par  $i_\alpha$ .

Si  $X, Y$  sont des espaces topologiques,  $A$  un sous-espace de  $X$  et  $f : A \rightarrow Y$  une application continue, on appelle *recollement de  $X$  sur  $Y$  par  $f$*  l'espace topologique quotient

$$X \amalg_f Y = (X \amalg Y) / \sim$$

où  $\sim$  est la relation d'équivalence engendrée par la relation  $x \sim y$  si  $x \in A, y \in Y$  et  $f(x) = y$ . De nombreux espaces topologiques usuels sont construits par recollements (voir par exemple [Paul]).

Soient  $X$  un ensemble et  $(X_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $X$ . On suppose chaque  $X_i$  munie d'une topologie. L'ensemble  $X$  admet une unique topologie, appelée la

*topologie faible* définie par  $(X_i)_{i \in I}$ , vérifiant les propriétés suivantes (il suffit bien sûr de vérifier la première).

- Une partie  $O$  de  $X$  est ouverte si et seulement si  $O \cap X_i$  est ouverte dans  $X_i$  pour tout  $i$  dans  $I$ .
- Une partie  $F$  de  $X$  est fermée si et seulement si  $F \cap X_i$  est fermée dans  $X_i$  pour tout  $i$  dans  $I$ .
- Pour tout espace topologique  $Y$ , une application  $f : X \rightarrow Y$  est continue si et seulement si sa restriction  $f|_{X_i} : X_i \rightarrow Y$  à  $X_i$  est continue pour tout  $i$  dans  $I$ .

Par exemple, un espace topologique  $X$  est discret si et seulement si la topologie de  $X$  est la topologie faible définie par la famille des singletons (un singleton possède une et une seule topologie).

**Exercice E.50** Soit  $X$  un ensemble, muni de la topologie faible définie par une famille  $(X_i)_{i \in I}$  de parties de  $X$  munies chacune d'une topologie. Montrer que si, pour tous les  $i, j$  dans  $I$ , les topologies induites sur  $X_i \cap X_j$  par celles de  $X_i$  et de  $X_j$  coïncident, et si  $X_i \cap X_j$  est ouvert dans  $X_i$  et dans  $X_j$ , alors

- la topologie de  $X_i$  coïncide avec la topologie induite sur  $X_i$  par la topologie de  $X$ ;
- $X_i$  est ouvert dans  $X$ .

Donner un exemple où chaque  $X_i$  est séparé, mais où  $X$  ne l'est pas.

## Topologie de l'ordre

Soit  $E$  un ensemble. Rappelons qu'un *ordre* sur  $E$  est une relation  $\preceq$  qui est réflexive ( $\forall x \in E, x \preceq x$ ), antisymétrique ( $\forall x, y \in E$ , si  $x \preceq y$  et  $y \preceq x$ , alors  $x = y$ ) et transitive ( $\forall x, y, z \in E$ , si  $x \preceq y$  et  $y \preceq z$ , alors  $x \preceq z$ ). On note  $x \prec y$  si  $x \preceq y$  et  $x \neq y$ . Un ensemble muni d'un ordre est un *ensemble ordonné*. Un *ordre total* sur  $E$  est un ordre  $\preceq$  tel que pour tous les  $x, y$  dans  $E$ , on a  $x \preceq y$  ou  $y \preceq x$ . Un ensemble muni d'un ordre total est un *ensemble totalement ordonné*. Un ordre total sur  $E$  est un *bon ordre* si toute partie non vide de  $E$  admet un plus petit élément, c'est-à-dire si

$$\forall A \subset E, (A \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists x \in A, \forall y \in A, x \preceq y).$$

Un ensemble muni d'un bon ordre est un *ensemble bien ordonné* (par définition, ceci implique qu'il est totalement ordonné).

Par exemple, l'ensemble  $\mathbb{N}$  muni de son ordre usuel est bien ordonné. Par exemple, si  $E, F$  sont deux ensembles totalement ordonnés (resp. bien ordonnés), alors l'ensemble produit  $E \times F$  muni de l'*ordre lexicographique*

$$(x, y) \preceq (x', y') \text{ si et seulement si } (x \preceq x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \preceq y'))$$

est totalement ordonné (resp. bien ordonné).

Une application  $f : E \rightarrow F$  entre deux ensembles ordonnés  $E, F$  *préserve l'ordre* si pour tous les  $x, y$  dans  $E$ , si  $x \preceq y$  alors  $f(x) \preceq f(y)$ . Deux ensembles ordonnés

sont dit *isomorphes* s'il existe une bijection de l'un dans l'autre préservant l'ordre, ainsi que son inverse. Un *ordinal* est une classe d'isomorphisme d'ensembles bien ordonnés. Comme un *cardinal* est une classe d'équivalence d'ensembles pour la relation « être en bijection », le cardinal d'un ordinal est bien défini. Un ordinal est dit *dénombrable* si son cardinal l'est (c'est-à-dire si son cardinal est le cardinal d'une partie de  $\mathbb{N}$ ). Par un théorème de Zermelo (voir [Kri]), tout ensemble admet un bon ordre, et donc il existe un ordinal non dénombrable (voir ci-dessous pour un exemple ne dépendant pas de l'axiome du choix).

Soit  $E$  un ensemble bien ordonné. Un *segment initial* de  $E$  est une partie de la forme  $\{y \in E : y \prec x\}$  pour un  $x$  dans  $E$ . Muni de l'ordre induit de celui de  $E$ , un segment initial de  $E$  est bien ordonné. Soit  $\alpha, \beta$  deux ordinaux, on dit que  $\alpha \prec \beta$  si  $\alpha$  est isomorphe à un segment initial de  $\beta$  (ce qui ne dépend pas des choix des représentants). On note  $\alpha \preceq \beta$  si  $\alpha \prec \beta$  ou  $\alpha = \beta$ . On montre que tout ensemble d'ordinaux, muni de cet ordre  $\preceq$ , est bien ordonné. En particulier, la classe d'isomorphisme de l'ensemble (qui en est bien un) bien ordonné des ordinaux dénombrables est un ordinal non dénombrable, qui est le plus petit ordinal non dénombrable.

Soit  $E$  un ensemble totalement ordonné. La *topologie de l'ordre* sur  $E$  est la topologie dont une base d'ouverts est l'ensemble des

$$]x, y[ = \{z \in E : x \prec z \prec y\}$$

pour les  $x, y$  dans  $E$  (l'ensemble de ces parties vérifie le critère pratique (\*)). Cette topologie est séparée.

**Exercice E.51** *Montrer que l'ensemble ordonné des ordinaux inférieurs ou égaux à un ordinal donné, muni de la topologie de l'ordre, est compact.*

## A.2 Rappels sur les actions de groupes

Soient  $G$  un groupe et  $X$  un ensemble. Sauf mention explicite du contraire, toutes les actions seront des actions à gauche.

On considère une action (à gauche) de  $G$  sur  $X$ . Soit  $x$  dans  $X$ . On appelle *stabilisateur* (ou *fixateur*) de  $x$ , et on note  $G_x$ , le sous-groupe des éléments de  $G$  fixant  $x$  :

$$G_x = \{g \in G : gx = x\}.$$

On appelle *orbite* de  $x$ , et on note  $G \cdot x$  (ou  $Gx$  s'il n'y a pas de risque de confusion) le sous-ensemble de  $X$  défini par

$$G \cdot x = \{y \in X : \exists g \in G, y = gx\}.$$

La relation « être dans la même orbite » est une relation d'équivalence sur  $X$ . Donc les orbites de l'action de  $G$  sur  $X$  forment une partition de  $X$ . L'ensemble des orbites est noté  $G \backslash X$ . La projection canonique  $\pi : X \rightarrow G \backslash X$  est l'application qui à un point de  $X$  associe son orbite.

Une action de  $G$  sur  $X$  est dite *libre* (et on dit que  $G$  agit librement sur  $X$ ) si le stabilisateur  $G_x$  de chaque point  $x$  de  $X$  est trivial (c'est-à-dire vaut  $\{e\}$  où  $e$  est l'identité de  $G$ ). Ceci équivaut à

$$\forall x \in X, \forall g, g' \in G, (gx = g'x) \Rightarrow (g = g').$$

Une action de  $G$  sur  $X$  est dite *transitive* si elle n'a qu'une (ou aucune) orbite, c'est-à-dire si pour tous les  $x, y$  dans  $X$ , il existe  $g$  dans  $G$  tel que  $y = gx$ . Une partie de  $X$  est dite *saturée* si elle contient l'orbite de chacun de ses points.

Par exemple, si  $H$  est un sous-groupe de  $G$ , alors  $H$  agit sur  $G$  par *translations à gauche*

$$(h, g) \mapsto hg,$$

ainsi que par *translations à droite*

$$(h, g) \mapsto gh^{-1},$$

où  $h \in H$  et  $g \in G$ . Ces actions sont libres. Dans le premier cas, les orbites sont les classes à gauche  $Hg$  pour  $g \in G$ , et dans le second cas, les orbites sont les classes à droite  $gH$  pour  $g \in G$ . L'ensemble des orbites se note  $H \backslash G$  dans le premier cas, et  $G/H$  dans le second.

Le groupe  $G$  (et donc tout sous-groupe  $H'$  de  $G$ ) agit (à gauche) sur l'espace quotient  $H \backslash G$  des classes à gauche, par  $(g, H\gamma) \mapsto H\gamma g^{-1}$ , et (à gauche) sur l'espace quotient  $G/H$  des classes à droite, par  $(g, \gamma H) \mapsto g\gamma H$ . La première action s'appelle l'action *par translations à droite* de  $G$  sur  $H \backslash G$ , et la seconde l'action *par translations à gauche* de  $G$  sur  $G/H$ . Ces actions sont transitives.

Pour tout sous-groupe  $H'$  de  $G$ , l'application  $(H'g)H \mapsto H'(gH)$  est une bijection naturelle

$$H' \backslash (G/H) \simeq (H' \backslash G)/H$$

par laquelle on identifie ces ensembles, que l'on note alors  $H \backslash G/H$ .

Pour tout  $x$  dans  $X$ , l'application *orbitale* en  $x$  de  $G$  dans  $X$  est l'application définie par  $\varphi_x : g \mapsto gx$ . Elle induit une bijection  $\Theta_x$ , dite *canonique*, de  $G/G_x$  dans  $G \cdot x$ . Cette bijection est  $G$ -équivariante pour les actions de  $G$  sur  $G/G_x$  et sur  $G \cdot x$  : pour tous les  $g$  dans  $G$  et  $y$  dans  $G/G_x$ ,

$$\Theta_x(gy) = g\Theta_x(y).$$

Soient  $X$  un espace topologique et  $G$  un groupe. Une action de  $G$  sur l'ensemble  $X$  est dite *par homéomorphismes* si pour tout  $g$  dans  $G$ , l'application de  $X$  dans  $X$  définie par  $x \mapsto gx$  est continue. Cette application est alors un homéomorphisme (car d'inverse  $x \mapsto g^{-1}x$ ). En munissant  $G$  de la topologie discrète, une action de  $G$  sur  $X$  est par homéomorphismes si et seulement si l'action  $(G \times X) \rightarrow X$  est continue.

Si  $G$  agit par homéomorphismes sur  $X$ , alors on munit  $G \backslash X$  de la topologie quotient. La projection canonique  $\pi$  est alors continue par définition de la topologie quotient, mais elle est de plus ouverte.

**Proposition A.1** *Pour toute action par homéomorphismes d'un groupe  $G$  sur un espace topologique  $X$ , la projection canonique  $\pi : X \rightarrow G \backslash X$  est ouverte.*

**Démonstration.** Pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , son image  $\pi(U)$  est un ouvert de  $G \backslash X$ , car  $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$ , qui est une union d'ouverts, car  $G$  agit par homéomorphismes.  $\square$

Si  $G$  est discret (c'est-à-dire muni de la topologie discrète), et si  $X$  est un espace localement compact, alors une action continue de  $G$  sur  $X$  est dite *proprement discontinue* (ou *propre*, et on dit que  $G$  agit proprement sur  $X$ ) si, pour tout compact  $K$  de  $X$ , la partie

$$\{g \in G : K \cap gK \neq \emptyset\}$$

de  $G$  est finie. Notons que si  $G$  est fini, alors toute action continue est propre.

### A.3 Rappels de calcul différentiel

Nous renvoyons par exemple à [Ave, CarH, Die1, Pau2] pour des démonstrations et commentaires des résultats de cette partie, et en particulier [Die1] pour ce qui concerne les applications analytiques réelles (ou de classe  $C^\omega$ ) et analytiques complexes.

Soient  $E, F$  deux espaces de Banach,  $U, V$  deux ouverts de  $E, F$  respectivement,  $f : U \rightarrow V$  une application de classe  $C^1$  et  $x$  un point de  $U$ .

On note  $df_x : E \rightarrow F$  (ou aussi  $f'(x) : E \rightarrow F$ ) la différentielle de  $f$  en  $x$ . On note  $rk_x f$  le rang de  $df_x$ , c'est-à-dire  $rk_x f = \dim \text{Im } df_x$ , appelé *rang* de  $f$  en  $x$ . C'est aussi le rang de la matrice de  $df_x$  dans des bases de  $E, F$  lorsque ceux-ci sont de dimension finie. Si  $F = \mathbb{R}^q$ , et si  $f_1, \dots, f_q$  sont les composantes de  $f$ , alors le rang de  $f$  en  $x$  est le rang du système de formes linéaires  $(d(f_1)_x, \dots, d(f_q)_x)$  dans le dual  $E^*$  de  $E$ . Si  $E = \mathbb{R}^p$ , alors le rang de  $f$  en  $x$  est le rang du système de vecteurs  $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(x)\right)$  de  $F$ . Si  $E = \mathbb{R}^p, F = \mathbb{R}^q$  et les bases sont les bases canoniques, la matrice de  $df_x$ , qui est, avec  $i$  l'indice de ligne et  $j$  l'indice de colonne,

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}},$$

est appelée la *matrice jacobienne* de  $f$  en  $x$ . Le rang de  $f$  en  $x$  est égal au rang de sa matrice jacobienne en  $x$ . L'application  $x \mapsto rk_x f$  est *semi-continue inférieurement*, c'est-à-dire pour tout  $x$  dans  $U$ , il existe un voisinage  $U'$  de  $x$  dans  $U$  tel que, pour tout  $y$  dans  $U'$ , on ait  $rk_y f \geq rk_x f$  (car  $\mathbb{N}$  est discret). Mais il ne faut pas croire que l'application  $x \mapsto rk_x f$  soit localement constante! On a

$$rk_x f \leq \min\{\dim E, \dim F\}.$$

Si  $E = F$  sont de même dimension finie, on note  $j_x f : E \rightarrow \mathbb{R}$  le déterminant de l'application linéaire  $df_x$  (ou, ce qui revient au même, de la matrice jacobienne de  $f$  en  $x$  quand  $E = F = \mathbb{R}^p$ ), que l'on appelle le *jacobien* de  $f$  en  $x$ .

On dit que  $f$  est une *immersion* en  $x$  si la différentielle  $df_x : E \rightarrow F$  de  $f$  en  $x$  est injective. Si  $E$  est de dimension finie, ceci équivaut à dire que  $rk_x f = \dim E$ . On dit que  $f$  est une *immersion* si  $f$  est une immersion en tout point de  $U$ .

On dit que  $f$  est une *submersion* en  $x$  si la différentielle  $df_x : E \rightarrow F$  de  $f$  en  $x$  est surjective. Si  $F$  est de dimension finie, ceci équivaut à dire que  $rk_x f = \dim F$ . On dit que  $f$  est une *submersion* si  $f$  est une submersion en tout point de  $U$ .

On dit que  $f$  est une *application de rang constant au voisinage* de  $x$  (on dit aussi une *subimmersion* en  $x$ ) si la différentielle  $df_y : E \rightarrow F$  est de rang constant pour tout  $y$  dans un voisinage de  $x$  dans  $U$ . Par exemple, par semi-continuité du rang, une immersion ou submersion en  $x$  est une application de rang constant au voisinage de  $x$ .

Soit  $k$  un élément de  $(\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$ . On dit qu'une application  $f : U \rightarrow V$  de classe  $C^k$  est un  $C^k$ -*difféomorphisme* (ou *difféomorphisme* lorsque  $k$  est sous-entendu, par exemple  $k = \infty$ , ce qui sera souvent le cas dans les exercices) si  $f$  est

bijective et si son inverse est de classe  $C^k$ . On dit aussi que  $f$  est de classe  $C^0$  si elle est continue, et que  $f$  est un  $C^0$ -difféomorphisme si  $f$  est un homéomorphisme.

**Théorème A.2 (Théorème d'inversion locale)** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach,  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $k$  un élément de  $(\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$  et  $f : U \rightarrow F$  une application de classe  $C^k$ . Si, en un point  $x$  de  $U$ , la différentielle  $df_x : E \rightarrow F$  est bijective, alors il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $x$  contenu dans  $U$ , et un voisinage ouvert  $W$  de  $f(x)$ , tels que  $f : V \rightarrow W$  soit un  $C^k$ -difféomorphisme.

Notons que si  $E = F = \mathbb{R}^n$  (muni de n'importe quelle norme), alors on peut bien sûr remplacer « bijective » par « injective » dans ce résultat. Le corollaire suivant est une application immédiate.

**Porisme A.3** Une application bijective entre deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , différentiable de classe  $C^k$ , dont le jacobien ne s'annule pas, est un  $C^k$ -difféomorphisme entre ces ouverts.  $\square$

Le résultat suivant est essentiellement équivalent au précédent (voir l'exercice E.54).

**Théorème A.4 (Théorème des fonctions implicites)** Soient  $E, F, G$  trois espaces de Banach,  $U$  un ouvert de  $E \times F$ ,  $k$  un élément de  $(\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$ , et  $f : U \rightarrow G$  une application de classe  $C^k$ . Si, en un point  $(a, b)$  de  $U$ , la différentielle partielle par rapport à la seconde variable  $\partial_2 f(a, b) : F \rightarrow G$  est bijective, alors il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $a$  dans  $E$ , un voisinage ouvert  $W$  de  $b$  dans  $F$  tels que  $V \times W \subset U$ , et une application  $g : V \rightarrow W$  de classe  $C^k$  tels que l'assertion

$$(x, y) \in V \times W \quad \text{et} \quad f(x, y) = 0$$

soit équivalente à l'assertion

$$x \in V \quad \text{et} \quad y = g(x).$$

Comme précédemment, si  $F = G = \mathbb{R}^n$ , alors on peut remplacer « bijective » par « surjective » dans cet énoncé.

Voici quelques applications classiques des théorèmes précédents. On fixe  $p, q \leq n$  dans  $\mathbb{N}$  et  $k$  un élément de  $(\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$ . Rappelons qu'un *difféomorphisme local* de  $\mathbb{R}^n$  en un point  $x_0$  est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert de  $x_0$  sur un voisinage ouvert de  $x_0$ , qui envoie  $x_0$  sur  $x_0$ . Les applications  $(x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$  de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_q)$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^q$ , et  $(x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$  de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^q$  où  $r \leq \min\{p, q\}$ , sont respectivement une immersion, une submersion, une application de rang constant  $r$ . Les résultats suivants disent que ces exemples sont, localement et modulo difféomorphismes locaux, les seuls.

**Porisme A.5 (Théorème de forme normale locale des immersions)** Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  contenant 0 et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^k$ , qui est une immersion en 0 telle que  $f(0) = 0$ . Alors il existe un  $C^k$ -difféomorphisme local  $\psi$  de  $\mathbb{R}^n$  en 0 tel que, au voisinage de 0, on ait

$$\psi \circ f(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0). \quad \square$$

**Porisme A.6 (Théorème de forme normale locale des submersions)** Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant 0 et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  une application de classe  $C^k$ , qui est une submersion en 0 telle que  $f(0) = 0$ . Alors il existe un  $C^k$ -difféomorphisme local  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^n$  en 0, tel que  $\varphi(0) = 0$  et, au voisinage de 0, on ait

$$f \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_q). \quad \square$$

**Porisme A.7 (Théorème de forme normale locale des applications de rang constant)** Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  contenant 0 et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  une application de classe  $C^k$ , qui est une application de rang constant  $r \leq \min\{p, q\}$  sur un voisinage de 0 telle que  $f(0) = 0$ . Alors, il existe un  $C^k$ -difféomorphisme local  $\psi$  de  $\mathbb{R}^q$  en 0 et un  $C^k$ -difféomorphisme local  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^p$  en 0, tels que  $\varphi(0) = 0$  et, au voisinage de 0, on ait

$$\psi \circ f \circ \varphi(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0). \quad \square$$

#### • Exercices de révision.

**Exercice E.52** Montrer que le sous-ensemble  $A = \{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}\}$  de  $\mathbb{R}^2$  n'est pas l'image de  $\mathbb{R}$  par une immersion  $C^1$ .

Donner un exemple d'une application de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$  dont l'image est  $A$ .

**Exercice E.53** Soient  $U, V, W$  des ouverts d'espaces de Banach  $E, F, G$  respectivement, et  $f : U \rightarrow V, g : V \rightarrow W$  deux applications. Si  $f$  et  $g$  sont des immersions, submersions ou applications de rang constant, que peut-on dire de  $g \circ f$  ?

**Exercice E.54** Montrer, en dimension finie et en classe de différentiabilité  $C^1$ , l'équivalence entre le théorème A.2 d'inversion locale et le théorème A.4 des fonctions implicites.

**Exercice E.55** Soit  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 2$ . On considère l'application déterminant  $\det$  définie sur l'espace vectoriel de dimension finie  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  des matrices réelles de taille  $n \times n$ ; elle est de classe  $C^\infty$  car polynomiale.

- (1) Caractériser les matrices en lesquelles la différentielle de  $\det$  est non nulle. Montrer que si  $A$  est inversible, alors

$$d(\det)_A : H \mapsto \det A \operatorname{tr} A^{-1}H.$$

- (2) Soit  $X = \operatorname{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$ . Montrer que, pour tout  $A \in X$ , il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , un voisinage ouvert  $U$  de 0 dans  $\mathbb{R}^{n^2-1}$  et une application  $f : U \rightarrow V$  de classe  $C^\infty$  qui est un homéomorphisme sur son image et possède une différentielle injective en 0, telle que  $f(0) = A$  et  $f(U) = V \cap X$ .
- (3) Montrer le même résultat pour  $X$  l'ensemble des matrices de rang  $n - 1$ .
- (4) Montrer que ce résultat n'est pas valable pour l'ensemble des matrices de rang  $\leq n - 1$ . On pourra par exemple considérer la matrice nulle.

**Exercice E.56** (1) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  une application de classe  $C^\infty$ . Notons

$$X = \{x(z, \theta) = (f(z) \cos \theta, f(z) \sin \theta, z) : z \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}\}$$

la surface de révolution autour de l'axe  $Oz$  engendrée par  $f$ . Pour tout  $x = x(z, \theta)$  dans  $X$ , montrer qu'il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  dans  $X$  et un voisinage ouvert  $V$  de  $(0, 0, z)$  dans le plan  $\mathbb{R}(-\sin \theta, \cos \theta, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 1)$  tels que la projection orthogonale sur  $V$  soit un homéomorphisme de  $U$  dans  $V$ , dont la réciproque soit une immersion.

- (2) Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  une fonction de classe  $C^\infty$ . Notons

$$X = \{(f(z)x_1, \dots, f(z)x_p, z) : x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}, \sum x_i^2 = 1, z \in \mathbb{R}^n\}$$

(une « surface de révolution en dimension  $n + p$  »). Énoncer et démontrer un résultat analogue à celui de la première question.

**Exercice E.57** Démontrer les corollaires A.5, A.6, A.7 à partir des théorèmes A.2 et A.4.

**Exercice E.58** Soient  $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$  et  $f$  une application de classe  $C^1$  d'un ouvert  $V$  non vide de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ , injective. Montrer que  $n \leq m$  et que  $df_x$  est injective sur un ouvert dense de  $V$ . L'application  $df_x$  est-elle nécessairement injective partout ?

**Exercice E.59** Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  propre, c'est-à-dire telle que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty.$$

On suppose que  $f$  possède (au moins) deux minima stricts (distincts)  $a$  et  $b$ . Le but de l'exercice est de montrer que  $f$  possède un troisième point critique.

- (1) Montrer que le résultat est évident si  $n = 1$ , ou si  $n \geq 2$  et  $f(x) \rightarrow -\infty$  quand  $\|x\| \rightarrow +\infty$ . Dans la suite, on supposera donc  $n \geq 2$  et  $f(x) \rightarrow +\infty$  quand  $\|x\| \rightarrow +\infty$ . On va supposer que  $f$  n'admet pas d'autre point critique et aboutir à une contradiction.

- (2) Pour tout  $m$  dans  $\mathbb{R}$ , soit  $K_m$  la réunion des compacts connexes contenant  $a$  et  $b$  sur lesquels  $f$  est majorée par  $m$ . Montrer que  $K_m$  est fermé. Montrer qu'il existe  $M$  dans  $\mathbb{R}$  tel que  $K_M \neq \emptyset$  et  $K_m = \emptyset$  pour tout  $m < M$ .

- (3) Montrer en utilisant le théorème des fonctions implicites que l'intérieur de  $K_M$  est connexe.

1. Conclure.

**Exercice E.60** Dans cet exercice, on fixe un élément  $n$  de  $\mathbb{N} - \{0\}$ .

- (1) Montrer que l'application exponentielle des matrices

$$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \operatorname{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

est une application  $C^\infty$ , et calculer sa différentielle. Vérifier en particulier que  $d \exp_0 = \operatorname{Id}$ .

- (2) On note  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$  le sous-espace vectoriel des matrices de trace nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , et  $\mathfrak{so}(n)$  le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que l'application exponentielle envoie  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$  dans  $\operatorname{SL}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathfrak{so}(n)$  dans  $\operatorname{SO}(n)$ .

- (3) Montrer que  $\exp : \mathfrak{so}(n) \rightarrow \operatorname{SO}(n)$  est surjective, mais que  $\exp : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$  ne l'est pas (on pourra vérifier qu'une matrice dans l'image de l'exponentielle est de trace au moins  $-2$ ).

- (4) Montrer que l'exponentielle est un  $C^\infty$ -difféomorphisme entre l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles et l'ouvert dans cet espace formé des matrices symétriques réelles définies positives.

- (5) Pour  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , notons  $L_M$  et  $R_M$  les opérateurs de multiplication à gauche et à droite par  $M$ , agissant sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , et  $\operatorname{ad} M = L_M - R_M$ . Montrer que  $d \exp_M = \sum_{p, q \geq 0} \frac{L_M^p R_M^q}{(p+q+1)!}$ , puis en déduire que

$$\exp(-M) d \exp_M = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\operatorname{ad} M)^k}{(k+1)!}.$$

- (6) Montrer que  $d \exp_M : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est inversible si et seulement si  $\operatorname{ad} M$  n'a pas de valeur propre complexe de la forme  $2ik\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ .

## A.4 Rappels sur les revêtements

Nous renvoyons par exemple à [God, Hat, Spa, Pau1] pour les rappels contenus dans cette section.

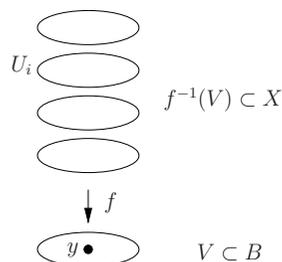
### • Revêtements.

Soient  $X$  et  $B$  deux espaces topologiques, et  $f : X \rightarrow B$  une application continue. On dit que  $f$  est un *revêtement* si pour tout  $y \in B$ , il existe un voisinage  $V$  de  $y$ , un espace discret  $D$  non vide et  $h : V \times D \rightarrow f^{-1}(V)$  un homéomorphisme tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} V \times D & \xrightarrow{h} & f^{-1}(V) \\ \text{\scriptsize } pr_1 \searrow & & \downarrow f \\ & & V \end{array}$$

On dit que  $B$  est la *base*,  $X$  l'*espace total*,  $f^{-1}(y)$  la *fibres* au-dessus de  $y$ ,  $V$  un *voisinage distingué* de  $y$ , et  $h$  une *trivialisations locale* de  $f$  au-dessus de  $V$ .

Il est facile de montrer que l'application  $f$  est un revêtement si et seulement si tout point  $y$  de  $B$  admet un voisinage  $V$  tel que  $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$ , où les  $U_i$  sont des ouverts deux à deux disjoints de  $X$ , et  $f|_{U_i} : U_i \rightarrow V$  est un homéomorphisme. Notons qu'un revêtement est surjectif.



**Exercice E.61** Montrer que l'application de la droite  $\mathbb{R}$  dans le cercle  $\mathbb{S}_1$  définie par  $t \mapsto e^{it}$  est un revêtement.



Soient  $f : X \rightarrow B$  et  $f' : X' \rightarrow B$  deux revêtements ayant même base. Un *isomorphisme de revêtements* de  $f$  sur  $f'$  est un homéomorphisme  $\phi : X \rightarrow X'$  tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & X' \\ f \searrow & & \swarrow f' \\ & & B \end{array}$$

Si  $f = f'$ , alors un isomorphisme de revêtements de  $f$  sur  $f'$  est appelé un *automorphisme de revêtements*.

Un revêtement  $f : X \rightarrow B$  est dit *trivial* s'il est isomorphe au revêtement  $pr_1 : B \times D \rightarrow B$ , avec  $D$  un espace discret non vide et  $pr_1 : (x, y) \mapsto x$  la première projection.

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques. Un *homéomorphisme local* est une application continue  $f : X \rightarrow Y$  telle que pour tout  $x$  dans  $X$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  tel que  $f(U)$  soit ouvert et  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  soit un homéomorphisme. Un revêtement  $f : X \rightarrow B$  est un *revêtement fini* si pour tout  $y$  dans  $B$ , le cardinal de  $f^{-1}(y)$  est fini. Soit  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ . Un revêtement  $f : X \rightarrow B$  est un *revêtement à  $n$  feuilletés* si pour tout  $y$  dans  $B$ , le cardinal de  $f^{-1}(y)$  est  $n$ .

**Exercice E.62** Soient  $f : X \rightarrow Y$  une application continue et  $n$  dans  $\mathbb{N} - \{0\}$ . Supposons que  $X$  soit séparé. Montrer que  $f$  est un revêtement à  $n$  feuilletés si et seulement si  $f$  est un homéomorphisme local et le cardinal de chaque fibre  $f^{-1}(y)$  est fini constant égal à  $n$ .

Nous renvoyons à l'appendice A.2 pour des rappels sur les actions de groupes.

**Théorème A.8** Soit  $G$  un groupe discret agissant (continûment) librement et proprement sur un espace topologique localement compact  $X$ . Alors

- (1) pour tout  $x$  dans  $X$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x$  tel que  $gV \cap V = \emptyset$  pour tout  $g$  dans  $G - \{e\}$  ;
- (2) chaque orbite de  $G$  est discrète ;
- (3) l'espace topologique quotient  $G \backslash X$  est séparé, donc localement compact ;
- (4) la projection canonique  $X \rightarrow G \backslash X$  est un revêtement.

**Démonstration.** (1) Pour tout  $x$  dans  $X$ , soit  $U$  un voisinage compact de  $x$ . Comme l'action est propre, il existe  $g_1, \dots, g_k$  dans  $G$  tels que

$$\{g \in G - \{e\} : gU \cap U \neq \emptyset\} = \{g_1, \dots, g_k\}.$$

Pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , comme l'action est libre, on a  $g_i x \neq x$ . Comme  $X$  est séparé, et l'action continue, il existe donc un voisinage ouvert  $U_i$  de  $x$ , contenu dans  $U$ , tel que  $g_i U_i \cap U_i = \emptyset$ . Alors  $V = \bigcap_{1 \leq i \leq k} U_i$  est un ouvert qui convient.

(2) Ceci découle immédiatement de (1) par continuité de l'action.

(3) Soient  $x$  et  $y$  deux points de  $X$  qui ne sont pas dans une même orbite. Soient  $U$  et  $V$  des voisinages compacts de  $x$  et  $y$  respectivement. Comme  $U \cup V$  est compact dans l'espace séparé  $X$ , et puisque l'action est propre, il existe  $g_1, \dots, g_k$  dans  $G$  tels que

$$\{g \in G : gU \cap V \neq \emptyset\} = \{g_1, \dots, g_k\}.$$

Pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , on a  $g_i x \neq y$ . Comme  $X$  est séparé, et l'action continue, il existe donc des voisinages ouverts  $U_i, V_i$  de  $x, y$  contenus dans  $U, V$  respectivement,

tels que  $g_i U_i \cap V_i = \emptyset$ . Comme  $\pi$  est ouverte (voir la proposition A.1 de l'appendice A.2), on a deux ouverts  $\pi(\cap_{1 \leq i \leq k} U_i)$  et  $\pi(\cap_{1 \leq i \leq k} V_i)$ , contenant respectivement  $\pi(x)$  et  $\pi(y)$ , et qui sont disjoints par construction. Donc  $G \setminus X$  est séparé.

Comme  $\pi$  est ouverte et  $G \setminus X$  est séparé, l'image d'un voisinage compact d'un point  $x$  de  $X$  est un voisinage compact de  $\pi(x)$ , donc  $G \setminus X$  est localement compact.

(4) Pour tout  $x$  dans  $X$ , soit  $V$  un voisinage compact de  $x$ , d'intérieur  $U$ , tel que  $gV \cap V = \emptyset$  pour tout  $g$  dans  $G - \{e\}$ . Remarquons que l'application  $\pi|_{gV} : gV \rightarrow \pi(V)$  est une application continue injective, avec  $gV$  compact et  $\pi(V)$  séparé, donc est un homéomorphisme. Alors  $\pi(U)$  est un voisinage ouvert de  $\pi(x)$ , et  $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$  est une union disjointe d'ouverts de  $X$ , et l'application  $\pi|_{gU} : gU \rightarrow \pi(U)$  est un homéomorphisme. Donc  $\pi$  est un revêtement.  $\square$

**Porisme A.9** (1) Soit  $G$  un groupe fini (discret) agissant librement (par homéomorphismes) sur un espace localement compact  $X$ . Alors  $G \setminus X$  est séparé (donc localement compact), et la projection canonique  $X \rightarrow G \setminus X$  est un revêtement.

(2) Soit  $H$  un sous-groupe discret d'un groupe localement compact  $G$ , alors  $H$  est fermé,  $H \setminus G$  est séparé (donc localement compact) et la projection canonique  $G \rightarrow H \setminus G$  est un revêtement.  $\square$

### Exemples.

- (1) Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , si le groupe  $\{\pm 1\}$  agit sur la sphère  $\mathbb{S}_n$  par  $x \mapsto \pm x$ , alors  $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = \{\pm 1\} \setminus \mathbb{S}_n$  est un espace topologique compact, et l'application canonique  $\mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  est un revêtement à deux feuillettes.
- (2) Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ . Le groupe  $\mathcal{U}_p = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^p = 1\}$  des racines  $p$ -èmes de l'unité agit (continûment) sur la sphère de dimension impaire

$$\mathbb{S}_{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$$

par  $\lambda \cdot (z_0, \dots, z_n) = (\lambda z_0, \dots, \lambda z_n)$ . Cette action est libre, donc  $L_{n,p} = \mathcal{U}_p \setminus \mathbb{S}_{2n+1}$  est un espace topologique compact, appelé un *espace lenticulaire*, et l'application canonique  $\mathbb{S}_{2n+1} \rightarrow L_{n,p}$  est un revêtement à  $p$  feuillettes.

- (3) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . L'application canonique  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  est un revêtement.

#### • Homotopie.

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques, et  $f$  et  $g$  deux applications continues de  $X$  dans  $Y$ . Une *homotopie* entre  $f$  et  $g$  est une application continue  $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  telle que  $h(x, 0) = f(x)$  et  $h(x, 1) = g(x)$  pour tout  $x$  dans  $X$ . Si  $h$  est une homotopie entre  $f$  et  $g$ , et  $h'$  une homotopie entre  $g$  et une application continue  $g' : X \rightarrow Y$ , alors  $(x, t) \mapsto h(x, 1 - t)$  est une homotopie entre  $g$  et  $f$ , et

$$(x, t) \mapsto \begin{cases} h(x, 2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ h'(x, 2t - 1) & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

est une homotopie entre  $f$  et  $g'$ . Les applications  $f$  et  $g$  sont dites *homotopes* s'il existe une homotopie entre  $f$  et  $g$ . La relation « être homotope à » est une relation d'équivalence.

Si  $X$  et  $Y$  sont localement compacts, les applications  $f$  et  $g$  sont dites *proprement homotopes* s'il existe une homotopie  $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  de  $f$  à  $g$ , qui est propre. La relation « être proprement homotopes » est une relation d'équivalence.

Un espace topologique  $X$  est dit *simplement connexe* s'il est connexe par arcs, et si toute application continue du cercle  $\mathbb{S}_1$  dans  $X$  se prolonge en une application continue du disque (fermé)  $\mathbb{D}_2$  dans  $X$ . Un espace topologique  $X$  est *contractile* s'il existe  $x_0$  dans  $X$  et une homotopie entre l'application identité de  $X$  et l'application constante en  $x_0$ , c'est-à-dire une application continue  $h : X \times [0, 1] \rightarrow X$  telle que  $h(x, 0) = x$  et  $h(x, 1) = x_0$  pour tout  $x$  dans  $X$ . Un espace topologique  $X$  se *rétracte par déformation forte* sur une partie  $A$  s'il existe une application continue  $h : X \times [0, 1] \rightarrow X$  telle que  $h(x, 0) = x$ ,  $h(x, 1) \in A$ , et  $h(a, t) = a$ , pour tous les  $t$  dans  $[0, 1]$ ,  $x$  dans  $X$  et  $a$  dans  $A$ .

Une *équivalence d'homotopie* entre  $X$  et  $Y$  est une application continue  $f : X \rightarrow Y$  ayant la propriété qu'il existe une application continue  $g : Y \rightarrow X$  telle que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  soient homotopes à l'identité. Deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$  ont *même type d'homotopie* s'il existe une équivalence d'homotopie de  $X$  dans  $Y$ . La relation « avoir même type d'homotopie » est une relation d'équivalence. Par exemple, un espace topologique est contractile si et seulement s'il a le même type d'homotopie qu'un espace réduit à un point. Plus généralement, si un espace topologique  $X$  se rétracte par déformation forte sur un sous-espace  $Y$ , alors  $X$  et  $Y$  ont le même type d'homotopie.

**Exercice E.63** (1) Montrer que toute partie convexe non vide de  $\mathbb{R}^n$  (et en particulier  $\mathbb{R}^n$  lui-même) est contractile.

(2) Montrer qu'un espace topologique qui se rétracte par déformation forte sur un sous-espace connexe par arcs (resp. simplement connexe) l'est encore. En déduire qu'un espace contractile est simplement connexe.

(3) Soit  $X$  un espace topologique. On suppose que  $X = U \cup V$ , où  $U, V$  sont deux ouverts simplement connexes de  $X$ , tels que  $U \cap V$  soit non vide et connexe par arcs. Montrer que  $X$  est simplement connexe.

(4) Montrer que pour  $n \geq 2$ , la sphère  $\mathbb{S}_n$  est simplement connexe.

(5) Montrer que pour  $n \geq 1$ , l'espace projectif complexe  $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  est simplement connexe.

(6) Montrer que le produit de deux espaces topologiques simplement connexes est simplement connexe.

Soit  $X$  un espace topologique. Appelons *chemin* dans  $X$  une application continue  $\alpha$  de  $[0, 1]$  dans  $X$ . Appelons *lacet* en  $x$  dans  $X$  un chemin  $\alpha$  tel que  $\alpha(0) = \alpha(1) = x$ . Si  $\alpha$  est un chemin, on appelle *chemin inverse* de  $\alpha$  le chemin  $\bar{\alpha}$  tel que  $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$  pour tout  $t$  dans  $[0, 1]$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux chemins dans  $X$  tels que  $\alpha(1) = \beta(0)$ . On

appelle *chemin composé* (ou *concaténé*) de  $\alpha$  et  $\beta$ , et on note  $\alpha \cdot \beta$ , le chemin

$$t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Deux lacets  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$  en  $x$  sont *homotopes* s'il existe une application continue  $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  telle que  $h(0, s) = h(1, s) = x$ ,  $h(t, 0) = \alpha(t)$  et  $h(t, 1) = \beta(t)$ , pour tous les  $s, t$  dans  $[0, 1]$ . Notons que si  $\alpha$  est un chemin, alors le lacet  $\alpha \cdot \bar{\alpha}$  est homotope à un chemin constant, que si  $\alpha, \beta, \gamma$  sont trois chemins, alors  $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$  et  $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$  sont homotopes (ce qui, lorsque l'on considère les chemins à homotopie près, permet de noter ce chemin  $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ ), et que si  $\beta'$  est homotope à  $\beta$ , alors  $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$  et  $\alpha \cdot \beta' \cdot \gamma$  sont homotopes.

• **Revêtements universels.**

Le résultat suivant est un cas particulier du théorème du relèvement d'applications par un revêtement (voir [God, Hat, Spa, Paul]). Si  $p : X \rightarrow B$  est un revêtement, et  $f : Y \rightarrow B$  est une application continue, on appelle *relèvement* de  $f$  toute application continue  $\tilde{f} : Y \rightarrow X$  telle que  $p \circ \tilde{f} = f$ , c'est-à-dire telle que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \tilde{f} \nearrow & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & B \end{array} .$$

**Proposition A.10 (Théorème du relèvement)** Soient  $p : X \rightarrow B$  un revêtement et  $Y$  un espace topologique localement connexe par arcs et simplement connexe. Pour tous les  $x$  dans  $X$  et  $y$  dans  $Y$  tels que  $p(x) = f(y)$ , pour toute application continue  $f : Y \rightarrow B$ , il existe un et un seul relèvement  $\tilde{f} : Y \rightarrow X$  de  $f$  tel que  $\tilde{f}(y) = x$ .  $\square$

**Porisme A.11** Deux revêtements  $p : X \rightarrow B$  et  $p' : X' \rightarrow B$ , où  $X$  et  $X'$  sont localement connexes par arcs et simplement connexes, sont isomorphes. Plus précisément, si  $x \in X$  et  $x' \in X'$  vérifient  $p(x) = p'(x')$ , alors il existe un unique isomorphisme de revêtements  $\phi : X \rightarrow X'$  envoyant  $x$  sur  $x'$ .

**Démonstration.** Soit  $f : X \rightarrow X'$  le relèvement de l'application  $p$  par le revêtement  $p'$  tel que  $f(x) = x'$ , et  $g$  le relèvement de l'application  $p'$  par le revêtement  $p$  tel que  $g(x') = x$ . Alors  $g \circ f$  et  $\text{id}_X$  sont deux relèvements de l'application  $p$  par le revêtement  $p$  (car  $p \circ (g \circ f) = (p \circ g) \circ f = p' \circ f = p$ ), qui coïncident en  $x$ , donc coïncident. De même,  $f \circ g = \text{id}_{X'}$  donc  $f$  est un isomorphisme de revêtements cherché. L'unicité se montre de même.  $\square$

Si  $B$  est une variété topologique (voir le paragraphe 1.1) connexe, alors un revêtement  $\tilde{\pi} : \tilde{B} \rightarrow B$  où  $\tilde{B}$  est une variété topologique simplement connexe est appelé un *revêtement universel* de  $B$  (cette définition n'est pas la plus intrinsèque, ni la bonne pour les espaces topologiques plus généraux, voir par exemple [Spa, Hat, Paul]). Par

le corollaire ci-dessus, il est unique à isomorphisme près (et à unique isomorphisme près si l'on se fixe des points bases dans les espaces, en demandant aux applications de préserver ces points bases).

Par exemple, l'application  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1$  avec  $t \mapsto e^{2i\pi t}$ , les projections canoniques  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ ,  $\mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$  pour  $n \geq 2$ , et  $\mathbb{S}_{2n+1} \rightarrow L_{n,p}$  pour  $n \geq 1$  (avec  $L_{n,p}$  l'espace lenticulaire), sont des revêtements universels, par l'exercice E.63.

Un espace topologique  $Y$  est *semilocalement simplement connexe* si tout point  $y$  de  $Y$  admet un voisinage  $U$  tel que tout lacet en  $y$  contenu dans  $U$  est homotope dans  $Y$  au lacet constant en  $y$ .

Si  $Y$  est localement contractile, par exemple si  $Y$  est une variété topologique, alors  $Y$  est semilocalement simplement connexe.

**Théorème A.12** Soit  $B$  un espace topologique séparé, connexe et localement connexe par arcs. Alors  $B$  admet un revêtement simplement connexe si et seulement si  $B$  est semilocalement simplement connexe.  $\square$

En particulier, toute variété topologique connexe  $M$  admet un revêtement universel  $\tilde{\pi} : \tilde{M} \rightarrow M$ , unique à isomorphisme de revêtements près. De plus, on a une classification des revêtements (connexes) d'une variété topologique (voir [God, Hat, Spa, Paul]), à l'aide du groupe des automorphismes de revêtements de  $\tilde{\pi}$  (aussi appelé *groupe fondamental*).

**Théorème A.13** Soit  $M$  une variété topologique connexe,  $\tilde{\pi} : \tilde{M} \rightarrow M$  un revêtement universel, et  $\Gamma$  le groupe des automorphismes de revêtements de  $\tilde{\pi}$ . Alors  $\Gamma$  agit librement et proprement sur  $\tilde{M}$ . Pour tout sous-groupe  $\Gamma'$  de  $\Gamma$ , l'application  $\pi$  induit par passage au quotient un revêtement  $\pi_{\Gamma'} : \Gamma' \backslash \tilde{M} \rightarrow M$ . Pour tout revêtement  $p : N \rightarrow M$  avec  $N$  connexe, il existe un sous-groupe  $\Gamma'$  de  $\Gamma$  tel que les revêtements  $p$  et  $\pi_{\Gamma'}$  soient isomorphes.  $\square$

## A.5 Rappels d'algèbre multilinéaire

Nous renvoyons par exemple à [Bou1, AB] pour des compléments sur cette partie.

Soit  $K$  un corps (commutatif). Tous les espaces vectoriels et applications linéaires et multilinéaires de cette partie seront définis sur  $K$ . On note  $E^*$  ou  $\tilde{E}$  l'espace vectoriel dual d'un espace vectoriel  $E$ . On identifie dans la suite un espace vectoriel  $E$  de dimension finie avec son bidual  $E^{**} = (E^*)^*$  par l'application canonique  $E \rightarrow E^{**}$  définie par

$$x \mapsto \{f \mapsto f(x)\}.$$

• **Produit tensoriel.** Soient  $E_1, \dots, E_r$  des espaces vectoriels de dimension finie, où  $r \geq 2$ . Si  $F$  est un espace vectoriel, on note  $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_r; F)$  l'espace vectoriel des applications multilinéaires de  $E_1 \times \dots \times E_r$  dans  $F$ . On appelle *produit tensoriel* de  $E_1, \dots, E_r$ , et on note  $E_1 \otimes \dots \otimes E_r$ , l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(E_1^*, \dots, E_r^*; K)$  des formes multilinéaires sur  $E_1^* \times \dots \times E_r^*$ . Si  $(e_1, \dots, e_r) \in E_1 \times \dots \times E_r$ , on note  $e_1 \otimes \dots \otimes e_r$  l'élément de  $E_1 \otimes \dots \otimes E_r$  défini par

$$(f_1, \dots, f_r) \mapsto \prod_{i=1}^r f_i(e_i).$$

Le produit tensoriel vérifie les propriétés suivantes, pour  $E_i$  des espaces vectoriels de dimension finie.

- (1) (**Propriété universelle**) Pour toute application multilinéaire  $f$  de  $E_1 \times \dots \times E_r$  dans un espace vectoriel  $F$ , il existe une unique application linéaire  $g : E_1 \otimes \dots \otimes E_r \rightarrow F$  telle que  $g(e_1 \otimes \dots \otimes e_r) = f(e_1, \dots, e_r)$  pour tous les  $e_i$  dans  $E_i$ . En particulier, l'application  $f \mapsto g$  est un isomorphisme linéaire de  $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_r; F)$  dans  $\mathcal{L}(E_1 \otimes \dots \otimes E_r, F)$ .
- (2) (**Associativité**) Il existe un unique isomorphisme  $(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$  dans  $E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$ , qui envoie  $(e_1 \otimes e_2) \otimes e_3$  sur  $e_1 \otimes e_2 \otimes e_3$  pour tous les  $e_i$  dans  $E_i$ . On identifie par la suite ces deux espaces vectoriels par cet isomorphisme.
- (3) (**Distributivité**) Il existe un unique isomorphisme  $(E_1 \oplus E_2) \otimes E_3$  dans  $(E_1 \otimes E_3) \oplus (E_2 \otimes E_3)$ , qui envoie  $(e_1 \oplus e_2) \otimes e_3$  sur  $(e_1 \otimes e_3) \oplus (e_2 \otimes e_3)$  pour tous les  $e_i$  dans  $E_i$ .
- (4) (**Bases**) Si  $(e_{i,j})_{1 \leq j \leq n_i}$  est une base de  $E_i$ , alors  $(e_{1,j_1} \otimes \dots \otimes e_{r,j_r})_{1 \leq j_1 \leq n_1, 1 \leq j_2 \leq n_2, \dots, 1 \leq j_r \leq n_r}$  est une base de  $E_1 \otimes \dots \otimes E_r$ . En particulier,

$$\dim(E_1 \otimes \dots \otimes E_r) = \prod_{i=1}^r \dim(E_i).$$

- (5) (**Isomorphismes**) Les applications linéaires  $E_1 \rightarrow K \otimes E_1$  et  $E_1 \rightarrow E_1 \otimes K$  définies par  $x \mapsto 1 \otimes x$  et  $x \mapsto x \otimes 1$  sont des isomorphismes. En particulier, l'application linéaire  $K \rightarrow K \otimes K$  induite par  $1 \mapsto 1 \otimes 1$  est un isomorphisme.

On a un isomorphisme canonique de  $\mathcal{L}(E_1, E_3) \otimes \mathcal{L}(E_2, E_4)$  dans  $\mathcal{L}(E_1 \otimes E_2, E_3 \otimes E_4)$  qui à un couple  $(u, v)$  associe l'unique application linéaire de  $E_1 \otimes E_2$  dans  $E_3 \otimes E_4$  associée par la propriété universelle à l'application bilinéaire  $(x, y) \mapsto u(x) \otimes v(y)$  de  $E_1 \times E_2$  dans  $E_3 \otimes E_4$ . En particulier, on a un isomorphisme canonique

$$E_1^* \otimes E_2^* \rightarrow (E_1 \otimes E_2)^*,$$

et un isomorphisme canonique

$$E_1^* \otimes E_2 \rightarrow \mathcal{L}(E_1, E_2),$$

qui à  $f \otimes y$ , pour  $f \in E_1^*$  et  $y \in E_2$  associe l'application linéaire  $x \mapsto f(x)y$ .

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. On convient d'appeler *puissance tensorielle  $n$ -ème*, et de noter  $E^{\otimes n}$ , le produit tensoriel de  $n \geq 2$  copies de  $E$ , ainsi que  $E^{\otimes 1} = E$ ,  $E^{\otimes 0} = K$ . Un élément de  $E^{\otimes p} \otimes (E^*)^{\otimes q}$ , pour  $p, q$  dans  $\mathbb{N}$ , est appelé un *tenseur  $p$  fois contravariant et  $q$  fois covariant* de  $E$ .

Rappelons que, pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , le *groupe symétrique*  $\mathfrak{S}_n$  est le groupe (d'ordre  $n!$ ) des bijections de  $\{1, \dots, n\}$ . Il est engendré par les *transpositions*  $(i, j)$  pour  $i \neq j$  dans  $\{1, \dots, n\}$ , et même par les  $(i, i+1)$  pour  $i$  dans  $\{1, \dots, n-1\}$ . La *signature* est l'unique morphisme  $\sigma \mapsto \varepsilon_\sigma$  de  $\mathfrak{S}_n$  dans  $\{\pm 1\}$  valant  $-1$  sur les transpositions, donc vérifiant

$$\varepsilon_\sigma = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}.$$

Le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  agit sur l'espace vectoriel  $E^{\otimes n}$  de la façon suivante. Pour tout  $\sigma$  dans  $\mathfrak{S}_n$ , l'action de  $\sigma$  sur  $E^{\otimes n}$  est l'unique automorphisme linéaire tel que

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E, \quad \sigma \cdot (x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma^{-1}(n)}.$$

Un tenseur  $t$  de  $E^{\otimes n}$  est dit *symétrique* s'il est invariant par  $\mathfrak{S}_n$ , c'est-à-dire si  $\sigma \cdot t = t$  pour tout  $\sigma$  dans  $\mathfrak{S}_n$ . Un tenseur  $t$  de  $E^{\otimes n}$  est dit *antisymétrique* si  $\sigma \cdot t = \varepsilon_\sigma t$  pour toute permutation  $\sigma$  dans  $\mathfrak{S}_n$  de signature  $\varepsilon_\sigma$ . Dans les deux cas, il suffit évidemment de vérifier ces propriétés pour les transpositions. On note  $\text{Sym}_n(E)$  le sous-espace des tenseurs symétriques de  $E^{\otimes n}$ , et  $\text{Asym}_n(E)$  celui des tenseurs antisymétriques.

### • Algèbre extérieure.

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie, et  $p$  un élément de  $\mathbb{N}$ . Une forme  $p$ -linéaire  $\omega : E^p \rightarrow K$  est dite *alternée* si, pour tout  $(x_1, \dots, x_p)$  dans  $E^p$ , s'il existe  $i, j$  dans  $\{1, \dots, p\}$  tels que  $i \neq j$  et  $x_i = x_j$ , alors  $\omega(x_1, \dots, x_p) = 0$ . On note  $\Lambda^p E^*$  ou  $\Lambda^p \tilde{E}$  l'espace vectoriel des formes  $p$ -linéaires alternées sur  $E$ , et on a  $\Lambda^0 \tilde{E} = K$  (par convention) et  $\Lambda^1 \tilde{E} = \tilde{E}$ . On note

$$\Lambda^* \tilde{E} = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Lambda^p \tilde{E}.$$

Soient  $F$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. Si  $\omega \in \Lambda^p F$ , alors l'application  $f^*\omega : E^p \rightarrow K$  définie par

$$f^*\omega(x_1, \dots, x_p) = \omega(f(x_1), \dots, f(x_p))$$

est  $p$ -linéaire alternée. L'application  $f^* : \omega \mapsto f^*\omega$  de  $\Lambda^p \tilde{F}$  dans  $\Lambda^p \tilde{E}$  (aussi notée  $\Lambda^p \tilde{f}$  lorsque l'on veut préciser  $p$ ) est linéaire. Elle s'étend par linéarité en une application linéaire  $f^*$  (aussi notée  $\Lambda^* \tilde{f}$ ) de  $\Lambda^* \tilde{F}$  dans  $\Lambda^* \tilde{E}$ . Si  $G$  est un espace vectoriel de dimension finie, et si  $g : F \rightarrow G$  est une application linéaire, alors

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* .$$

**Lemme A.14** Une forme  $p$ -linéaire alternée  $\omega$  sur  $E$  est antisymétrique, c'est-à-dire pour tout  $(x_1, \dots, x_p)$  dans  $E^p$  et tout  $\sigma$  dans  $\mathfrak{S}_p$ , on a

$$\omega(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(p)}) = \varepsilon_\sigma \omega(x_1, \dots, x_p) .$$

**Démonstration.** Comme les transpositions engendrent  $\mathfrak{S}_p$ , et que la signature est un morphisme de groupes, il suffit de vérifier le résultat pour  $\sigma$  une transposition. On se ramène donc au cas  $p = 2$ . Dans ce cas, pour tous les  $x, y$  dans  $E$  et  $\omega$  dans  $\Lambda^2 \tilde{E}$ , comme

$$\omega(x + y, x + y) = \omega(x, x) + \omega(y, y) + \omega(x, y) + \omega(y, x) ,$$

on a  $\omega(y, x) = -\omega(x, y)$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

**Remarque.** On a donc une inclusion  $\Lambda^p \tilde{E} \subset \text{Asym}_p(\tilde{E})$ . Lorsque la caractéristique de  $K$  est différente de 2, une forme  $p$ -linéaire antisymétrique est alternée, et cette inclusion est une égalité.

**Exemples.** (1) Si la dimension de  $E$  est  $n$  et si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , alors l'application  $\det_{\mathcal{B}} : E^n \rightarrow K$ , déterminant d'un  $n$ -uplet de vecteurs de  $E$  dans la base  $\mathcal{B}$ , est un élément non nul de  $\Lambda^n E^*$ . Si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ , pour tout  $\omega$  dans  $\Lambda^n E^*$ , par multilinéarité et antisymétrie, on a

$$\omega(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \omega(e_1, \dots, e_n) ,$$

donc  $\Lambda^n E^*$  est de dimension 1, engendré par l'élément non nul  $\det_{\mathcal{B}}$  :

$$\Lambda^n E^* = K \det_{\mathcal{B}} .$$

(2) Si la dimension de  $E$  est strictement inférieure à  $p$ , alors

$$\Lambda^p E^* = 0 .$$

En effet, si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , alors pour tout  $\omega$  dans  $\Lambda^p E^*$  et pour tout  $(x_1, \dots, x_p)$  dans  $E^p$ , le scalaire  $\omega(x_1, \dots, x_p)$  est une combinaison linéaire des scalaires  $\omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$  avec  $i_1, \dots, i_p$  dans  $\{1, \dots, n\}$ , qui sont nuls, car, comme  $p > n$ , au moins deux des vecteurs  $e_{i_1}, \dots, e_{i_p}$  doivent être égaux.

En particulier, si la dimension de  $E$  est  $n$ , alors  $\Lambda^* \tilde{E} = \bigoplus_{0 \leq p \leq n} \Lambda^p \tilde{E}$ . En particulier, la dimension de  $\Lambda^* \tilde{E}$  est finie.

Munissons maintenant l'espace vectoriel  $\Lambda^* \tilde{E}$  d'une structure d'algèbre (unitaire, associative) naturelle.

Pour  $p, q$  deux entiers supérieurs ou égaux à 1, notons  $\mathfrak{S}(p, q)$  l'ensemble des  $\sigma$  dans  $\mathfrak{S}_{p+q}$  tels que

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(p) \quad \text{et} \quad \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q) .$$

Une telle bijection  $\sigma$  est obtenue en prenant un paquet de  $p+q$  cartes, en coupant ce paquet en un premier paquet de  $p$  cartes, et un second paquet de  $q$  cartes, puis en battant une fois ces paquets de cartes, intercalant ainsi les cartes du premier paquet dans le second. L'application  $\sigma \mapsto \sigma(\{1, \dots, p\})$  est une bijection de  $\mathfrak{S}(p, q)$  dans l'ensemble des parties à  $p$  éléments de  $\{1, \dots, p+q\}$ , donc le cardinal de  $\mathfrak{S}(p, q)$  vaut  $\frac{(p+q)!}{(p)!(q)!}$ .

Soient  $\omega$  dans  $\Lambda^p \tilde{E}$  et  $\eta$  dans  $\Lambda^q \tilde{E}$ . On appelle *produit extérieur* de  $\omega$  et de  $\eta$  la forme  $(p+q)$ -linéaire  $\omega \wedge \eta : E^{p+q} \rightarrow K$  définie par

$$\omega \wedge \eta(x_1, \dots, x_{p+q}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p, q)} \varepsilon_\sigma \omega(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \eta(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)}) ,$$

si  $p, q \geq 1$ , et si  $p = 0$  ou  $q = 0$ , alors  $\omega \wedge \eta = \omega\eta$  ou  $\omega \wedge \eta = \eta\omega$ . On étend cette définition par bilinéarité à  $\Lambda^* \tilde{E}$  : si  $\omega_i, \eta_i \in \Lambda^i \tilde{E}$  pour  $i = 1, \dots, n$ , on pose

$$\left( \sum_i \omega_i \right) \wedge \left( \sum_i \eta_i \right) = \sum_{i,j} \omega_i \wedge \eta_j .$$

**Remarque.** Lorsque la caractéristique de  $K$  est nulle, on a

$$\omega \wedge \eta(x_1, \dots, x_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon_\sigma \omega(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \eta(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)}) ;$$

il est alors immédiat de voir que  $\omega \wedge \eta$  est antisymétrique, donc alternée.

**Proposition A.15** Si  $\omega \in \Lambda^p \tilde{E}$  et  $\eta \in \Lambda^q \tilde{E}$ , alors  $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{p+q} \tilde{E}$ .

**Démonstration.** Soient  $(x_1, \dots, x_{p+q})$  dans  $E^{p+q}$  et  $i, j$  dans  $\{1, \dots, p+q\}$ , tels que  $x_i = x_j$ . On partitionne  $\mathfrak{S}(p, q)$  en quatre parties :

- (1)  $\mathfrak{S}(p, q)_{--}$ , l'ensemble des éléments  $\sigma$  de  $\mathfrak{S}(p, q)$  tels que  $i$  et  $j$  appartiennent tous les deux à  $\sigma(\{1, \dots, p\})$ ,
- (2)  $\mathfrak{S}(p, q)_{++}$ , l'ensemble des éléments  $\sigma$  de  $\mathfrak{S}(p, q)$  tels que  $i$  et  $j$  appartiennent tous les deux à l'ensemble  $\sigma(\{p+1, \dots, p+q\})$ ,
- (3)  $\mathfrak{S}(p, q)_{-+}$ , l'ensemble des éléments  $\sigma$  de  $\mathfrak{S}(p, q)$  tels que  $i$  appartienne à  $\sigma(\{1, \dots, p\})$ , et  $j$  appartienne à  $\sigma(\{p+1, \dots, p+q\})$ ,

(4)  $\mathfrak{S}(p, q)_{+-}$ , l'ensemble des éléments  $\sigma$  de  $\mathfrak{S}(p, q)$  tels que  $i$  appartienne à  $\sigma(\{p+1, \dots, p+q\})$  et  $j$  appartienne à  $\sigma(\{1, \dots, p\})$ .

Comme  $\omega$  et  $\eta$  sont alternées, le terme de la somme définissant  $\omega \wedge \eta(x_1, \dots, x_{p+q})$  qui porte sur un  $\sigma$  dans  $\mathfrak{S}(p, q)_{--} \cup \mathfrak{S}(p, q)_{++}$  est nul. Soit  $\tau$  la transposition échangeant  $i$  et  $j$ . Alors la multiplication à gauche par  $\tau$  induit une bijection de  $\mathfrak{S}(p, q)_{-+}$  sur  $\mathfrak{S}(p, q)_{+-}$ . Donc  $\omega \wedge \eta(x_1, \dots, x_{p+q})$  est la somme sur tous les  $\sigma$  dans  $\mathfrak{S}(p, q)_{-+}$  de

$$\varepsilon_\sigma \omega(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \eta(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)}) - \\ \varepsilon_\sigma \omega(x_{\tau\sigma(1)}, \dots, x_{\tau\sigma(p)}) \eta(x_{\tau\sigma(p+1)}, \dots, x_{\tau\sigma(p+q)})$$

Ce terme est nul, car comme  $x_i = x_j$ , on a  $(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)}) = (x_{\tau\sigma(1)}, \dots, x_{\tau\sigma(p+q)})$ .

□

**Théorème A.16** *Muni du produit extérieur  $\wedge$ , l'espace vectoriel  $\Lambda^* \tilde{E} = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Lambda^p \tilde{E}$  est une algèbre (associative, unitaire) graduée anticommutative, c'est-à-dire*

- (1) **(Associativité)**  $(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$  pour tous les  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  dans  $\Lambda^* \tilde{E}$ ;
- (2) Si  $1 \in K = \Lambda^0 \tilde{E}$ , alors pour tout  $\omega$  dans  $\Lambda^* \tilde{E}$ , on a  $1 \wedge \omega = \omega \wedge 1 = \omega$ ;
- (3) **(Graduation)**  $(\Lambda^p \tilde{E}) \wedge (\Lambda^q \tilde{E}) \subset \Lambda^{p+q} \tilde{E}$ ;
- (4) **(Anticommutativité)** si  $\omega \in \Lambda^p \tilde{E}$  et  $\eta \in \Lambda^q \tilde{E}$ , alors  $\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$ .

De plus, si  $F$  est un espace vectoriel de dimension finie, et  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire, alors l'application linéaire  $\omega \mapsto f^* \omega$  de  $\Lambda^* \tilde{F}$  dans  $\Lambda^* \tilde{E}$  est un morphisme d'algèbres graduées de degré 0, c'est-à-dire  $f^* 1 = 1$ ,  $f^*(\omega \wedge \eta) = (f^* \omega) \wedge (f^* \eta)$  et  $f^*(\Lambda^p \tilde{F}) \subset \Lambda^p \tilde{E}$ .

**Démonstration.** (1) Notons  $\mathfrak{S}(p, q, r)$  l'ensemble des  $\sigma$  dans  $\mathfrak{S}_{p+q+r}$  tels que

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(p) \quad \text{et} \quad \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q) \quad \text{et} \quad \sigma(p+q+1) < \dots < \sigma(p+q+r).$$

Notons  $\mathfrak{S}(\hat{p}, q, r)$  l'ensemble des  $\sigma$  dans  $\mathfrak{S}(p, q, r)$  tels que  $\sigma$  vaille l'identité sur  $\{1, \dots, p\}$ , et de même pour  $\mathfrak{S}(p, q, \hat{r})$ . Il est facile de vérifier que la composition  $(\sigma, \sigma') \mapsto \sigma \circ \sigma'$  induit des bijections  $\mathfrak{S}(p, q+r) \times \mathfrak{S}(\hat{p}, q, r) \rightarrow \mathfrak{S}(p, q, r)$  et  $\mathfrak{S}(p+r, q) \times \mathfrak{S}(p, q, \hat{r}) \rightarrow \mathfrak{S}(p, q, r)$ .

Soient  $\omega_1 \in \Lambda^p \tilde{E}, \omega_2 \in \Lambda^q \tilde{E}, \omega_3 \in \Lambda^r \tilde{E}$ . Alors

$$(\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3))(x_1, \dots, x_{p+q+r}) = \\ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p, q+r)} \varepsilon_\sigma \omega_1(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) (\omega_2 \wedge \omega_3)(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q+r)}) = \\ \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}(p, q+r) \\ \tau \in \mathfrak{S}(\hat{p}, q, r)}} \varepsilon_\sigma \omega_1(x_{\sigma\tau(1)}, \dots, x_{\sigma\tau(p)}) \varepsilon_\tau \omega_2(x_{\sigma\tau(p+1)}, \dots, x_{\sigma\tau(p+q)}) \omega_3(x_{\sigma\tau(p+q+1)}, \dots, x_{\sigma\tau(p+q+r)}) = \\ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p, q, r)} \varepsilon_\sigma \omega_1(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \omega_2(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)}) \omega_3(x_{\sigma(p+q+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q+r)}) =$$

$$((\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3)(x_1, \dots, x_{p+q+r}).$$

(4) Soit  $\tau$  l'élément de  $\mathfrak{S}(p+q)$  tel que  $\tau(i) = i + p \bmod (p+q)$  pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, p+q\}$ . Alors  $\varepsilon_\tau = (-1)^{pq}$ , et la composition  $\sigma \mapsto \sigma \circ \tau$  est une bijection de  $\mathfrak{S}(p, q)$  sur  $\mathfrak{S}(q, p)$ . Donc pour  $\omega \in \Lambda^p \tilde{E}, \eta \in \Lambda^q \tilde{E}$ , on a

$$(\eta \wedge \omega)(x_1, \dots, x_{p+q}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(q, p)} \varepsilon_\sigma \eta(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(q)}) \omega(x_{\sigma(q+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)}) = \\ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p, q)} \varepsilon_{\sigma\tau} \eta(x_{\sigma\tau(1)}, \dots, x_{\sigma\tau(q)}) \omega(x_{\sigma\tau(q+1)}, \dots, x_{\sigma\tau(p+q)}) = \\ \varepsilon_\tau (\omega \wedge \eta)(x_1, \dots, x_{p+q}).$$

Les autres affirmations sont immédiates. □

**Proposition A.17** *Pour tous les  $\omega_1, \dots, \omega_p$  dans  $\tilde{E}$  et tous les  $x_1, \dots, x_p$  dans  $E$ , on a*

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p)(x_1, \dots, x_p) = \det \left( (\omega_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq p} \right).$$

**Démonstration.** On raisonne par récurrence sur  $p$ . La formule est immédiate pour  $p = 1$ . On a

$$(\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_p))(x_1, \dots, x_p) = \sum_{j=1}^p (-1)^{j+1} \omega_1(x_j) (\omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_p)(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_p).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence au rang  $p-1$ , on trouve le développement du déterminant de la matrice  $(\omega_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq p}$  par rapport à sa première ligne, ce qui montre le résultat. □

**Porisme A.18** *Des formes linéaires  $f_1, \dots, f_k$  dans  $E^*$  sont linéairement indépendantes si et seulement si leur produit extérieur  $f_1 \wedge \dots \wedge f_k$  est non nul.*

**Démonstration.** Si  $f_1, \dots, f_k$  sont linéairement indépendantes, alors il existe des vecteurs  $x_1, \dots, x_k$  dans  $E$  tels que  $f_i(x_j) = 1$  si  $i = j$  et  $f_i(x_j) = 0$  sinon. Donc, par la proposition précédente,  $(f_1 \wedge \dots \wedge f_k)(x_1, \dots, x_k) = 1$  et  $f_1 \wedge \dots \wedge f_k \neq 0$ . La réciproque est évidente. □

**Remarque.** Il découle de la propriété d'anticommutativité que si  $\omega$  est une forme  $p$ -linéaire alternée avec  $p$  impair, alors  $\omega \wedge \omega = 0$ . Mais pour  $E = \mathbb{R}^4$ , si  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$  est la base duale de la base canonique, et si  $\omega = \epsilon_1 \wedge \epsilon_2 + \epsilon_3 \wedge \epsilon_4$ , alors  $\omega \wedge \omega = 2\epsilon_1 \wedge \epsilon_2 \wedge \epsilon_3 \wedge \epsilon_4 \neq 0$ .

**Proposition A.19** *Si  $(f_1, \dots, f_n)$  est une base de  $\tilde{E}$ , alors  $(f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_p})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n}$  est une base de  $\Lambda^p \tilde{E}$ .*

**Démonstration.** Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  la base de  $E$ , dont la base duale est  $(f_1, \dots, f_n)$ . Pour  $\omega$  dans  $\Lambda^p \check{E}$  et  $x_1, \dots, x_p$  dans  $E$ , par  $p$ -linéarité de  $\omega$ , on a

$$\omega(x_1, \dots, x_p) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} f_{i_1}(x_1) \dots f_{i_p}(x_p) \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}).$$

Comme  $\omega$  est alternée, les termes  $\omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$  sont nuls sauf peut-être si les indices  $i_1, \dots, i_p$  sont deux à deux distincts. En utilisant une permutation pour mettre ces indices dans l'ordre croissant, en utilisant la formule d'un déterminant et en utilisant que  $(f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_p})(x_1, \dots, x_p) = \det(f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq p}$  par la proposition A.17, on obtient que

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_p}.$$

Cette écriture est unique, car pour tous les  $i_1 < \dots < i_p$  et  $j_1 < \dots < j_p$ , l'expression

$$(f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_p})(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \det(f_{i_\alpha}(e_{j_\beta}))_{1 \leq \alpha, \beta \leq p}$$

est non nulle si et seulement si  $i_1 = j_1, \dots, i_p = j_p$ . Ceci montre le résultat.  $\square$

**Remarque.** Soit  $(f_1, \dots, f_n)$  une base de  $\check{E}$ . Pour toute partie  $I$  de cardinal  $p$  de  $\{1, \dots, n\}$ , notons

$$f_I = f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_p}$$

où  $I = \{i_1, \dots, i_p\}$  avec  $i_1 < \dots < i_p$ . Le résultat ci-dessus dit que  $(f_I)_I$ , pour  $I$  de cardinal  $p$ , est une base de  $\Lambda^p \check{E}$ . La table de multiplication de cette base est la suivante :

$$f_I \wedge f_J = \begin{cases} \pm f_{I \cup J} & \text{si } I \cap J = \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\pm = (-1)^k$  pour  $k$  le nombre de couples  $(i, j)$  dans  $I \times J$  tels que  $i > j$ .

On en déduit que la dimension de  $\Lambda^p \check{E}$  est  $C_n^p = \binom{n}{p}$ , pour  $n$  la dimension de  $\check{E}$ . Donc la dimension de l'espace vectoriel  $\Lambda^* \check{E}$  est  $\sum_{p=0}^n C_n^p = 2^n$ . En particulier, pour  $n$  la dimension de  $\check{E}$ , l'espace vectoriel  $\Lambda^n \check{E}$  est de dimension 1, engendré par  $f_1 \wedge \dots \wedge f_n$ , qui est l'application déterminant de  $n$  vecteurs dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ . Tout élément  $w$  de  $\Lambda^* \check{E}$  s'écrit de manière unique

$$w = \sum_I w_I f_I,$$

avec  $w_I$  dans  $K$ . De plus,  $w$  appartient à  $\Lambda^p \check{E}$  si et seulement si  $w_I = 0$  pour tout  $I$  de cardinal différent de  $p$ . Plus précisément, si  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base de  $E$ , dont la base duale est  $(f_1, \dots, f_n)$ , notons de même  $e^I$  le  $p$ -uplet  $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ . Alors la démonstration ci-dessus montre que pour tout  $\omega$  dans  $\Lambda^p \check{E}$ , on a

$$\omega = \sum_I \omega(e^I) f_I.$$

**Exercice E.64** Soient  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire entre deux espaces vectoriels  $E$  et  $F$  de dimension finie  $n$  et  $m$  respectivement,  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , de base duale  $(\check{e}_1, \dots, \check{e}_n)$ , et  $(f_1, \dots, f_m)$  une base de  $F$ , de base duale  $(\check{f}_1, \dots, \check{f}_m)$ . Si  $A$  est la matrice de  $f$  dans ces bases, calculer la matrice de l'application linéaire  $\omega \mapsto f^* \omega$  de  $\Lambda^* \check{F}$  dans  $\Lambda^* \check{E}$ , dans les bases  $(\check{f}_I)_I$  et  $(\check{e}_I)_I$ .

Soient  $X$  un élément de  $E$  et  $\omega \in \Lambda^p \check{E}$ . On appelle *produit intérieur* de  $\omega$  par  $X$ , et on note  $i_X \omega$ , la forme  $(p-1)$ -linéaire alternée (par convention,  $\Lambda^{-1} \check{E} = \{0\}$ ), définie par  $i_X \omega = 0$  si  $p = 0$ , et sinon, pour tous les  $\xi_1, \dots, \xi_{p-1}$  dans  $E$ ,

$$(i_X \omega)(\xi_1, \dots, \xi_{p-1}) = \omega(X, \xi_1, \dots, \xi_{p-1}).$$

On étend additivement l'application  $i_X$  à  $\Lambda^* \check{E}$ .

**Proposition A.20** L'application  $i_X : \Lambda^* \check{E} \rightarrow \Lambda^* \check{E}$  est une antiderivation de degré  $-1$  de l'algèbre graduée  $\Lambda^* \check{E}$ , i.e.

- (1)  $i_X : \Lambda^* \check{E} \rightarrow \Lambda^* \check{E}$  est linéaire et  $i_X(\Lambda^p \check{E}) \subset \Lambda^{p-1} \check{E}$  pour tout  $p$  dans  $\mathbb{N}$ .
- (2) pour tout  $\alpha$  dans  $\Lambda^p \check{E}$  et tout  $\beta$  dans  $\Lambda^q \check{E}$ , on a

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (i_X \beta).$$

**Démonstration.** L'assertion (1) est immédiate par définition. Pour montrer la seconde assertion, on raisonne par récurrence sur  $p$ . Le cas  $p = 0$  est immédiat par linéarité. Si  $p = 1$ , alors, en posant  $X_0 = X$ , pour tous les  $X_1, \dots, X_q$  dans  $E$ , on a

$$\begin{aligned} i_X(\alpha \wedge \beta)(X_1, \dots, X_q) &= (\alpha \wedge \beta)(X_0, X_1, \dots, X_q) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^{i+1} \alpha(X_i) \beta(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_q) \\ &= \alpha(X_0) \beta(X_1, \dots, X_q) - \sum_{i=1}^q (-1)^i \alpha(X_i) (i_X \beta)_x(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_q) \\ &= (i_X \alpha \wedge \beta)(X_1, \dots, X_q) - (\alpha \wedge i_X \beta)(X_1, \dots, X_q), \end{aligned}$$

ce qui montre le cas  $p = 1$ . Supposons maintenant  $p \geq 2$ , et supposons le résultat vrai au rang  $p-1$ . Par linéarité, on se ramène au cas où  $\alpha = \alpha' \wedge \alpha''$ , avec  $\alpha'$  de degré 1. Par l'associativité et la distributivité du produit extérieur, on conclut alors par les cas  $p = 1$  et  $p-1$  :

$$\begin{aligned} i_X(\alpha \wedge \beta) &= i_X(\alpha' \wedge (\alpha'' \wedge \beta)) = (i_X \alpha') \wedge (\alpha'' \wedge \beta) - \alpha' \wedge i_X(\alpha'' \wedge \beta) \\ &= (i_X \alpha') \wedge (\alpha'' \wedge \beta) - \alpha' \wedge ((i_X \alpha'') \wedge \beta + (-1)^{p-1} \alpha'' \wedge (i_X \beta)) \\ &= ((i_X \alpha') \wedge \alpha'' - \alpha' \wedge (i_X \alpha'')) \wedge \beta + (-1)^p \alpha' \wedge (\alpha'' \wedge (i_X \beta)) \\ &= (i_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (i_X \beta). \end{aligned}$$

□

**Remarque.** Le groupe  $GL(E)$  des automorphismes linéaires de  $E$  agit (à gauche) naturellement sur l'ensemble  $\Lambda^* \check{E}$ . En effet, posons

$$g \cdot \omega : (x_1, \dots, x_p) \mapsto ((g^{-1})^* \omega)(x_1, \dots, x_p) = \omega(g^{-1}(x_1), \dots, g^{-1}(x_p))$$

si  $g \in GL(E)$  et  $\omega \in \Lambda^p \check{E}$ . Cette action de  $GL(E)$  sur  $\Lambda^p \check{E}$  est linéaire, et s'étend par linéarité en une action de  $GL(E)$  sur  $\Lambda^* \check{E}$ , qui préserve la structure d'algèbre graduée de  $\Lambda^* \check{E}$ , c'est-à-dire pour tout  $g$  dans  $GL(E)$ , l'application  $\omega \mapsto g \cdot \omega$  est linéaire, envoie  $\Lambda^p \check{E}$  dans lui-même, et  $g \cdot (\omega \wedge \eta) = (g \cdot \omega) \wedge (g \cdot \eta)$  pour tous les  $\omega, \eta$  dans  $\Lambda^* \check{E}$ .

**Remarque.** On note  $\Lambda^* E = \Lambda^* \check{E}$ , que l'on appelle l'algèbre des *multi-vecteurs* de  $E$ . Par l'identification de  $\check{E}$  et de  $E$ , tout élément de  $\Lambda^p E$  (appelé *p-vecteur*) est combinaison linéaire de  $v_1 \wedge \dots \wedge v_p$  pour des  $v_1, \dots, v_p$  dans  $E$ . Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , alors  $(e_I)_{I \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})}$  est une base de  $\Lambda^* E$ , avec comme ci-dessus  $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$  où  $I = \{i_1, \dots, i_p\}$  avec  $i_1 < \dots < i_p$ . Si  $(f_1, \dots, f_n)$  est la base duale de  $(e_1, \dots, e_n)$ , alors pour tout  $p$ -vecteur  $v$ , on a comme ci-dessus

$$v = \sum_I v(f^I) e_I,$$

où la sommation porte sur toutes les parties de cardinal  $p$  de  $\{1, \dots, n\}$ . L'espace  $\Lambda^p E$  vérifie la propriété universelle suivante : pour toute application  $p$ -linéaire alternée  $u$  de  $E^p$  dans un espace vectoriel  $F$ , il existe une et une seule application linéaire  $f$  de  $\Lambda^p E$  dans  $F$  telle que pour tous les  $x_1, \dots, x_p$  dans  $E$ ,

$$u(x_1, \dots, x_p) = f(x_1 \wedge \dots \wedge x_p).$$

En effet, comme  $(e_I)_I$  est une base de  $\Lambda^p E$ , il suffit de définir  $f$  en demandant que  $f(e_I) = u(e^I)$ .

En particulier, le corollaire A.18 implique que des vecteurs  $v_1, \dots, v_k$  dans  $E$  sont linéairement indépendants si et seulement si leur produit extérieur  $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$  est un  $p$ -vecteur non nul.

On vérifie aisément qu'il existe une et une seule application bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\Lambda^p \check{E} \times \Lambda^p E \rightarrow K$ , telle que, pour  $x_1, \dots, x_p$  dans  $E$  et  $f_1, \dots, f_p$  dans  $\check{E}$ , on ait

$$\langle f_1 \wedge \dots \wedge f_p, x_1 \wedge \dots \wedge x_p \rangle = \det(f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq p}.$$

Cet accouplement induit un isomorphisme canonique de  $\Lambda^* \check{E}$  sur le dual de  $\Lambda^* E$ . De plus, si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , et si  $(\check{e}_1, \dots, \check{e}_n)$  est sa base duale, alors les bases  $(e_I)_I$  de  $\Lambda^* E$  et  $(\check{e}_I)_I$  de  $\Lambda^* \check{E}$  sont duales.

Si  $A$  est un espace vectoriel sur  $K$  muni d'une application bilinéaire  $\Phi : A \times A \rightarrow A$ , par exemple si  $A$  est une algèbre sur  $K$  avec sa multiplication, et en particulier si  $A$  est l'algèbre des matrices  $\mathcal{M}_n(K)$ , alors on définit de la même manière

l'espace, noté  $\Lambda^p(\check{E}, A)$  (respectivement  $\Lambda^*(\check{E}, A)$ ) des applications  $p$ -linéaires (respectivement multilinéaires) alternées à valeurs dans  $A$ . On définit de même le produit extérieur de deux éléments de  $\Lambda^*(\check{E}, A)$  (en remplaçant le produit de deux éléments de  $K$  par l'évaluation de  $\Phi$  sur deux éléments de  $A$ ). Si  $A$  est une algèbre associative unitaire, alors  $\Lambda^*(\check{E}, A)$  est encore une algèbre graduée associative unitaire. Mais elle n'est plus forcément anticommutative (par exemple si  $A$  est l'algèbre  $\mathcal{M}_n(K)$  avec  $n \geq 2$ ). Si  $A$  est de plus commutative (par exemple si  $K = \mathbb{R}$  et  $A = \mathbb{C}$ ), l'algèbre graduée associative unitaire  $\Lambda^*(\check{E}, A)$  est par contre anticommutative.

• **Exercice de révision.**

**Exercice E.65** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur un corps  $K$ , et  $f \in \mathcal{L}(E)$  une application linéaire de  $E$  dans  $E$ . Pour préciser, on note  $\Lambda^p \check{f} : \Lambda^p \check{E} \rightarrow \Lambda^p \check{E}$  l'application définie par  $\omega \mapsto f^* \omega$ .

- Montrer que l'application  $\Lambda^n \check{f} : \Lambda^n \check{E} \rightarrow \Lambda^n \check{E}$  est la multiplication par  $\det f$ .
- Montrer que

$$\det(f - \lambda \text{id}_V) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \text{tr}(\Lambda^{n-i} \check{f}) \lambda^i.$$

- En déduire que

$$\det(\text{id}_V + f) = \text{tr}(\Lambda^* \check{f} : \Lambda^* \check{E} \rightarrow \Lambda^* \check{E}).$$

## A.6 Rappels d'algèbre homologique

### • Catégories, foncteurs.

Une *catégorie*  $\mathcal{C}$  est la donnée

- d'une collection  $\text{Obj} = \text{Obj}_{\mathcal{C}}$ , dont les éléments sont appelés les *objets* de  $\mathcal{C}$ ,
- d'un ensemble  $\text{Mor}(X, Y) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  pour tous les  $X, Y$  dans  $\text{Obj}$ , dont les éléments sont appelés les *morphismes* (ou *flèches*) de  $X$  dans  $Y$  dans la catégorie  $\mathcal{C}$ ,
- d'un élément  $\text{Id} = \text{Id}_{\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)}$  (appelé (*morphisme*) *identité* de  $X$  dans  $X$ ) dans l'ensemble  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$  pour tout  $X$  dans  $\text{Obj}$ , et
- d'une application  $\circ$  (appelée *composition*) de  $\text{Mor}(X, Y) \times \text{Mor}(Y, Z)$  dans  $\text{Mor}(X, Z)$  pour tous les  $X, Y, Z$  dans  $\text{Obj}$ ,

telle que

$$f \circ \text{Id} = \text{Id} \circ f = f$$

et

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux catégories. Un *foncteur* (covariant)  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}'$  est la donnée

- pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , d'un objet  $\mathcal{F}(X)$  de  $\mathcal{C}'$ ,
- pour tout morphisme  $f$  dans l'ensemble  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ , d'un morphisme  $\mathcal{F}(f)$  dans l'ensemble  $\text{Mor}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$ ,

telle que

$$\mathcal{F}(\text{Id}) = \text{Id}$$

et

$$\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g).$$

Un foncteur *contravariant* de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}'$  est une telle donnée, sauf que maintenant  $\mathcal{F}(f) \in \text{Mor}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(X))$ , et qui au lieu de la dernière condition vérifie la condition

$$\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f).$$

Une *sous-catégorie*  $\mathcal{C}'$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  est la donnée d'une sous-collection  $\text{Obj}_{\mathcal{C}'}$  de  $\text{Obj}_{\mathcal{C}}$ , et d'un sous-ensemble  $\text{Mor}_{\mathcal{C}'}(X, Y)$  de  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  pour tous les  $X, Y$  dans  $\text{Obj}_{\mathcal{C}'}$ , telle que  $\text{Mor}_{\mathcal{C}'}(X, X)$  contienne  $\text{Id}_{\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)}$  et que la composition préserve les  $\text{Mor}_{\mathcal{C}'}(X, Y)$ . Une sous-catégorie de  $\mathcal{C}$ , munie des identités et des compositions de  $\mathcal{C}$ , est une catégorie.

Par exemple, la *catégorie des ensembles* a pour objets les ensembles, pour morphismes les applications entre ensembles, pour identités les applications identités, et pour compositions les compositions d'applications.

Beaucoup des catégories que nous rencontrerons sont des catégories, dites *d'ensembles décorés*, dont les objets sont des ensembles munis de structures additionnelles, et dont les morphismes sont certaines applications entre ces ensembles, et où les identités sont les applications identités, et la composition est la composition

des applications. Une telle catégorie est muni d'un foncteur évident, dit *foncteur oubli*, à valeurs dans la catégorie des ensembles, qui associe à un ensemble muni de structures additionnelles cet ensemble lui-même.

Par exemple, la *catégorie des espaces topologiques* est une catégorie d'ensembles décorés, dont les objets sont les espaces topologiques et les morphismes sont les applications continues, et dont le foncteur oubli est l'association à un espace topologique de son ensemble sous-jacent. On définit de même la *catégorie TOP des variétés topologiques*, celle  $\text{TOP}_n$  des *variétés topologiques de dimension  $n$* , qui sont des sous-catégories de la catégorie des espaces topologiques.

La *catégorie  $\text{DIFF}_k$  des variétés différentielles de classe  $C^k$*  est aussi une catégorie d'ensembles décorés, dont les objets sont les variétés différentielles de classe  $C^k$  et les morphismes sont les applications de classe  $C^k$ , et dont le foncteur oubli est l'association à une variété différentielle de son ensemble sous-jacent (on oublie à la fois la topologie et l'atlas maximal de cartes).

De nombreuses catégories seront définies dans ce cours.

- La catégorie  $\text{DIFF}_k$  des variétés différentielles de classe  $C^k$  (paragraphe 1.3).
- La catégorie  $\text{DIFF}_k(n)$  des variétés différentielles de classe  $C^k$  et de dimension  $n$  (paragraphe 1.3).
- La catégorie des fibrations de classe  $C^k$  (paragraphe 2.6).
- La catégorie des fibrés vectoriels de classe  $C^k$  (paragraphe 2.2).
- La catégorie des fibrés vectoriels de classe  $C^k$  et de rang  $n$  (paragraphe 2.2).
- La catégorie des revêtements (paragraphe A.4).

De nombreux foncteurs seront définis dans ce cours.

- Le foncteur  $\mathbb{P}$  de la catégorie dont les objets sont les espaces vectoriels de dimension finie sur  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$  et les flèches les applications linéaires injectives, dans la catégorie des variétés différentielles  $K$ -analytiques, qui à un espace vectoriel  $V$  associe l'espace projectif  $\mathbb{P}(V)$  (paragraphe 1.4.3).
- Le foncteur  $\mathcal{G}_k$  de la catégorie dont les objets sont les espaces vectoriels de dimension finie sur  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$  et les flèches les applications linéaires injectives, dans la catégorie des variétés différentielles  $K$ -analytiques, qui à un espace vectoriel  $V$  associe la variété grassmannienne  $\mathcal{G}_k(V)$  (paragraphe 1.4.3).
- Le foncteur  $\mathcal{G}_k$  de la catégorie des fibrés vectoriels de classe  $C^k$  et des morphismes de fibrés vectoriels injectifs sur les fibres dans la catégorie des fibrations de classe  $C^k$ , qui à un fibré vectoriel associe sa fibration grassmannienne (paragraphe 2.6).
- Le foncteur  $T$ , de la catégorie  $\text{DIFF}_{k+1}(n)$  des variétés différentielles de classe  $C^{k+1}$  et de dimension  $n$ , dans la catégorie des fibrés vectoriels de classe  $C^k$  et de rang  $n$ , qui à une variété associe son fibré tangent (paragraphe 2.3 et 2.4).
- Le foncteur contravariant de la sous-catégorie de la catégorie  $\text{DIFF}_{k+1}$ , formée des variétés différentielles de classe  $C^{k+1}$  et des morphismes étales entre ces variétés, à valeur dans la catégorie des espaces vectoriels réels, qui à une

variété  $M$  de classe  $C^{k+1}$  associe l'espace vectoriel réel  $\Gamma_k(TM)$  des champs de vecteurs  $C^k$  sur  $M$ , et à un morphisme étale  $f$  associe l'application linéaire  $X \mapsto f^*X$  (paragraphes 3.1 et 3.2).

- Le foncteur contravariant de la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps donné  $K$ , dans la catégorie des algèbres (associatives unitaires) graduées anti-commutatives sur  $K$ , qui à un tel espace vectoriel  $E$  associe  $\Lambda^* \hat{E}$ , et à une application linéaire  $f$  associe le morphisme  $f^*$  (gradué de degré 0) (paragraphe A.5).
- Le foncteur contravariant de la catégorie  $\text{DIFF}_\infty(n)$  des variétés différentielles de classe  $C^\infty$  et de dimension  $n$ , dans la catégorie des fibrés vectoriels de classe  $C^\infty$  et de rang  $2^n$ , qui à une variété associe son fibré des formes alternées (voir paragraphe 2.7). On peut définir aussi le foncteur contravariant de la catégorie des fibrés vectoriels  $C^k$  dans elle-même, qui à un fibré vectoriel  $E$  associe le fibré vectoriel  $\Lambda^* \hat{E}$ .
- Le foncteur contravariant de la catégorie des variétés  $C^\infty$  et des applications  $C^\infty$ , dans la catégorie des algèbres graduées (associatives unitaires) anticommutatives, et des morphismes d'algèbres graduées unitaires, qui à une variété  $M$  associe son algèbre des formes différentielles  $\Omega(M)$  et à une application  $f : M \rightarrow N$  associe  $f^* : \Omega(N) \rightarrow \Omega(M)$  (paragraphe 4.1).
- Le foncteur contravariant *cohomologie de de Rham*  $H_{\text{DR}}^*$ , de la catégorie des variétés  $C^\infty$  et des applications continues entre ces variétés, dans la catégorie des algèbres graduées (associatives unitaires) anticommutatives, et des morphismes d'algèbres graduées unitaires, qui à une variété  $M$  associe l'algèbre  $H_{\text{DR}}^*(M)$  et à une application  $f : M \rightarrow N$  associe le morphisme  $f^* : H_{\text{DR}}^*(N) \rightarrow H_{\text{DR}}^*(M)$  (paragraphe 4.2).
- Le foncteur contravariant *cohomologie de de Rham à support compact*  $H_{\text{DR},c}^*$ , de la catégorie des variétés  $C^\infty$  et des applications continues propres entre ces variétés, dans la catégorie des algèbres graduées (associatives pas forcément unitaires) anticommutatives, et des morphismes d'algèbres graduées, qui à une variété  $M$  associe l'algèbre  $H_{\text{DR},c}^*(M)$  et à une application  $f : M \rightarrow N$  associe le morphisme  $f^* : H_{\text{DR},c}^*(N) \rightarrow H_{\text{DR},c}^*(M)$  (paragraphe 4.4).
- Le foncteur *compactification d'Alexandrov* de la catégorie des espaces topologiques localement compacts et des applications continues propres, à valeurs dans la catégorie des espaces topologiques compacts et des applications continues, qui à un espace topologique localement compact  $X$  associe son compactifié d'Alexandrov  $\hat{X}$ , et à une application continue propre  $f$  entre deux espaces topologiques localement compacts associe son unique extension  $\hat{f}$  aux compactifiés d'Alexandrov de ces espaces (voir l'exercice E.48 dans l'appendice A.1).

#### • Complexes de cochaînes.

On renvoie par exemple à [Spa, ES, CE] pour des compléments d'algèbre homologique.

Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire. Par module, on entend module sur  $A$ .

On rappelle que les modules sur l'anneau  $\mathbb{Z}$  sont les groupes abéliens, et les modules sur un corps sont les espaces vectoriels. On rappelle qu'une suite finie ou infinie de morphismes de modules

$$\dots \rightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+2} \rightarrow \dots$$

est *exacte* si  $\ker f_{n+1} = \text{im } f_n$  pour tout  $n$  tel que  $f_{n+1}$  et  $f_n$  soient définis.

Un *complexe de cochaînes*  $C = (C^*, \partial^*)$  est une suite de modules  $(C^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et de morphismes de modules  $(\partial^n : C^n \rightarrow C^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$

$$C^0 \xrightarrow{\partial} C^1 \xrightarrow{\partial} C^2 \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C^n \xrightarrow{\partial} C^{n+1} \xrightarrow{\partial} \dots$$

tels que

$$\partial^{n+1} \circ \partial^n = 0$$

pour tout entier  $n$ . Les  $\partial^n$  sont appelés les *morphismes de cobord* (ou différentielles), et notés  $\partial$  quand  $n$  est sous-entendu. On pose par convention  $C^{-1} = 0$  et  $\partial^{-1} = 0$ .

On définit les objets suivants.

- Un *morphisme de complexes de cochaînes*  $f : C \rightarrow D$  est une suite de morphismes de modules  $(f^n : C^n \rightarrow D^n)_{n \in \mathbb{N}}$  tels que  $f^{n+1} \circ \partial^n = \partial^n \circ f^n$  pour tout entier  $n$ .

$$\begin{array}{ccccccc} C^0 & \xrightarrow{\partial^0} & C^1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & C^n & \xrightarrow{\partial^n} & C^{n+1} & \longrightarrow & \dots \\ f^0 \downarrow & & \downarrow f^1 & & & & f^n \downarrow & & \downarrow f^{n+1} & & \\ D^0 & \xrightarrow{\partial^0} & D^1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & D^n & \xrightarrow{\partial^n} & D^{n+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

- L'*espace des  $n$ -cocycles* est  $Z^n(C) = \ker(\partial : C^n \rightarrow C^{n+1})$ . L'*espace des  $n$ -cobords* est  $B^n(C) = \text{im}(\partial : C^{n-1} \rightarrow C^n)$ , qui est un sous-module de  $Z^n(C)$ . Le  *$n$ -ème groupe de cohomologie* de  $C$  (qui est un module) est le module quotient  $H^n(C) = Z^n(C)/B^n(C)$ , et le module (gradué) de cohomologie de  $C$  est

$$H^*(C) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^n(C).$$

- L'*application induite en cohomologie* par un morphisme de complexes de cochaînes  $f : C \rightarrow D$  est le morphisme de modules  $f^* : H^n(C) \rightarrow H^n(D)$  défini par  $f^*([z]) = [f^n(z)]$  si  $z$  est un  $n$ -cocycle de  $D$ .
- Si  $A$  est un corps, la *caractéristique d'Euler-Poincaré* d'un complexes de cochaînes  $C$  tel que l'espace vectoriel  $C^n$  sur  $A$  soit de dimension finie pour tout  $n$ , et nulle pour tout  $n$  assez grand, est définie par

$$\chi(C) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i \dim C^i.$$

- Une *suite exacte (courte)* de complexes de chaînes est la donnée notée

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

de complexes de cochaînes  $C, D, E$  et de morphismes de complexes de cochaînes  $f : C \rightarrow D, g : D \rightarrow E$  tels que, pour tout  $n$ , la suite de morphismes de modules

$$0 \longrightarrow C^n \xrightarrow{f^n} D^n \xrightarrow{g^n} E^n \longrightarrow 0$$

soit exacte.

- Un *morphisme de suites exactes (courtes) de complexes de cochaînes* est un triplet  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de morphismes de complexes de cochaînes tel que le diagramme suivant soit commutatif en tout degré  $n$  :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{f'} & D' & \xrightarrow{g'} & E' & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

**Remarques** (1) Le module  $H^n(C)$  mesure l'obstruction d'un cocycle à être un cobord (un  $n$ -cocycle étant un cobord si et seulement si son image dans  $H_n(C)$  est nulle), ainsi que l'obstruction de la suite

$$C^0 \xrightarrow{\partial} C^1 \xrightarrow{\partial} C^2 \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C^n \xrightarrow{\partial} C^{n+1} \xrightarrow{\partial} \dots$$

à être exacte (c'est-à-dire à vérifier  $\ker \partial^n = \text{im } \partial^{n-1}$  pour tout  $n$ .)

(2) Un morphisme de complexes de cochaînes  $\phi : C \rightarrow D$  envoie cocycles sur cocycles et cobords sur cobords en chaque degré, ce qui montre que l'application induite en cohomologie par un morphisme de complexes de cochaînes est bien définie.

(3) On définit une catégorie des complexes de cochaînes sur l'anneau  $A$ , dont les objets sont les complexes de cochaînes et les morphismes les morphismes de cochaînes. Le morphisme identité, noté  $\text{id}$ , d'un complexe de cochaînes  $C$  est la suite  $(\text{id} : C^n \rightarrow C^n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Si  $f : C \rightarrow D$  et  $g : D \rightarrow E$  sont des morphismes de cochaînes, alors le morphisme de cochaînes  $g \circ f : C \rightarrow E$  défini par  $(g \circ f)_n = g_n \circ f_n$  est la composition de  $f$  et de  $g$ .

Pour les applications induites en cohomologie, on a  $(g \circ f)^* = g^* \circ f^*$  et  $\text{id}^* = \text{id}$ . Ainsi  $C \mapsto H^*(C)$  et  $f \mapsto f^*$  est un foncteur (covariant) de la catégorie des complexes de cochaînes sur  $A$  dans la catégorie des  $A$ -modules gradués.

De même, les suites exactes (courtes) de complexes de cochaînes et les morphismes de suites exactes (courtes) de complexes de cochaînes forment une catégorie, pour la composition et les morphismes identité évidents.

**Proposition A.21** Si  $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$  est une suite exacte courte de complexes de cochaînes, il existe une suite exacte longue de modules

$$\dots \rightarrow H^{n-1}(E) \xrightarrow{\delta} H^n(C) \xrightarrow{f^*} H^n(D) \xrightarrow{g^*} H^n(E) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(C) \rightarrow \dots$$

telle que si  $(\alpha, \beta, \gamma)$  est un morphisme de suites exactes de complexes de cochaînes, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & H^n(C) & \xrightarrow{f^*} & H^n(D) & \xrightarrow{g^*} & H^n(E) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(C) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \alpha^* & & \downarrow \beta^* & & \downarrow \gamma^* & & \downarrow \alpha^* & & \\ \dots & \longrightarrow & H^n(C') & \xrightarrow{f'^*} & H^n(D') & \xrightarrow{g'^*} & H^n(E') & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(C') & \longrightarrow & \dots \end{array} .$$

**Démonstration.** (1) Construisons tout d'abord le morphisme

$$\delta : H^n(E) \rightarrow H^{n+1}(C) .$$

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ 0 & \longrightarrow & C^n & \xrightarrow{f^n} & D^n & \xrightarrow{g^n} & E^n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ 0 & \longrightarrow & C^{n+1} & \xrightarrow{f^{n+1}} & D^{n+1} & \xrightarrow{g^{n+1}} & E^{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \end{array} .$$

Soit  $z$  un  $n$ -cocycle de  $E$ . Il s'agit de lui associer un  $(n+1)$ -cocycle  $x$  de  $C$  (bien défini modulo un cobord). Comme  $g^n$  est surjective, il existe  $y \in D^n$  tel que  $g^n(y) = z$ . On considère  $\partial y \in D^{n+1}$ . Comme  $g^{n+1}(\partial y) = \partial g^n(y) = \partial z = 0$ , par exactitude, il existe  $x \in C^{n+1}$  tel que  $f^{n+1}(x) = \partial y$ . On pose donc

$$\delta[z] = [x] .$$

Vérifions que  $\delta$  est bien défini. Tout d'abord,  $x$  est bien un cocycle, car

$$f^{n+2}(\partial x) = \partial f^{n+1}(x) = \partial \partial y = 0,$$

et comme  $f^{n+2}$  est injective, on en déduit que  $\partial x = 0$ .

De plus,  $[x]$  ne dépend pas des choix du représentant  $z$  de  $[z]$  et des éléments  $y, x$  comme ci-dessus. En effet, si  $(z', y', x')$  est un autre choix, alors comme  $[z'] = [z]$ , on a  $z' - z = \partial z''$  avec  $z'' \in E^{n-1}$ . Soit  $y'' \in D^{n-1}$  tel que  $z'' = g^{n-1}(y'')$ , qui existe par surjectivité de  $g^{n-1}$ . Alors

$$g^n(y' - y - \partial y'') = z' - z - \partial z'' = 0,$$

donc par exactitude, il existe  $x'' \in C^n$  tel que  $y' - y - \partial y'' = f^n(x'')$ . Comme

$$f^{n+1}(x' - x - \partial x'') = \partial y' - \partial y - \partial f^n(x'') = \partial \partial y'' = 0,$$

par injectivité de  $f^{n+1}$ , on a  $x' = x + \partial x''$ , donc  $[x'] = [x]$ .

(2) Vérifions l'exactitude au niveau de  $H^n(D)$ .

Comme  $g^* \circ f^* = (g \circ f)^* = 0$ , on a  $\text{im } f^* \subset \ker g^*$ .

Réciproquement, soit  $[y] \in \ker g^*$ . Comme  $0 = g^*([y]) = [g^n(y)]$ , il existe  $z \in E^{n-1}$  tel que  $g^n(y) = \partial z$ . Par surjectivité de  $g^{n-1}$ , il existe  $y' \in D^{n-1}$  tel que  $z = g^{n-1}(y')$ . Comme  $g^n(y - \partial y') = 0$ , par exactitude, il existe  $x \in C^n$  tel que  $y - \partial y' = f^n(x)$ . De plus,  $x$  est un cocycle, car  $f^{n+1}$  est injective et

$$f^{n+1}(\partial x) = \partial f^n(x) = \partial y - \partial \partial y' = 0$$

car  $y$  est un cocycle. Enfin,  $f^*([x]) = [f^n(x)] = [y]$ , donc  $[y] \in \text{im } f^*$ .

(3) Vérifions l'exactitude au niveau de  $H^n(E)$ .

Montrons que  $\text{im } g^* \subset \ker \delta$ . Si  $y$  est un  $n$ -cocycle de  $D$ , par construction de  $\delta$ , on a  $\delta([g^n(y)]) = [x]$  où  $f^{n+1}(x) = \partial y$ . Comme  $y$  est un cocycle et  $f^{n+1}$  est injective, on a donc  $\delta \circ g^* = 0$ , ce qui prouve le résultat.

Réciproquement, montrons que  $\ker \delta \subset \text{im } g^*$ . Soit  $z$  un  $n$ -cocycle de  $E$  tel que  $\delta([z]) = 0$ . Par construction, il existe  $y \in D^n$  et  $x \in C^{n+1}$  tels que  $z = g^n(y)$ ,  $f^{n+1}(x) = \partial y$  et  $[x] = \delta([z]) = 0$ . Soit  $x' \in C^n$  tel que  $x = \partial x'$ . On pose  $y' = y - f^n(x')$ , qui est un  $n$ -cocycle de  $D$ . Alors  $g^n(y') = z$ , donc  $g^*([y']) = [z]$ , ce qui montre le résultat.

Les autres vérifications sont laissées en exercice.  $\square$

La seule classe d'exemples de complexes de cochaînes qui apparaît dans ce cours est la suivante. Soient  $M$  et  $N$  deux variétés  $C^\infty$ , et  $f : M \rightarrow N$  une application  $C^\infty$  (respectivement  $C^\infty$  et propre). Soient  $\Omega^p(M)$  (respectivement  $\Omega_c^p(M)$ ) l'espace vectoriel réel des  $p$ -formes différentielles  $C^\infty$  (respectivement  $C^\infty$  et à support compact) sur  $M$  et  $d = d_{|\Omega^p(M)} : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$  la différentielle extérieure des formes différentielles (respectivement sa restriction  $d = d_{|\Omega_c^p(M)} : \Omega_c^p(M) \rightarrow \Omega_c^{p+1}(M)$ ). Alors

$$(\Omega^p(M), d_{|\Omega^p(M)})_{p \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (\Omega_c^p(M), d_{|\Omega_c^p(M)})_{p \in \mathbb{N}}$$

sont des complexes de cochaînes. De plus, si  $f^* : \Omega^p(N) \rightarrow \Omega^p(M)$  (respectivement  $f^* : \Omega_c^p(N) \rightarrow \Omega_c^p(M)$ ) est l'application image réciproque par  $f$  des formes différentielles, qui commute avec la différentielle extérieure, alors

$$f^* : (\Omega^p(N), d_{|\Omega^p(N)})_{p \in \mathbb{N}} \rightarrow (\Omega^p(M), d_{|\Omega^p(M)})_{p \in \mathbb{N}}$$

et

$$f^* : (\Omega_c^p(N), d_{|\Omega_c^p(N)})_{p \in \mathbb{N}} \rightarrow (\Omega_c^p(M), d_{|\Omega_c^p(M)})_{p \in \mathbb{N}}$$

sont des morphismes de complexes de cochaînes.

On termine cet appendice par un exercice d'algèbre linéaire.

**Exercice E.66 (Lemme des cinq)** *On considère le diagramme commutatif suivant de modules, dont les flèches sont des morphismes de modules, et dont les lignes sont exactes :*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array} .$$

*Si les première, seconde, quatrième et cinquième flèches verticales sont des isomorphismes, alors la troisième aussi.*

## A.7 Indications pour la résolution des exercices

**Exercice E.49** Si  $A$  est l'intersection d'un ouvert  $U$  et d'un fermé  $F$ , alors  $U$  est un voisinage de tout point de  $A$ , tel que  $U \cap A = F \cap U$ , qui est fermé dans  $U$ . Si tout point admet un voisinage ouvert  $U$  dans  $X$  tel que  $A \cap U$  soit fermé dans  $U$ , alors  $A \cap U = F \cap U$  pour  $F$  un fermé de  $X$ , et  $A \cap U \subset \overline{A} \cap U \subset \overline{F} \cap U = A \cap U$ , donc  $A \cap U = \overline{A} \cap U$  et  $A$  est ouvert dans  $\overline{A}$ . Enfin, si  $A$  est ouvert dans  $\overline{A}$ , alors il existe un ouvert  $U$  de  $X$  tel que  $A = \overline{A} \cap U$ , donc  $A$  est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé.

**Exercice E.50** Soit  $U$  un ouvert de  $X$ , alors  $U \cap X_i$  est un ouvert de  $X_i$ . Donc tout ouvert de  $X_i$  pour la topologie induite est un ouvert de  $X_i$  pour la topologie originelle. Réciproquement, si  $U$  est un ouvert de  $X_i$  pour la topologie originelle (par exemple  $U = X_i$ ), alors pour tout  $j$ , la partie  $U \cap X_j = U \cap (X_i \cap X_j)$  est un ouvert de  $X_i$ , donc de  $X_j$ , donc  $U$  est un ouvert de  $X$ . Ceci montre le résultat.

**Exercice E.52** Supposons que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  possède une différentielle partout non nulle, et que son image soit  $\{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ . Notons  $f(x) = (a(x), b(x))$ . On peut supposer sans perte de généralité que  $f(0) = 0$ .

La fonction  $b$  atteint un minimum en 0, donc  $b'(0) = 0$ . Ainsi,  $|b(x)| = o(x)$  au voisinage de 0. Comme  $|a(x)| = |b(x)|$ , on en déduit  $a(x) = o(x)$ , puis  $a'(0) = 0$ . Ainsi,  $f'(0) = 0$ , ce qui est absurde.

Si on retire la condition de non-nullité de  $f'$ , on peut par exemple prendre  $f(x) = (x^3, |x^3|)$  (et on peut même prendre un exemple  $C^\infty$  avec  $(xe^{-1/x^2}, |x|e^{-1/x^2})$ ).

**Exercice E.54** On peut supposer sans perte de généralité que  $E = F = \mathbb{R}^n$ , pour un  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , dans l'énoncé du théorème d'inversion locale, que  $E = \mathbb{R}^n$  et  $F = G = \mathbb{R}^m$ , pour des  $n, m$  dans  $\mathbb{N}$ , dans celui des fonctions implicites, et que tous les points particuliers ( $x$  et  $f(x)$  dans l'énoncé du théorème d'inversion locale,  $a$  et  $b$  dans celui des fonctions implicites) sont égaux à 0.

Montrons que le théorème d'inversion locale implique celui des fonctions implicites. Soit  $h(x, y) = (x, f(x, y))$ . Alors  $h$  est définie sur un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , de classe  $C^1$  et sa différentielle est inversible. On peut donc trouver un voisinage ouvert  $V \times W$  de 0 sur lequel  $h$  et  $h^{-1}$  sont définies, de classe  $C^1$  et injectives. Notons  $g : x \mapsto \text{pr}_2 \circ h^{-1}(x, 0)$ , qui est de classe  $C^1$  et définie sur  $V$ . On prend  $V' \subset V$  tel que  $g(V') \subset W$ . On a alors

$$\{(x, y) \in V' \times W : f(x, y) = 0\} = \{(x, g(x)) : x \in V'\}.$$

Montrons l'inclusion du membre de droite dans celui de gauche : nous avons  $(x, 0) = h(x, g(x)) = (x, f(x, g(x)))$  donc  $f(x, g(x)) = 0$ . Montrons l'inclusion opposée : si  $f(x, y) = 0$ , alors

$$h(x, g(x)) = (x, 0) = (x, f(x, y)) = h(x, y),$$

donc  $y = g(x)$ , par injectivité de  $h$  sur  $V' \times W$ .

Montrons que le théorème des fonctions implicites implique celui d'inversion locale. Soit  $h$  l'application définie sur un voisinage de  $(0,0)$  dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  par  $h(x,y) = f(y) - x$ . Alors  $\partial_y h(0,0) = df_0$  est inversible, donc le théorème des fonctions implicites donne l'existence d'un voisinage  $V \times W$  de  $(0,0)$  et d'une fonction  $g : V \rightarrow W$  de classe  $C^1$  tels que

$$\{(x,y) \in V \times W : f(y) = x\} = \{(x,g(x)) : x \in V\}.$$

Pour  $y$  assez proche de 0, on a  $f(y) \in V$  et  $y \in W$ , si bien que, en posant  $x = f(y)$ , on a  $y = g(x)$ , puis  $y = g \circ f(y)$ . Ainsi,  $g \circ f = \text{id}$  au voisinage de 0, et on montre de même que  $f \circ g = \text{id}$  au voisinage de 0.

**Exercice E.55** (1) Notons  $a_1, \dots, a_n$  les colonnes de la matrice  $A$  et  $h_1, \dots, h_n$  celles de  $H$ . En utilisant la multilinéarité du déterminant, on vérifie que

$$\det(A+H) = \det(a_1, \dots, a_n) + \sum_{k=1}^n \det(a_1, \dots, a_{k-1}, h_k, a_{k+1}, \dots, a_n) + O(\|H\|^2).$$

Ainsi, la différentielle du déterminant est donnée par

$$d(\det)_A(H) = \sum_{k=1}^n \det(a_1, \dots, a_{k-1}, h_k, a_{k+1}, \dots, a_n).$$

En particulier, si  $A$  est inversible, alors on vérifie que

$$d(\det)_A : H \mapsto \det A \operatorname{tr} A^{-1}H,$$

en montrant, en utilisant la formule de l'inverse d'une matrice, que les applications linéaires  $d(\det)_A$  et  $H \mapsto \det A \operatorname{tr} A^{-1}H$  coïncident sur la base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  formée des matrices élémentaires  $E_{k,\ell}$  pour  $1 \leq k, \ell \leq n$ , où les coefficients de  $E_{k,\ell}$  sont nuls sauf celui en position  $(k, \ell)$ , qui vaut 1.

Supposons que  $d(\det)_A = 0$ . Pour  $1 \leq k, \ell \leq n$ , l'équation  $d(\det)_A(E_{k,\ell}) = 0$  montre que le mineur de taille  $n-1$  de  $A$  obtenu en supprimant la  $k$ -ème ligne et la  $\ell$ -ème colonne de  $A$  est nul. Ainsi,  $d(\det)_A = 0$  si et seulement si tous les mineurs de taille  $n-1$  de  $A$  sont nuls, c'est-à-dire si et seulement si le rang de  $A$  est strictement inférieur à  $n-1$ .

(2) Soient  $A$  un élément de  $X$ ,  $E$  une droite vectorielle dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $d(\det)_A$  ne soit pas nul sur  $E$ , et  $F$  un supplémentaire de  $E$ , si bien que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est canoniquement identifié à  $E \times F$ . On va appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction  $\phi$  donnée sur  $E \times F$  par  $\phi(M) = \det(M) - 1$ . Comme  $d\phi_A$  est non nul sur  $E$ , il existe un ouvert  $U$  de  $F$  et un ouvert  $V$  de  $E$  tels que  $A \in U \times V$ , et une application  $\psi : U \rightarrow V$  de classe  $C^\infty$  telle que

$$\{B \in U \times V : \phi(B) = 0\} = \{(C, \psi(C)) : C \in U\}.$$

Pour conclure, on prend  $f(C) = (C, \psi(C))$ , qui est manifestement un homéomorphisme sur son image dont l'inverse est donné par la première projection, et dont la différentielle est partout injective.

(3) Les arguments sont les mêmes que dans la question précédente, à ceci près que, si on part de  $A \in X$ , il faudra se restreindre à un voisinage  $W$  de  $A$  sur lequel  $\{B \in W : \det(B) = 0\} \subset X$ . Cela ne pose pas de problème puisque le rang est semi-continu inférieurement.

(4) Soit  $X$  l'ensemble des matrices de rang au plus  $n-1$ . Supposons qu'il existe une application  $f$  définie sur un voisinage  $U$  de 0 dans  $\mathbb{R}^{n^2-1}$  vérifiant les propriétés indiquées, avec  $f(0) = 0$ . Comme  $n \geq 2$ , la matrice  $E_{k,l}$  appartient à  $X$ . Pour  $t$  assez petit, il existe donc un élément  $e_{k,l}(t)$  de  $U$  tel que  $f(e_{k,l}(t)) = tE_{k,l}$ . Comme  $f$  est un homéomorphisme sur son image,  $e_{k,l}(t)$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers 0. La suite  $\frac{e_{k,l}(1/p)}{\|e_{k,l}(1/p)\|}$  appartient à la sphère unité compacte de  $\mathbb{R}^{n^2-1}$ , on peut donc supposer qu'elle converge vers un vecteur  $v_{k,l}$  de norme 1. Alors

$$df_0(v_{k,l}) = \lim \frac{f(e_{k,l}(1/p))}{\|e_{k,l}(1/p)\|}.$$

Comme  $f(e_{k,l}(1/p))$  est proportionnel à la matrice  $E_{k,l}$ , on obtient en passant à la limite que  $df_0(v_{k,l}) = \lambda E_{k,l}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Comme  $df_0$  est injective,  $\lambda \neq 0$ . Ainsi, l'image de l'application linéaire  $df_0$  contient toutes les matrices  $E_{k,l}$ . C'est absurde puisque  $df_0$  est définie sur un espace de dimension  $n^2-1$ .

**Exercice E.57**

(Démonstration du corollaire A.5) Quitte à appliquer un isomorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^n$ , on peut supposer que l'image de  $df_0$  soit engendrée par les  $p$  premiers vecteurs de base de  $\mathbb{R}^n$ . Soit alors

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_p) + (0, \dots, 0, x_{p+1}, \dots, x_n).$$

La différentielle de  $g$  en 0 est inversible, donc  $\psi = g^{-1}$  est bien définie au voisinage de 0. Ainsi, au voisinage de 0,

$$(x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0) = \psi \circ g(x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0) = \psi \circ f(x_1, \dots, x_p).$$

(Démonstration du corollaire A.6) Quitte à appliquer un isomorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^n$ , on peut supposer que les images par  $df_0$  des  $q$  premiers vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  forment une base de  $\mathbb{R}^q$ . Soit alors

$$g : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f(x_1, \dots, x_n), x_{q+1}, \dots, x_n).$$

L'application  $g$  est de classe  $C^k$  au voisinage de 0, envoie 0 sur 0, et sa différentielle en 0 est inversible. Par le théorème A.2 d'inversion locale,  $\varphi = g^{-1}$  est un  $C^k$ -difféomorphisme local de  $\mathbb{R}^n$  en 0, et, en considérant les  $q$  premières coordonnées de  $g \circ \varphi = \text{id}$ , on a, au voisinage de 0,

$$f \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_q).$$

(Démonstration du corollaire A.7) Notons  $(e_1, \dots, e_p)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^p$  et  $(f_1, \dots, f_q)$  celle de  $\mathbb{R}^q$ . Nous pouvons supposer, quitte à appliquer un isomorphisme linéaire à la source et au but, que  $df_0(e_i) = f_i$  pour  $i = 1, \dots, r$ , et  $df_0(e_i) = 0$  pour  $i = r + 1, \dots, p$ .

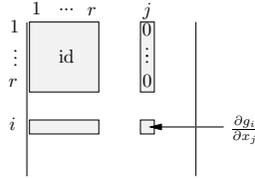
Soit  $\pi$  la projection sur les  $r$  premières composantes dans  $\mathbb{R}^q$ , et

$$F : (x_1, \dots, x_p) \mapsto (\pi(f(x_1, \dots, x_p)), x_{r+1}, \dots, x_p).$$

Comme  $F$  est de classe  $C^k$  et  $dF_0 = \text{id}$ , l'application  $F$  admet un inverse local  $G$ , qui vérifie  $\pi \circ f \circ G(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r)$ . Autrement dit, en faisant un changement de coordonnées à la source, on s'est ramené au cas où

$$f(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_r, g(x_1, \dots, x_p)).$$

Soient  $i, j > r$ . Pour  $x$  proche de 0, considérons le mineur de  $Jf_x$ , obtenu en ne gardant que les  $r$  premières lignes et colonnes, la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne. Ce mineur est nul, puisque  $df_x$  est de rang  $r$ .



Donc  $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) = 0$ . Ainsi,  $g_i(x_1, \dots, x_p) = g_i(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ . Donc

$$f(x_1, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

Considérons maintenant  $f$  restreinte à  $\mathbb{R}^r \times \{0\}$  : elle est immersive en 0, si bien qu'on peut la transformer au voisinage de 0 en  $(x_1, \dots, x_r) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$  par un  $C^k$ -difféomorphisme local au but. Ceci conclut.

**Remarque.** Ce résultat est moins anodin qu'il n'y paraît. Essayez par exemple de montrer le résultat suivant : soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dont la différentielle est partout de rang 1, égale à l'identité sur  $\mathbb{R} \times \{0\}$ . Alors l'image de  $f$  est incluse dans  $\mathbb{R} \times \{0\}$ . Directement, ce n'est pas évident que  $f$  ne va pas s'écarter de la droite des abscisses, et que la condition de rang de la différentielle est une contrainte suffisante.

**Exercice E.58** On montre que l'ouvert de  $V$  sur lequel  $f$  est immersive est dense dans  $V$ , par l'absurde. Sinon, soit  $U$  un ouvert non vide de  $V$  sur lequel  $f$  n'est immersive en aucun point, et  $r < n$  le rang maximum de  $df_x$ , atteint en un point  $x_0 \in U$ . Par semi-continuité du rang, le rang de  $df_x$  pour  $x$  proche de  $x_0$  est  $\geq r$ , et  $\leq r$  par maximalité. Le théorème du rang constant s'applique et montre que  $f$  s'écrit, quitte à composer à droite et à gauche par un difféomorphisme local, sous

la forme  $f(x_0 + h) = f(x_0) + (h_0, \dots, h_r, 0, \dots, 0)$ , ce qui contredit l'injectivité de  $f$  puisque  $r < n$ . Puisque  $f$  est immersive en au moins un point, on a  $n \leq m$ .

L'application  $df_x$  n'est pas nécessairement injective partout, comme le montre l'exemple de  $x \mapsto x^3$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice E.59

- (1) Si  $n = 1$ , alors  $f$  atteint son maximum sur l'intervalle  $]a, b[$  en un certain point  $c$  qui est un autre point critique de  $f$ . Si  $n \geq 2$ , alors la connexité de  $\mathbb{R}^n - B(0, R)$  pour tout  $R$  implique que soit  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $\infty$ , soit  $f$  tend vers  $-\infty$  en  $\infty$ . Dans le deuxième cas, le maximum de  $f$  fournit encore un autre point critique de  $f$ .
- (2) Comme  $f$  tend vers  $+\infty$  en l'infini, l'ensemble  $K_m$  est borné. Ainsi, son adhérence est encore un compact connexe contenant  $a$  et  $b$ , ce qui montre que  $\overline{K_m} \subset K_m$ . Ainsi,  $K_m$  est fermé. Soit  $M = \inf\{m \in \mathbb{R} : K_m \neq \emptyset\}$ . Alors  $(K_{M+1/n})_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$  forme une suite décroissante de compacts connexes non vides, donc son intersection est encore un compact connexe non vide, qui contient  $a$  et  $b$ . Sur ce compact,  $f$  est majorée par  $M$ . Ainsi,  $K_M \neq \emptyset$ .
- (3) Puisque  $M > \sup\{f(a), f(b)\}$ , sous l'hypothèse d'absence de point critique différent de  $a, b$ , on vérifie aisément que l'intérieur de  $K_M$  est constitué des points  $x$  de  $K_M$  tels que  $f(x) < M$ , tandis que sa frontière est constituée des points  $x$  de  $K_M$  tels que  $f(x) = M$  (en utilisant le théorème des fonctions implicites). On en déduit que  $K_M$  est l'adhérence de son intérieur.

Supposons que l'intérieur de  $K_M$  ne soit pas connexe, et qu'il s'écrive donc comme réunion de deux ouverts  $A$  et  $B$ . Alors  $K_M = \overline{A} \cup \overline{B}$ . Par connexité de  $K_M$ , les deux ensembles  $\overline{A}$  et  $\overline{B}$  ne sont pas disjoints, et ils se rencontrent donc en un point  $x$ . Il n'appartient ni à  $A$  ni à  $B$  car  $A$  et  $B$  sont ouverts et disjoints. Ainsi,  $f(x) = M$ . Le théorème des fonctions implicites appliqué au voisinage du point régulier  $x$  assure qu'il existe un voisinage  $U$  de  $x$  tel que  $V = U \cap K_M$  soit connexe. Comme  $V = (V \cap A) \cup (V \cap B)$ , l'un des ouverts  $V \cap A$  ou  $V \cap B$  est donc vide par connexité, ce qui contredit le fait que  $x$  soit dans l'adhérence de  $A$  et de  $B$ .

- (4) L'intérieur de  $K_M$  est un ouvert connexe donc connexe par arcs. Il existe donc un chemin reliant  $a$  à  $b$  et restant dans l'intérieur de  $K_M$ . Ce chemin donne donc un compact connexe contenant  $a$  et  $b$  et sur lequel  $f < M$ , ce qui est absurde car cela contredit la minimalité de  $M$ .

**Exercice E.60** (1) La fonction exponentielle est une série entière de domaine de convergence  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Elle est donc analytique réelle, et en particulier  $C^\infty$ , comme fonction de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Comme  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , elle est donc  $C^\infty$  comme fonction de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

Comme  $\exp(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$ , on a

$$d \exp_M(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} M^k X M^{n-k-1}}{n!}$$

(attention à la non commutativité du produit!). En particulier,  $d\exp_0 = \text{Id}$ .

(2) La première assertion vient du fait que  $\det \exp(M) = e^{\text{tr}(M)}$ . Si  $M$  est une matrice antisymétrique, alors  $M$  commute avec sa transposée, et si  $A$  et  $B$  sont deux matrices qui commutent, alors  $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ . Donc si  $M$  est antisymétrique, alors

$${}^t \exp(M) \exp(M) = \exp({}^t M) \exp(M) = \exp({}^t M + M) = \exp(0) = \text{Id}.$$

(3) Soit  $x \in \text{SO}(n)$ . Il existe une matrice orthogonale  $M$  telle que  $MxM^{-1}$  soit diagonale par blocs égaux à 1 ou de la forme  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ . Ces blocs sont respectivement l'exponentielle de 0 et  $\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$  (dans  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ , la matrice  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  est conjuguée à  $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ , qu'il est facile d'écrire comme une exponentielle de matrice, et on revient ensuite dans  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ ). Il existe donc une matrice antisymétrique  $X$  telle que  $MxM^{-1} = \exp(X)$ . Finalement,  $x = \exp(M^{-1}XM)$ .

Montrons que, pour  $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire  $\text{tr}(X) = 0$ , alors  $\text{tr}(\exp(X)) \geq -2$ . Si  $X$  a deux valeurs propres réelles, elles sont de la forme  $a$  et  $-a$ , et on a  $\text{tr}(\exp(X)) = e^a + e^{-a} \geq 0$ . Sinon, les valeurs propres  $a$  et  $-a$  de  $X$  sont complexes conjuguées, et elles sont donc imaginaires pures, c'est-à-dire  $a = ib$  avec  $b \in \mathbb{R}$ . En particulier,  $\text{tr}(\exp(X)) = e^{ib} + e^{-ib} = 2 \cos(b) \geq -2$ . Ainsi, la matrice  $\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1/10 \end{pmatrix}$  de  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  n'appartient pas à  $\exp(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$ .

(4) En diagonalisant une matrice symétrique dans une base orthonormée, on vérifie que son exponentielle est symétrique définie positive. Réciproquement, soit  $M$  symétrique définie positive. En la diagonalisant dans une base orthonormée, puis en prenant le logarithme des valeurs propres, on construit une matrice symétrique  $X$  telle que  $\exp(X) = M$ . De plus, si  $P$  est le polynôme d'interpolation de Lagrange qui vaut  $\log(\lambda_i)$  aux valeurs propres  $\lambda_i$  de  $M$ , on a  $X = P(M)$ .

Montrons que  $X$  est l'unique antécédent de  $M$  par l'exponentielle. Si  $M = \exp(X')$ , alors  $X'$  commute avec  $M$ , donc avec tous les polynômes en  $M$ , donc avec  $X$ . En particulier,  $\exp(X' - X) = \exp(X')\exp(X)^{-1} = I_n$ . En diagonalisant  $X' - X$ , on en déduit que  $X' - X = 0$ .

Ainsi,  $\exp$  réalise une bijection entre l'espace  $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$  des matrices symétriques et l'espace  $\text{Sym}_n^+(\mathbb{R})$  des matrices symétriques définies positives. Elle est  $C^\infty$ , car restriction d'une application  $C^\infty$  au sous-espace vectoriel  $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ , dont  $\text{Sym}_n^+(\mathbb{R})$  est un ouvert. Il reste à vérifier que c'est un  $C^\infty$ -difféomorphisme.

Soit  $M$  une matrice symétrique, montrons que  $\exp$  est une immersion en  $M$ . Quitte à diagonaliser  $M$ , on peut supposer que  $M$  est diagonale de coefficients  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . La formule de la différentielle de l'exponentielle montre alors que

$$d\exp_M(A)_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^k \lambda_j^{n-k-1}}{n!} A_{ij}.$$

Il suffit donc de vérifier que les coefficients  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^k \lambda_j^{n-k-1}}{n!}$  sont non nuls. Si  $\lambda_i = \lambda_j$ , ce coefficient est égal à  $e^{\lambda_i}$ , et il n'y a rien à faire. Sinon, le coefficient est égal à

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\lambda_i^n - \lambda_j^n}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{e^{\lambda_i} - e^{\lambda_j}}{\lambda_i - \lambda_j} \neq 0.$$

Ainsi,  $d\exp$  est partout inversible sur l'espace des matrices symétriques. En particulier,  $\exp$  est un difféomorphisme local, et une bijection, donc un difféomorphisme.

(5) La formule de la différentielle de l'exponentielle peut se réécrire

$$d\exp_M = \sum_{p,q \geq 0} \frac{L_M^p R_M^q}{(p+q+1)!}.$$

Notons de plus que les opérateurs  $L_M$  et  $R_M$  commutent.

Supposons tout d'abord  $L_M - R_M$  inversible. Alors

$$\begin{aligned} d\exp_M &= \sum_{p,q \geq 0} \frac{L_M^p R_M^q}{(p+q+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{L_M^n - R_M^n}{L_M - R_M} = \frac{1}{L_M - R_M} (\exp(L_M) - \exp(R_M)) \\ &= \frac{1}{\text{ad}M} \exp(L_M) (\text{Id} - \exp(-\text{ad}M)) = \exp(L_M) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\text{ad}M)^k}{(k+1)!}, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat recherché.

Notons que cette démonstration n'utilise que le fait que  $L_M$  et  $R_M$  commutent. Lorsque  $L_M - R_M$  n'est pas inversible, le même argument s'applique donc à  $L_M + \lambda \text{Id}$  et  $R_M$  avec  $\lambda > 0$  assez petit, de telle sorte que  $L_M - R_M + \lambda \text{Id}$  soit inversible. On conclut ensuite en faisant tendre  $\lambda$  vers 0.

(6) Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n^2}$  sont les valeurs propres complexes de  $\text{ad}M$ , la formule de la question précédente montre que les valeurs propres complexes de  $\exp(-M)d\exp_M$  sont  $\frac{1-e^{-\lambda_k}}{\lambda_k}$  si  $\lambda_k \neq 0$ , et 1 si  $\lambda_k = 0$ . Ainsi, cet opérateur est inversible si et seulement si les valeurs propres non nulles satisfont  $e^{-\lambda_k} \neq 1$ , c'est-à-dire  $\lambda_k \notin 2i\pi\mathbb{Z}$ .

**Exercice E.63** (3) Comme  $U \cap V$  est non vide,  $X$  est connexe par arcs. Soit  $\alpha$  un lacet en  $x$ . Par compacité, il existe  $n \in \mathbb{N}$  non nul tel que  $\alpha(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})$  soit contenu dans  $U$  ou dans  $V$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ , soit  $c_i$  un chemin entre  $x$  et  $\alpha(\frac{i}{n})$ , contenu dans  $U, V, U \cap V$  si  $\alpha(\frac{i}{n})$  appartient à  $U, V, U \cap V$  respectivement (ce qui est possible car  $U, V, U \cap V$  sont connexes par arcs), avec  $c_0$  et  $c_n$  constants. On note  $\alpha_i$  le chemin  $t \mapsto \alpha(\frac{i+t}{n})$ . Il n'est pas difficile de voir que le lacet  $\alpha$  en  $x$  est homotope à

$$(\overline{c_0} \cdot \alpha_0 \cdot c_1) \cdot (\overline{c_1} \alpha_1 \cdot c_2) \cdot \dots \cdot (\overline{c_{n-2}} \cdot \alpha_{n-2} \cdot c_{n-1}) \cdot (\overline{c_{n-1}} \cdot \alpha_{n-1}) \cdot c_n.$$

Pour  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , le chemin  $\overline{c_i} \cdot \alpha_i \cdot c_{i+1}$ , est un lacet en  $x$  contenu dans  $U$  ou dans  $V$ .

Comme  $U$  et  $V$  sont simplement connexes, chaque  $\overline{c_i} \cdot \alpha_i \cdot c_{i+1}$  est homotope au lacet constant en  $x$ . Donc  $\alpha$  est homotope au lacet constant en  $x$ . Par conséquent,  $X$  est simplement connexe.

(4) La sphère  $\mathbb{S}_n$  est réunion de l'ouvert  $U$  complémentaire du pôle nord, et de l'ouvert  $V$  complémentaire du pôle sud. Les ouverts  $U, V$  sont contractiles, donc simplement connexes par (2). L'intersection  $U \cap V$  se rétracte par déformation forte sur l'équateur  $\mathbb{S}_{n-1}$ , qui est connexe par arcs si  $n \geq 2$ .

(5) On raisonne par récurrence sur  $n$ . D'après l'exercice E.15, la droite projective  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  est homéomorphe à la sphère  $\mathbb{S}_2$ , donc est simplement connexe par (4). On suppose maintenant  $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$  simplement connexe. Soit  $U$  (le domaine d')une carte affine de  $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ , et  $V$  le complémentaire d'un point de  $U$  dans  $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ . Alors  $U$  est contractile, et  $V$  se rétracte par déformation forte sur  $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ , donc est simplement connexe. Par (3), l'espace  $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$  est simplement connexe.

**Exercice E.64** Soit  $I$  une partie de  $\{1, \dots, m\}$  et  $J$  une partie de  $\{1, \dots, n\}$ . Le coefficient  $I, J$  de la matrice de l'application  $\Lambda^* f : \omega \mapsto f^* \omega$  est égal au mineur  $M_{I,J}$  de la matrice de  $f$  correspondant aux lignes d'indice dans  $I$  et aux colonnes d'indice dans  $J$  :

$$\Lambda^* f(\check{e}_J) = \sum_I M_{I,J} \check{f}_I.$$

## Index

- action
  - libre, 166
  - par homéomorphismes, 167
  - par translations
    - à droite, 166
    - à gauche, 166
  - propre, 167
  - transitive, 166
- alternée, 180
- anneau, 110
- anticommutativité, 76, 77
- antidérivation, 94
- appauvrissement de structure, 15
- application
  - canonique, 167
  - de classe  $C^k$ , 16
  - de rang constant, 17
  - de transition, 14
  - étale, 30
  - lue dans des cartes, 16
  - orbitale, 167
  - projective, 36
  - propre, 161
  - tangente, 49
- atlas de cartes
  - feuilletées, 81
- atlas de cartes, 13
  - orienté, 125
- automorphisme
  - de revêtements, 174
- base, 44, 56, 173
  - d'ouverts, 161
  - dénombrable, 161
  - positive, 125
- bord, 131
- caractéristique
  - d'Euler, 113
  - d'Euler-Poincaré, 192
- cardinal, 165
- carte, 14
  - affine, 36
  - locale, 14
  - orientée, 125
- positive, 125
- catégorie, 189
  - des ensembles, 189
  - des espaces topologiques, 190
  - des variétés différentielles de classe  $C^k$ , 190
  - des variétés topologiques, 190
  - de dimension  $n$ , 190
- champ
  - de  $p$ -plans, 78
  - image réciproque, 79
  - lu dans une carte, 79
  - restriction, 78
- de droites
  - dirigé par, 80
- de vecteurs, 63
  - complet, 69
  - image réciproque, 65
  - lu dans une carte, 67
  - non singulier, 70
  - tangent à un champ de plans, 78
- changement de carte, 14
- chemin, 176
  - composé, 177
  - inverse, 176
- cobord, 192
- cocycle, 192
- codimension, 12, 24
- cohomologie de de Rham, 104
  - à support compact, 136
- compactifié d'Alexandrov, 162
- compactification d'Alexandrov, 191
- $C^k$ -compatibles, 14
- complexe
  - de cochaînes, 192
- composition, 45
- contractile, 176
- coordonnées
  - homogènes, 37
- courbe, 7, 14, 51
  - elliptique, 36
  - intégrale, 68
- crochet
  - de Lie, 76, 77

- dérivée de Lie, 100
- dérivation, 71
- décomposition
  - polaire, 40
- degré, 146
- dénombrable à l'infini, 161
- difféomorphisme, 17, 168
  - local, 30, 169
- différentiablement homotopes, 106
- différentielle, 89, 94
  - extérieure, 94
- dimension, 7, 12
- distribution
  - de  $p$ -plans, 78
- domaine, 14
  - à bord lisse, 131
  - régulier, 131
- dualité de Poincaré, 142
- $\ell^2(\mathbb{R})$ , 162
- ensemble
  - bien ordonné, 164
  - ordonné, 164
  - isomorphe, 165
  - totalement ordonné, 164
- entrelac
  - de Whitehead, 155
  - orienté, 155
- équivalence d'homotopie, 176
- espace
  - des cobords, 192
  - des cocycles, 192
  - des feuilles, 10
  - lenticulaire, 34, 175
  - projectif, 36
    - complexe, 37
    - réel, 37
  - tangent, 48
  - total, 44, 56, 173
  - vectériel
    - orienté, 125
- espace topologique
  - à base dénombrable, 161
  - $\sigma$ -compact, 161
  - contractile, 176
  - dénombrable à l'infini, 161
  - localement compact, 161

- paracompact, 161
- semilocalement simplement connexe, 178
- séparé, 161
- séparable, 161
- simplement connexe, 176
- étoilé, 110
- faisceau, 18
- feuille, 82
  - locale, 82
- feuilletage, 81
  - image réciproque, 84
  - linéaire, 85
    - standard, 81
  - quotient, 84
- fibré
  - cotangent, 59
  - des  $k$ -plans, 57
  - en droites, 44
  - localement trivial, 55
  - tangent, 48
  - tautologique, 46
  - vectériel, 44
    - complexe, 44
    - des  $p$ -formes alternées, 59
    - des formes alternées, 59
    - holomorphe, 45
    - image réciproque, 60
    - produit, 61
    - réel, 44
    - somme directe, 61
    - trivial, 45
    - trivialisable, 45
- fibration, 55
  - grassmannienne, 57
  - triviale, 56
  - trivialisable, 56
- fibre, 44, 56, 173
- fixateur, 166
- foncteur, 189
  - contravariant, 189
  - covariant, 189
- forme
  - d'aire, 135
  - différentielle, 59, 88
    - cohomologues, 104
    - exacte, 103

- fermée, 103
  - lue dans une carte, 93
- multilinéaire
  - alternée, 180
  - volume, 127
- $p$ -forme différentielle, 88
- formule
  - d'Ampère-Stokes, 135
  - de changement de variable, 92
    - globale, 130
    - locale, 124
  - de Gauss, 157
  - de Gauss-Ostrogradski, 135
  - de Green-Riemann, 134
  - de Stokes, 133
- germe, 68
- graphe, 11
- groupe
  - fondamental, 178
  - linéaire, 39
  - orthogonal, 39
  - spécial linéaire, 39
  - spécial orthogonal, 39
  - spécial unitaire, 39
  - symétrique, 180
  - unitaire, 39
- $G_x$ , 166
- hermitienne, 39
- homéomorphisme local, 174
- homotopes, 177
  - différentiablement, 106
    - proprement, 138
  - proprement, 176
- homotopie, 177
  - $C^\infty$ , 106
- identité
  - de Jacobi, 76, 77
- image réciproque, 90
- immersion, 17, 168
- indice
  - d'un champ de vecteur, 152
  - d'une application, 149
- intégrable, 85
- intégrale de Gauss, 157
- invariant, 32

- isomorphe, 17, 19, 31, 45, 56, 165
- isomorphisme, 19
  - de revêtements, 173
  - de feuilletages, 84
  - de fibrés vectoriels, 45
  - de fibrations, 56
- jacobien, 168
- lacet, 176
- lemme
  - de Poincaré, 110
  - des cinq, 195
- localement, 162
  - compact, 161
  - fermée, 25, 162
  - fini, 161
- longue droite, 10
- matrice jacobienne, 168
- mesure
  - nulle, 28, 131
- morphisme, 189
  - de fibration, 56
  - de cobord, 192
  - de complexes de cochaînes, 192
  - de fibrés vectoriels, 44
  - de suites exactes
    - de complexes de chaînes, 193
    - identité, 45
- multi-vecteur, 187
- nœud
  - orienté, 155
  - sauvage, 27
- nombre d'enlacement, 153
- orbite, 166
- ordinal, 165
  - dénombrable, 165
- ordre, 164
  - bon, 164
  - lexicographique, 164
  - total, 164
- orientation, 124
  - canonique, 125
  - image réciproque, 126
  - opposée, 130

- par la direction sortante, 132
- produit, 126
- somme disjointe, 126
- ouvert
  - étoilé, 110
  - distingué, 44, 56
- paracompact, 161
- parallélisable, 49
- paramétrage local, 12
- partition de l'unité, 8
  - subordonnée, 8
- plongement, 26
- plus fin, 161
- point critique, 28
- pôle
  - Nord, 34
  - Sud, 34
- préserver l'orientation, 125
- produit
  - extérieur, 88, 182
  - intérieur, 98, 186
  - tensoriel, 179
- projectif, 57
- propre, 161
- proprement
  - différentiablement homotopes, 138
  - discontinue, 167
  - homotopes, 176
- puissance tensorielle, 180
- réseau, 36
- rétract par déformation forte, 176
- rétraction, 116
- rang, 16, 44, 168
- recouvrement
  - ouvert
    - localement fini, 161
    - plus fin, 161
- relèvement, 177
- revêtement, 30, 173
  - à  $n$  feuillet, 174
  - d'orientation, 127
  - fini, 174
  - holomorphe, 31
  - trivial, 174
  - universel, 177

- ruban de Möbius, 80
- saturée, 166
- section, 45, 56
  - de classe  $C^k$ , 45
  - nulle, 45
- segment initial, 165
- semi-continue inférieurement, 168
- semilocalement simplement connexe, 178
- séparé, 161
- séparable, 161
- séparabilité, 161
- séparation, 161
- signature, 180
- simplement connexe, 176
- somme connexe, 23, 119
  - orientée, 126
- sous-catégorie, 189
- sous-espace
  - affine tangent, 42
  - vecteuriel tangent, 42
- sous-variété, 12, 24
  - à bord, de codimension 0, 131
  - complexe, 13
  - immergée, 20
  - topologique, 13
- sphère, 33
  - de Riemann, 35
- stabilisateur, 166
- structure
  - standard, 21, 25
- subimmersion, 17, 168
- submersion, 17, 168
- suite exacte, 192
  - de complexes de cochaînes, 192
  - longue
    - de cohomologie, 193
    - de Mayer-Vietoris, 111, 139
- suite exhaustive, 161
- support, 7, 123
- surface, 7, 14
  - de révolution, 171
- surface de niveau régulière, 29
- tenseur, 180
  - antisymétrique, 180
  - symétrique, 180

- théorème
  - d'Elhresmann, 57
  - d'invariance du domaine, 5, 115
  - d'inversion locale, 169
  - de Brouwer
    - d'invariance du domaine, 5, 115
    - du point fixe, 116
  - de dualité de Poincaré, 142
  - de forme normale
    - des applications de rang constant, 18, 170
    - des immersions, 17, 170
    - des submersions, 18, 170
  - de Frobenius, 85
  - de non-peignage des sphères, 148
  - de Poincaré-Hopf, 153
  - de Sard, 28, 150
  - de Stokes, 133
  - de Whitney, 27
  - des fonctions implicites, 169
  - du point fixe, 116
  - du redressement, 70
  - du relèvement, 31, 177
  - fondamental de l'intégration, 132
- topologie
  - de l'ordre, 165
  - des feuilles, 82
  - faible
    - (définie par une famille de sous-espaces), 164
    - plus fine, 162
    - quotient, 163
    - somme disjointe, 163
- tore, 35
  - de révolution, 35
- transposition, 180
- transversale locale, 82
- trivialisation locale, 44, 56, 173
- type d'homotopie, 109, 176
- valeur
  - critique, 28
  - régulière, 28
- variété, 6
  - analytique
    - complexe, 15
    - réelle, 14
  - rigide, 15
  - banachique, 15
  - différentielle, 14
  - feuilletée, 81
  - grassmannienne, 39
  - holomorphe, 15
  - lisse, 14
  - modélée sur un Banach, 15
  - orientée, 125
    - produit, 126
    - somme disjointe, 126
  - orientable, 125
  - parallélisable, 49
  - produit, 29
  - quotient, 31
  - somme disjointe, 29
  - topologique, 6
    - non paracompacte, 10
    - non séparée, 10
- vecteur
  - tangent, 41, 47
- $p$ -vecteur, 187
- voisinage
  - distingué, 44, 56, 173

## Références

- [Ada] M. Adachi, *Embeddings and immersions*, Trans. Math. Mono. **124**, Amer. Math. Soc. 1993.
- [Apé] F. Apéry, *Models of the real projective plane*, Vieweg, 1987.
- [AB] J.-M. Arnaudiès, J. Bertin, *Groupes, algèbres et géométrie* Vol 1 & 2, Ellipses, 1995.
- [Arn] V. Arnold, *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, Grund. math. Wiss. **250**, Springer Verlag, 1983.
- [Aub] T. Aubin, *Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère equations*, Grund. math. Wissen. **252**, Springer Verlag, 1982.
- [Ave] A. Avez, *Calcul différentiel*, Masson, 1983.
- [BaPV] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Ergebnisse Math. Grenz. **4**, Springer Verlag, 1984.
- [BBBMP10] L. Bessières, G. Besson, M. Boileau, S. Maillot, J. Porti, *Geometrisation of 3-Manifolds*, EMS Tracts Math. **13**, Euro. Math. Soc. Pub. House, 2010.
- [BoT] R. Bott, L. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Springer Verlag 1982.
- [Bou1] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. 1 à 3, Hermann, 1970.
- [Bou2] N. Bourbaki, *Topologie générale*, chap. 1 à 4, Hermann, 1971.
- [Bou3] N. Bourbaki, *Topologie générale*, chap. 5 à 10, Hermann, 1974.
- [Bou4] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Hermann, Chap. I : 1960, Chap. II, III : 1972, Chap. VI, V, VI : 1968, Chap. VII, VIII : 1975, Chap. IX : 1982.
- [Brou] L. Brouwer, *Collected works, vol. II*, North Holland, 1976.
- [BZ] G. Burde, H. Zieschang, *Knots*, 2nd ed. de Gruyter, 2003.
- [BILW] M. Burger, A. Iozzi, F. Labourie, A. Wienhard, *Maximal Representations of Surface Groups : Symplectic Anosov Structures*, Pure Appl. Math. Quaterly **1** (2005) 555–601.
- [Car] E. Cartan, *La géométrie des espaces de Riemann*, Gautiers-Villars, 1925.
- [CarH] H. Cartan, *Cours de calcul différentiel*, Hermann, 2nde éd. 1977.
- [CE] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Univ. Press, 1956.
- [CSM] R.W. Carter, G. Segal, I. MacDonald, *Lectures on Lie algebras and Lie groups*, Lond. Math. Soc. Student Texts **32**, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [deR] G. de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann 1960.
- [Die1] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse t. 1 : fondements de l'analyse moderne*, Gauthier-Villars, 1971.
- [Die2] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse t. 3*, Gauthier-Villars, 2e éd. 1974.
- [Die3] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse t. 4*, Gauthier-Villars, 1971.
- [Die4] J. Dieudonné, *A history of algebraic and differential topology 1900-1960*, Birkhäuser 1990.
- [Don] S. K. Donaldson, *Floer homology groups in Yang-Mills theory*, Camb. Tracts Math. **147**, Cambridge Univ. Press, 2002.
- [DNF] B. Doubrovine, S. Novikov, A. Fomenko, *Géométrie contemporaine I, II*, Editions MIR 1987.
- [Dug] J. Dugundji, *Topology*, Wm. C. Brown Pub., 1989.
- [Ebe] P. Eberlein, *Geometry of nonpositively curved manifolds*, Chicago Lect. in Math., Chicago Univ. Press, 1996.
- [ES] S. Eilenberg, N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology*, Princeton Univ. Press, 1952.
- [FK] H. Farkas, I. Kra, *Riemann surfaces*, 2nde éd., Springer-Verlag, 1991.
- [Fre] M. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Diff. Geom. **17** (1982) 357-453.
- [FP] J. Fresnel, M. van der Put, *Géométrie analytique rigide et applications*, Prog. Math **18**, Birkhäuser, 1981.
- [FM] R. Friedman, J.W. Morgan, *Smooth four-manifolds and complex surfaces* Ergeb. Math. Grenz. **27**, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [GHL] S. Gallot, D. Hulin. J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, Springer Verlag, 1990.
- [God] C. Godbillon, *Éléments de topologie algébrique*, Hermann, 1971.
- [Gode1] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, 1958.
- [Gode2] R. Godement, *Introduction à la théorie des groupes de Lie*, Pub. Math. Université Paris VII **011**, 1982.
- [Gom] R. Gompf, *Three exotic  $\mathbb{R}^4$ 's and other anomalies*, J. Diff. Geom. **18** (1983) 317-328.
- [GJK] C. McA. Gordon, V. F. R. Jones, L. H. Kauffman, eds., *Knots in Hellas '98*, (proc. inter. conf. on knot theory and its ramifications, Delphi, 1998), Series on knots and everything **24**, World Scientific, 2000.
- [Gra] A. Gramain, *Topologie des surfaces*, Press. Univ. France, 1971.
- [Gro1] M. Gromov, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, rédigé par J. Lafontaine and P. Pansu, Cedric/Fernand Nathan, Paris, 1981.
- [Gro2] M. Gromov, *Asymptotics invariants of infinite groups*, Vol. 2 de "Geometric group theory", A. Niblo, M. Roller eds, LMS LNS **182**, Cambridge Univ. Press, 1993.
- [Hat] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge Univ. Press, 2002, <http://www.math.cornell.edu/~hatcher>.
- [Hel] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.
- [Hir] M. Hirsch, *Differential topology*, GTM **33**, Springer, 1976.
- [KRT] C. Kassel, M. Rosso, V. Turaev, *Quantum groups and knot invariants*, Pano. Synt. **5**, Soc. Math. France, 1997.
- [Kat] S. Katok, *Fuchsian groups*, Chicago Univ. Press, 1992.
- [KH] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Ency. Math. App. **54**, Camb. Univ. Press, 1995.
- [Kaw] A. Kawachi, ed. *Knots 90*, (Inter. Conf. on Knot Theory and Rel. Topics, Osaka, 1990), de Gruyter, 1992.

- [Kere] B. Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie. 1, Flächentopologie*, Springer Verlag, 1923.
- [Kerv] M. Kervaire, *A manifold which does not admit any differentiable structure*, Comm. Math. Helv. **34** (1960) 257-270.
- [KeM] M. Kervaire, J. Milnor, *Groups of homotopy spheres I*, Ann. Math. **77** (1963) 504-537.
- [KIL] M. Kleiner, J. Lott, *Notes on Perelman's papers*, Geom. & Topo. **12** (2008) 2587-2855.
- [Kri] J.L. Krivine, *Théorie axiomatique des ensembles*, Press. Univ. France, 1969.
- [Laf] J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, Press. Univ. Grenoble, 1996.
- [Laz] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry. 1 : classical setting : line bundles and linear series*, Ergebnisse Math. Grenz. **48**, Springer Verlag, 2004.
- [Lie] S. Lie, *Gesammelte Abhandlungen 5-6*, F. Engel, P. Heegard eds, Teubner, 1924-1927.
- [McDS] D. McDuff, *Introduction to symplectic topology*, Oxford Math. Mono. 2nd ed, Clarendon Press, 1998.
- [Mil] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Univ. Press Virginia, Charlottesville, 1965.
- [Mil2] J. W. Milnor, *Vers la conjecture de Poincaré et la classification des variétés de dimension 3*, La Gazette des Mathématiques **99**, Soc. Math. France, 2004.
- [MT] N. Mneimné, F. Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Hermann, 1986.
- [Moi] E. Moise, *Geometric topology in dimension 2 and 3*, Springer Verlag, 1977.
- [MZ] D. Montgomery, L. Zippin, *Topological transformation groups*, Huntington NY Robert E. Krieger, 1974.
- [Mor] J. W. Morgan, *Seiberg-Witten invariants*, dans "Nouveaux invariants en géométrie et en topologie", M. Audin, J. W. Morgan, P. Vogel, Pano. Synth. **11**, Soc. Math. France, 2001.
- [MorTia14] J. W. Morgan, G. Tian, *The Geometrization Conjecture*, Clay Math. Mono. **5**, Amer. Math. Soc. 2014.
- [Paul1] F. Paulin, *Topologie algébrique élémentaire*, Notes de cours de première année de mastère à l'École Normale Supérieure (ENS Ulm), 2010.  
[http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/liste\\_notescours.html](http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/liste_notescours.html)
- [Paul2] F. Paulin, *Topologie, analyse et calcul différentiel*, Notes de cours de troisième année de licence à l'École Normale Supérieure (ENS Ulm), années 2009.  
[http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/liste\\_notescours.html](http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/liste_notescours.html)
- [Per] B. Perthame, *Topologie et analyse différentielle*, Notes de cours de magistère, ENS Ulm, 2003.
- [Poi] H. Poincaré, *Oeuvres complètes*, Gauthier-Villars, 1952.
- [Pos] M. Postnikov, *Variétés différentiables*, Mir, Moscou, 1990.
- [Rey] E. Reyssat, *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Prog. in Math. **77**, Birkhauser, 1989.
- [Ric] I. Richards, *On the classification of noncompact surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **106** (1963) 259-269.
- [Rie] G. F. B. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, dans "Gesammelte mathematische Werke", Springer Verlag, 1990.
- [Rob] A. Robert, *A course in p-adic analysis*, Springer Verlag, 2000.
- [Rol] D. Rolfsen, *Knots and links*, Publish or Perish, 1976.
- [Sch] W. Schikhof, *Ultrametric calculus, an introduction to p-adic analysis*, Camb. Stud. Adv. Math. **4**, Cambridge Univ. Press, 1984.
- [Ser1] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1962.
- [Ser2] J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, Press. Univ. France, Paris, 1970.
- [Ser3] J.-P. Serre, *Lie algebras and Lie groups : 1964 lectures given at Harvard University*, 2nd ed., Springer Verlag, 1992.
- [Spa] E. Spanier, *Algebraic topology*, Tata McGraw-Hill, 1981.
- [Spi] M. Spivak, *Differential geometry*, Publish or Perish, 1979.
- [Voi] C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours spécialisés **10**, Soc. Math. France, 2002.
- [Whi] H. Whitney, *The selfintersections of a smooth n-manifold in 2n-space*, Ann. of Math. **45** (1944) 220-246.

Département de mathématique, UMR 8628 CNRS, Bât. 425  
 Université Paris-Sud  
 91405 ORSAY Cedex, France  
 courriel : frederic.paulin@math.u-psud.fr