TD 4 : Intégrales impropres (sans et avec paramètre)

Exercice 1

Existence et calcul éventuel des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,dt \ ; \ I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-x^3}} \ ; \ I_3 = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} \ .$$

Réponses : $I_1 = -2\ln(2)$; $\quad I_2 = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$; $\quad I_3 = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Exercice 2

Soient $a < b$ deux réels. Montrer la convergence de $I_{a,b} = \displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}\,dx$.

Calculer $I_{1,1}$ et effectuer un changement de variables pour en déduire $I_{a,b}$.

Exercice 3

Il s'agit de calculer : $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))\,dx$.

a) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))\,dx$ est convergente.

b) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x))\,dx$ et que $2I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)\,dx$.

c) En déduire I.

Exercice 4

a) Montrer que les intégrales : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx$ et $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx$ convergent.

b) Trouver une relation entre I et J en utilisant un changement de variable.

c) En déduire $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\alpha+x^2}\,dx$ en fonction du réel α.

Exercice 5

Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(2t)}{2t}\,dt$ convergent.

En déduire la convergence de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}+\cos(t)}\,dt$

Exercice 6

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, on suppose que $\displaystyle\int_0^{\infty} f^2(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^{\infty} f''^2(x)dx$ sont convergentes.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)f''(x)dx$ est convergente avec Cauchy Schwarz.

b) Montrer que si l'on suppose que $f(x)f'(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ alors $f^2(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que $f(x)f'(x)$ ne tend pas vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

c) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} (f'(x))^2dx$ est convergente.

d) Montrer enfin que $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)f'(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^{\infty} f'(x)f''(x)dx$ convergent et que ff', f^2 et $(f')^2$ ont toutes une limite nulle en $+\infty$.

Exercice 7

On pose, lorsque cela a un sens $F(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \quad G(x) = \int_o^{\infty} \frac{\sin(t)}{t+x}\,dt$ et $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$

1. Montrer que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$, de classe C^2 sur $]0, +\infty[$. Former une équation différentielle simple du second ordre vérifiée par F.
2. Montrer que G est définie et continue sur $]0, +\infty[$ de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et qu'elle vérifie la même équation différentielle que F sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que $\forall\, x > 0,\ F(x) = G(x)$. En déduire la valeur de I.

Exercice 8

Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,dt$

Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que F vérifie une équation différentielle.

Expliciter $F(x)$ (on admettra que $F(0) = \sqrt{\pi}$).