Agrégation Interne. Session 2002
Section MATHÉMATIQUES
Deuxième épreuve. Enoncé

Introduction

On désigne par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et par $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes, continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$. Pour x et $y \in \mathbb{R}$, on pose $\mathcal{F}(x, y) = \displaystyle\int_x^y f(t)dt$.

On rappelle que, si la fonction f est réelle et positive, elle admet une intégrale généralisée sur $\mathbb{R}$ (on peut aussi dire que f est intégrable sur $\mathbb{R}$) si la fonction $\mathcal{F}$ est bornée. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est alors égale à la borne supérieure de l'ensemble des nombres $\mathcal{F}(x, y)$ pour x et y parcourant $\mathbb{R}$.

C'est aussi la limite de $\mathcal{F}(x, y)$ lorsque $x \to -\infty$ et $y \to +\infty$.

Si la fonction f est à valeurs réelles ou complexes, elle admet une intégrale généralisée sur $\mathbb{R}$ (ou f est intégrable sur $\mathbb{R}$) si la fonction $|f|$ est intégrable.

On rappelle aussi que si l'on considère deux fonctions f et g à valeurs réelles ou complexes telles que $|f(x)| \leq |g(x)|$ pour tout $x \in [a, +\infty[$ alors

$$\text{Existence de } \int_a^{+\infty} g(x)dx \Longrightarrow \text{Existence de } \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Enfin, pour deux réels $a < b$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \times I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une application *continue*, on considère l'application $F : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(t, x)dt$ alors F est continue sur I.

Si E est une partie de $\mathbb{R}$, on appelle fonction *indicatrice* ou fonction *caractéristique* de E, et on note $\mathbf{1}_E$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathbf{1}_E(x) = 1$ pour $x \in E$ et $\mathbf{1}_E(x) = 0$ sinon.

Transformée de Fourier

1. Soit f définie sur un segment $[a, b]$ à valeurs réelles, continue par morceaux.

a) Démontrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $f_y : x \mapsto f(x)e^{-ixy}$ est intégrable sur $[a, b]$.

b) On définie la fonction $\hat{f}$ en posant pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$\hat{f}(y) = \int_a^b f(x)e^{-ixy}dx$$

Démontrer que la fonction $\hat{f}$ est bornée et continue sur $\mathbb{R}$.

2. a) Calculer $\hat{f}$ lorsque f est la fonction $\mathbf{1}_{[a,b]}$ indicatrice de l'intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

b) En déduire que, si A est un nombre réel > 0, et si χ_A est la fonction indicatrice de l'intervalle $[-A, A] \subset \mathbb{R}$, on a

$$\widehat{\chi_A}(y) = \frac{2\sin Ay}{y} \text{ si } y \neq 0 \text{ et } \widehat{\chi_A}(y) = 2A \text{ si } y = 0.$$

Partie II. Convolution

1. Soit A un nombre réel > 0 et soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, nulles hors de l'intervalle $[-A, A]$ et continues sur cet intervalle.

On définit une nouvelle fonction, notée $f \star g$, en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy.$$

a) Vérifier que l'intégrale définissant $f \star g$ est bien défini et que la fonction $f \star g$ est nulle hors de $[-2A, 2A]$.

b) Démontrer que la fonction $f \star g$ est continue (on étudiera séparément les cas $x > 0$, $x < 0$ et $x = 0$).

2. Démontrer l'égalité : $\chi_A \star \chi_A = 2A\Delta_{2A}$ où χ_A est la fonction indicatrice de l'intervalle $[-A, A]$ et Δ_{2A} est la fonction définie par :

$$\Delta_{2A}(x) = 1 - \frac{|x|}{2A} \text{ si } |x| \leq 2A \text{ et } \Delta_{2A}(x) = 0 \text{ sinon.}$$

3. **(Question facultative)** Soient f et g deux fonctions vérifiant les hypothèses de II.1, démontrer l'égalité $\widehat{f \star g} = \hat{f}\hat{g}$.

Partie III. Calcul d'intégrales

On admet maintenant le théorème de réciprocité de Fourier :

Soit f continue sur $\mathbb{R}$, nulle à l'extérieur d'un segment $[a,b]$ et à valeurs réelles. On suppose que la fonction $\hat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors, pour tout x réel :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{ixy} dy$$

1. Soit $b > 1$, on pose $f_b(t) = \left|\frac{\sin t}{t}\right|^b$ pour tout réel t non nul et $f_b(0) = 1$.
Démontrer que la fonction f_b est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite, on note J_b la valeur de l'intégrale $J_b = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_b(t)dt$.

2. Rappelons que l'on a noté

$$\Delta_1(x) = 1 - |x| \text{ si } |x| \leq 1 \text{ et } \Delta_1(x) = 0 \text{ sinon.}$$

a) En utilisant les question I.2.b, II.2 et II.3, montrer que l'on a : $\widehat{\Delta_1}(y) = f_2(\frac{y}{2})$.
b) En utilisant le théorème de réciprocité de Fourier, calculer la valeur de l'intégrale J_2.
3. a) En utilisant la définition II.1 de la loi $\star$, calculer la valeur de $(\Delta_1 \star \Delta_1)(0)$.
b) En déduire la valeur de J_4.

Partie IV. Majoration de l'intégrale J_b pour $b \geq 4$

Rappelons que, si b est un nombre réel > 1, on a défini sur $\mathbb{R}$ une fonction $f_b(t) = \left|\frac{\sin t}{t}\right|^b$ pour tout réel t non nul et $f_b(0) = 1$ et on a noté J_b la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_b(t)dt$.
Cette partie du problème est consacré à la démonstration de la majoration

$$J_b < \pi\sqrt{\frac{2}{b}} \text{ pour } b \geq 4.$$

1. a) En utilisant la formule de Taylor Lagrange pour $\sin(t)$ démontrer que

$$\frac{\sin t}{t} \leq 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} \text{ pour tout réel } t.$$

b) De la même façon, montrer que :

$$e^{-t^2/6} \geq 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{72} - \frac{t^6}{1296} \text{ pour tout réel } t.$$

c) En déduire que pour $t \in]0, \dfrac{6}{\sqrt{5}}]$, on a :

$$0 \leq \frac{\sin t}{t} \leq e^{-t^2/6}$$

2. Soit $b \geq 4$ et $c = \frac{6}{\sqrt{5}}$. On rappelle la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$.
a) Montrer que l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_b(t)dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bt^2/6}dt + 2\int_c^{+\infty} \frac{dt}{t^b} dt.$$

b) Calculer en fonction de b, la valeur des intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bt^2/6} dt \text{ et } \int_{c}^{+\infty} \frac{dt}{t^b}$$

c) Démontrer que l'on a $x - 1 \geq \frac{3}{2}\sqrt{x}$ sur l'intervalle $[4, +\infty[$.

d) En déduire les majorations :

$$J_b \leq \frac{\pi}{\sqrt{b}} \left(\sqrt{\frac{6}{\pi}} + \frac{4}{3\pi c^3} \right)$$

puis :

$$J_b \leq \pi \sqrt{\frac{2}{b}}.$$