PRÉPARATION À L'AGRÉGATION INTERNE DE MATHÉMATIQUES
ORSAY 2008-2009
Ecrit d'analyse

Suites réelles et complexes
Fonctions d'une variable réelle, première partie

Suites réelles et complexes

Exercice 1. – Sans utiliser la fonction logarithme :
1 Etudier la suite géométrique a^n où $a \in C$.
2 Montrer que la suite $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in C$ en utilisant le critère de Cauchy.
3 Montrer que la suite $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout x réel positif en utilisant des suites adjacentes.
4 Montrer que la suite $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ converge pour tout $x \in]0, 2[$.
Exercice 2. – Soit $(r_n)_{n \in N}$ une suite réelle convergeant vers x réel *irrationnel.*

On pose $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ où $p_n \in Z$ et $q_n \in N^*$, montrer que $|p_n|$ et q_n convergent vers $+\infty$.

Continuité, théorème des valeurs intermédiaires et homéomorphismes

Comparaison de fonctions

Exercice 3. – Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles définies au voisinage d'un point $x_0 \in R$.
1 Donner un exemple de deux fonctions f et g, chacune dominant l'autre en x_0, mais qui ne sont pas équivalentes en x_0.
2) Si, au voisinage de x_0, on a f_1 et f_2 équivalentes à g_1 et g_2, est ce que $f_1 f_2$ est équivalente à $g_1 g_2$? Est ce que $\varphi \circ f_1$ est équivalente à $\varphi \circ g_1$ où φ est une fonction donnée ?
3) On suppose $f = O_{x_0}(g)$. Montrer qu'il existe un voisinage V de x_0 tel que tout zéro de g contenu dans V est aussi un zéro de f. En déduire que si f et g sont équivalentes en x_0, elles ont mêmes zéros au voisinage de x_0. Quelles sont les fonctions équivalentes en un point à la fonctions nulles? Construire un exemple de deux fonctions équivalentes dont la différence n'est pas équivalente à 0 *(on ne peut pas "ajouter les équivalents")* .
4) On suppose que f et g sont équivalentes en x_0. Montrer qu'il existe un voisinage V de x_0 tel que :
(i) f et g ont mêmes zéros dans V;
(ii) f et g ont même signe là où elles ne s'annulent pas.

Exercice 4. – Soient f et g deux fonctions à valeurs strictement positives qui sont équivalentes au voisinage d'un point $x_0 \in R$.
1 Cela entraine-t-il l'équivalence des fonctions $\ln(f)$ et $\ln(g)$ au même point x_0.

2 On suppose que $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)) = l \in R^+\backslash\{1\}$, montrer les fonctions $\ln(f)$ et $\ln(g)$ sont équivalentes en x_0.

Exercice 5. –

1) On définit f et g sur R par :

$f(x) = |x|^{\frac{3}{2}}$;

$g(0) = 0$ et $g(x) = |x|^{\frac{3}{2}} + x^2\cos\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$.

Montrer que f et g sont équivalentes en 0, mais que leurs dérivées ne sont pas équivalentes en 0.

2) Soient f et g deux fonctions continues par morceaux au voisinage de $a \in R$.

Les primitives de f et g sont notées $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_a^x g(t)dt$.

On suppose de plus que g est est à valeurs réelles positives. Montrer que si g domine f en a alors G domine F en a et si f est équivalent à g en a alors F est équivalent à G en a.

Continuité, théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 6.

a) On considère une suite de rationnels $(\alpha_n)_{n\in N} \in Q^N$ qui converge vers un irrationnel $\alpha \in R\backslash Q$. Pour tout $n \in N$, on note $\alpha_n = p_n/q_n$ où $(p_n, q_n) \in Z \times N^*$ avec p_n et q_n premiers entre eux. Montrer par l'absurde que, sous ces hypothèses, la suite $(q_n)_{n\in N} \in N^{*N}$ tend vers $+\infty$.

b) Etudier la continuité de la fonction f définie sur R_+^* par :

$f(x) = 0$ si $x \in R\backslash Q$ et $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$ (p et q premiers entre eux).

Exercice 7. – Soit $f : [0,1] \to R$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$.

1) Montrer que si $a = \frac{1}{n}$, l'équation $(*)$ $f(x+a) = f(x)$ admet au moins une solution.

Indication : on pourra considérer la fonction $g : \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] \to R$ définie par $g(x) = f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)$ et la somme $g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + g\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

2) Montrer que si a n'est pas de la forme $\frac{1}{n}$, l'équation $(*)$ peut ne pas admettre de solutions.

3) Application : un cycliste à parcouru 20 kilomètres en une heure ; montrer qu'il existe au moins un intervalle de durée une demi-heure pendant lequel il a parcouru 10 kilomètres. Même question avec un intervalle de temps de 3 minutes et un parcours d'un kilomètre.

Exercice 8. – Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles avec $b_n > 0$ pour tout n et on considère la suite de polynômes (P_n) définie par

$$P_0 = 1 \;;\; P_1(X) = X + a_1 \text{ et } P_{n+1}(X) = (X + a_{n+1})P_n(X) - b_n P_{n-1}(X)$$

Montrer que P_n a toutes ses racines réelles et séparées par celles de P_{n-1}.

Uniforme continuité

Exercice 9.

1) Soit $f : R_+ \to R_+$ continue telle que la limite de f en $+\infty$ existe et soit nulle; prouver que, pour tout $a \geq 0$, il existe $b \geq a$ en lequel f atteint son maximum sur $[a, +\infty[$.

2) Montrer que f est uniformément continue sur R_+.

Exercice 10. – Soit f une fonction uniformément continue de R^+ dans R.
a) Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in R^{*+}$ tel que $\forall x \in R^+$, $|f(x)| \leq \alpha x + \beta$.
b) Montrer que $f(x) = x \sin(x)$ vérifie la condition précédente sans être uniformément continue sur R^+.

Fonctions dérivables

Exercice 11. –
a) Théorème de Rolle. Soit f une application continue du segment $[a, b]$ dans R, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, et qui s'annule en a et b. Montrer que sa dérivée s'annule en un point de $]a, b[$ *(bien sûr, on fera un dessin)*.
b) Théorème des accroissements finis. Montrer que pour toute application f du segment $[a, b]$ dans R, continue sur $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, il existe un réel c de $]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

On expliquera à l'aide d'un dessin la signification de ce théorème.
c) Théorème des accroissements finis généralisés. On considère deux fonctions, f et g, vérifiant les mêmes hypothèses que f en 2). Montrer qu'il existe un réel c de $]a, b[$ tel que le déterminant suivant soit nul :

$$\begin{vmatrix} f(b) - f(a) & f'(c) \\ g(b) - g(a) & g'(c) \end{vmatrix}$$

On donnera une interprétation géométrique de ce théorème en traçant la courbe paramétrée $x \to (f(x), g(x))$.
d) Règle de l'Hôpital. Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles, continues sur un intervalle I, dérivables sauf en un point a de I, et nulles en ce point a.
d.1) Donner un exemple où la limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ existe au point a, mais $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'admet pas de limite en a.
d.2) On suppose que g' ne s'annule pas sur $I - \{a\}$ et que le quotient $\frac{f'(t)}{g'(t)}$ admet une limite l (finie ou infinie) quand t tend vers a. Montrer qu'alors le quotient $\frac{f(t)}{g(t)}$ admet la même limite l quand t tend vers a.
d.3) Application : Calculer la limite en 1^+ de $f(x) = \dfrac{\text{Argch}(x)}{\text{Arccos}(\frac{1}{x})}$.

Exercice 12. – Soit f une fonction numérique continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Soit $d \notin [a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que la tangente au graphe de f en $(c, f(c))$ passe par $(d, f(a))$.

Exercice 13. – Soit f une fonction dérivable sur $[a, +\infty]$. Dire si les implications suivantes sont vraies ou fausses (quand $x \to +\infty$) :

$$1)\ f \text{ borné } \Longrightarrow f' \text{ borné} \quad 2)\ f(x) \to l \Longrightarrow f'(x) \to l$$

3) $\dfrac{f(x)}{x} \to l \Longrightarrow f'(x) \to l$ 4) $f'(x) \to +\infty \Longrightarrow f(x) \to +\infty$ 5) $f'(x) \to l \Longrightarrow \dfrac{f(x)}{x} \to l$

Fonctions convexes.

Exercice 15.

1) Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. Montrer que si f est convexe, la fonction

$$g(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

est croissante sur $I \setminus \{x\}$.

En déduire que si f est dérivable, alors f convexe entraine que $f(y) - f(x) \geq f'(x)(y - x)$ pour tout x et y dans I. Interpréter géométriquement ce résultat.

2) On considère les réels a, b, α, β avec $a < b$ et l'ensemble F des fonctions de $[a, b]$ dans R de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$.

En utilisant la convexitée de la fonction $g(u) = \sqrt{1 + u^2}$, montrer que le minimum :

$$\mathrm{Min}_{f \in F} \left(\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \right)$$

est atteint par la seule fonction affine qui appartienent à F.

Interpréter géométriquement ce résultat.

3) Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I, deux fois dérivable sur I. Montrer que si f'' est positive f est convexe.(*On pourra étudier la fonction g définie sur* $[0, 1]$ *par* $g(t) = (1 - t)f(b) + tf(a) - f((1 - t)b + ta)$)

Exercice 16.

1) Montrer que pour tout couple a et b de nombres réels strictement positifs on a :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \text{ où } p > 1 \text{ et } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1}$$

2)Soient $(a_1, \cdots, a_n), (b_1, \cdots, b_n)$ des nombres complexes. Déduire de (1) l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^{n} |(a_i \cdot b_i)| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

3)Déduire de ce qui précède l'inégalité de Minkowski :

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$