PRÉPARATION À L'AGRÉGATION INTERNE DE MATHÉMATIQUES
ORSAY
Ecrit analyse

Devoir 2 : Approximation de fonctions périodiques

Notations

Dans toute cette feuille, on note

$$\mathcal{C}_{2\pi} = \text{espace des fonctions continues } 2\pi - \text{périodiques à valeurs dans } R\ ;$$

$$\mathcal{CM}_{2\pi} = \text{espace des fonctions continues par morceaux } 2\pi - \text{périodiques à valeurs dans } R$$

et on considère les applications définies sur ces espaces et à valeurs dans R^+ :

$$||f||_\infty^{2\pi} = \text{Sup}_{[0,2\pi]}(|f|) \text{ et } N_2^{2\pi}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(f(t))^2dt \text{ pour } f \in \mathcal{C}_{2\pi} \text{ ou } \mathcal{CM}_{2\pi}.$$

Préliminaires

a) Montrer que $||.||_\infty^{2\pi}$ définie une norme sur $\mathcal{C}_{2\pi}$ et $\mathcal{CM}_{2\pi}$.
b) Montrer que $N_2^{2\pi}$ définie une norme sur $\mathcal{C}_{2\pi}$.
Sur cet espace de fonctions, on notera aussi $N_2^{2\pi}(f) = ||f||_2^{2\pi}$.
c) Est ce que $N_2^{2\pi}$ definie encore une norme sur $\mathcal{CM}_{2\pi}$?
d) Montrer que, pour tout f appartenant à l'un des espaces fonctionnels considérés, on a toujours $N_2^{2\pi}(f) \leq ||f||_\infty^{2\pi}$.
d) Montrer que, pour tout f appartenant à $\mathcal{CM}_{2\pi}$, il existe une suite de fonctions continues $(f_n) \in \mathcal{C}_{2\pi}^N$ telle que $N_2^{2\pi}(f - f_n)$ tende vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 1 . – **Convolution et unité approchée**

1) On appelle *unité approchée* toute suite de fonctions $(\varphi_n) \in \mathcal{CM}_{2\pi}^N$ à valeurs positives vérifiant

$$(i) \text{ Pour tout } n \in N, \text{ on a } \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(\varphi_n(t))dt = 1$$

$$(ii) \text{ Pour tout } \alpha \in\ ]0,\pi[\,, \text{ on a } \int_{-\pi}^{+\pi}\varphi_n(t)dt - \int_{-\pi+\alpha}^{+\pi-\alpha}\varphi_n(t)dt \text{ tend vers 0 lorsque } n \text{ tend vers l'infini.}$$

1.a) Donner un exemple d'unité approchée $(\varphi_n^{(A)})$ constitué de fonctions constantes par morceaux.
1.b) On considère la suite de fonctions $(h_n)_{n\in N}$ définie par $h_n(x) = (\cos x/2)^{2n}$ pour $x \in [-\pi,\pi]$ et on pose :

$$\lambda_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h_n(x)dx\ ;\ g_n(x) = \frac{1}{\lambda_n}h_n(x)$$

quelle est l'allure du graphe de g_n ?
Montrer que (g_n) est une unité approchée.

2) Si f et g sont des éléments de $\mathcal{CM}_{2\pi}$, on appelle *produit de convolution* de f et g la fonction

$$f \star g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt.$$

2.a) Montrer que $\star$ est bilinéaire et commutatif.

2.b) Montrer que si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ alors $f \star g \in \mathcal{C}_{2\pi}$.

3) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $(\varphi_n) \in \mathcal{CM}_{2\pi}^{N}$ une unité approchée, on défini la suite de fonctions $(f_n)_{n\in N} = (f \star \varphi_n)_{n\in N}$ et on se propose de montrer que f_n converge vers f uniformément sur R.

3.a) Montrer directement ce résultat dans le cas de l'unité approchée $(\varphi_n^{(A)})$.

3.b) Montrer ce résultat dans le cas général.

4.a) En utilisant l'unité approchée $(g_n)_{n\in N}$, montrer que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense pour la norme $||.||_{\infty}^{2\pi}$ dans l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}$.

4.b) En déduire que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense pour la norme $||f||_2^{2\pi}$ dans l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}$.

5) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, il existe une suite $(f_n)_{n\in N}$ de polynômes trigonométriques telle que $N_2^{2\pi}(f - f_n)$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.