Agrégation Interne. Session 2002
Section MATHÉMATIQUES
Deuxième épreuve. Corrigé

Partie I. Transformée de Fourier

1. a) La fonction $f_y : x \mapsto f(x)e^{-ixy}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et ceci entraîne que, pour tout y réel, f_y est intégrable sur $[a, b]$.

b) La fonction $\hat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout y réel

$$|\hat{f}(y)| \leq \int_a^b |f(x)|dx < +\infty$$

ceci implique que $\hat{f}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Enfin, il existe des réels $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = b$ tels que les restrictions f_k de f à $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$ admettent un prolongement $\widetilde{f_k}$ continue sur $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Ainsi les fonctions $F_k(x, y) = \widetilde{f_k}(x)e^{-ixy}$ sont continues sur $[\alpha_k, \alpha_{k+1}] \times \mathbb{R}$ et le théorème sur la continuité des intégrales propres à paramètres entraîne que $\hat{f}_k(y) = \displaystyle\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} F_k(x, y)dx$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Donc $\hat{f}(y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}_k(y)$ est continue comme somme de fonctions continues.

De même, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $\frac{\partial^l F_k}{\partial y^l}(x, y) = (-ix)^l \widetilde{f_k}(x)e^{-ixy}$ sont continues sur $[\alpha_k, \alpha_{k+1}] \times \mathbb{R}$ et le théorème sur la dérivabilité des intégrales à paramètres entraîne que $\hat{f}_k(y)$ est de classe $\mathcal{C}^l$ sur $\mathbb{R}$ avec $\hat{f}_k^{(l)}(y) = \displaystyle\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} (-ix)^l \widetilde{f_k}(x)e^{-ixy}dx$ pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Donc $\hat{f}(y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}_k(y)$ est de classe $\mathcal{C}^l$ comme somme de fonctions $\mathcal{C}^l$. Ainsi, $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2. a) Il vient :

$$\widehat{1_{[a,b]}}(y) = \int_a^b e^{-ixy}dx = \begin{cases} \frac{1}{iy}\left(e^{-iay} - e^{-iby}\right) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ b - a & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$$

b) Par la question précédente, il vient immédiatement que

$$\widehat{\chi_A}(y) = \begin{cases} \frac{1}{iy}\left(e^{iAy} - e^{-iAy}\right) = \dfrac{2\sin Ay}{y} & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 2A & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$$

Partie II. Convolution

1. Les fonctions f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ à support compact $[-A, A]$. L'intégrale généralisée définissant la convolée $f \star g$ est en fait une intégrale sur un compact ; elle est donc définie.

On peut écrire :

$$(f \star g)(x) = \int_{-A}^{A} f(y)g(x-y)dy$$

- si $x < -2A$, pour $y \in [-A, A]$, on a $x - y < -A$ et $(f \star g)(x) = 0$.
- si $x > 2A$, pour $y \in [-A, A]$, on a $x - y > A$ et $(f \star g)(x) = 0$.

Ainsi $f \star g$ est à support dans $[-2A, 2A]$.

b) Les fonctions f et g sont continues sur $[-A, A]$ et nulles à l'extérieur de cet intervalle, elles ne sont donc pas obligatoirement continue en $\pm A$; la fonction $f \star g$ n'est donc pas automatiquement continue sur $\mathbb{R}$. Pour montrer sa continuité, il faut le prouver « à la main» ... On remarque que pour tout x réel

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy = \int_{\max(-A,x-A)}^{\min(A,x+A)} f(y)g(x-y)dy.$$

On peut reécrire l'expression précédente avec :

$$(f \star g)(x) = \int_{\frac{x+|x|}{2}-A}^{\frac{x-|x|}{2}+A} f(y)g(x-y)dy$$

ce qui donne $(f \star g)(x) = \displaystyle\int_0^1 F(x,t)dt$ où $y = (2A - |x|)t - A + \dfrac{x + |x|}{2}$ et :

$$F(x,t) = f\left(\frac{x+|x|}{2} - A + (2A - |x|)t\right) g\left(\frac{x-|x|}{2} + A - (2A - |x|)t\right)(2A - |x|)$$

qui est continue sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$ comme composée et produit de fonctions continues.

Ainsi, le théorème sur la continuité des intégrales propres à paramètres entraîne que La fonction $f \star g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On pouvait aussi, comme indiqué dans l'énoncé, étudier séparément les cas $x > 0$, $x < 0$ et montrer la continuité en $x = 0$.

2. On a

$$\chi_A \star \chi_A(x) = \int_{-A}^{A} \chi_A(x-y)dy = \int_{x-A}^{x+A} \chi_A(u)du = \int_{\max(-A,x-A)}^{\min(A,x+A)} du$$

Ainsi

$$\chi_A \star \chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 2A \\ \displaystyle\int_{-A}^{x+A} du = x + 2A & \text{si } -2A \leq x < 0 \\ \displaystyle\int_{x-A}^{A} du = 2A - x & \text{si } 0 < x \leq 2A \end{cases}$$

ce qui donne le résultat désiré.

3. **(facultatif)** Notons que les fonctions que nous manipulerons dans cette question sont continues et à support compact. On pourra donc utiliser le théorème de Fubini.

Soit t réel.

$$\begin{aligned} \widehat{f \star g}(x) &= \int_{\mathbb{R}} (f \star g)(t) e^{-itx} dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y) g(t-y) e^{-ixt} dy dt \\ &= \int_{-2A}^{2A} \int_{-2A}^{2A} f(y) g(t-y) e^{-ix(t-y)} e^{-ixy} dy dt \text{ (avec 1.a)} \\ &= \int_{-2A}^{2A} f(y) e^{-ixy} dy \int_{-2A}^{2A} g(u) e^{-ixu} du = \hat{f}(x) \hat{g}(x) \text{ (avec Fubini)} \end{aligned}$$

Partie III. Calcul d'intégrales

Il y avait une erreur d'énoncé : il fallait diviser par 2π dans la formule de réciprocité de Fourier.

1. La fonction $t \mapsto \left|\frac{\sin t}{t}\right|$ est paire et continue sur $\mathbb{R}^+$ (admet un prolongement par continuité en 0). De plus

$$\left|\frac{\sin t}{t}\right|^b \leq \frac{1}{t^b}$$

dont l'intégrale converge sur $[1, +\infty[$, car $b > 1$. On note $J_b = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^b dt.$

2. Notons $I = [-1/2, 1/2]$.

a) Comme indiqué dans l'énoncé, l'utilisation des question I.2.b, II.2 et II.3 donne :

$$\widehat{\Delta_1}(y) = \widehat{\chi_I \star \chi_I}(y) = \widehat{\chi_I(y)}^2 = \begin{cases} \left(\dfrac{\sin y/2}{y/2}\right)^2 & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$$

ce qui correspond au résultat désiré.

b) En utilisant le théorème de réciprocité de Fourier (car Δ_1 nulle à l'extérieur du segment $[-1, 1]$), pour tout y réel :

$$\Delta_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\Delta_1}(y) e^{ixy} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin y/2}{y/2}\right|^2 e^{ixy} dy$$

Soit, pour $x = 0$:

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\sin y/2}{y/2}\right|^2 dy = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\sin u}{u}\right|^2 du \Rightarrow J_2 = \pi$$

3. a) En utilisant la définition II.1, il vient :

$$\begin{aligned}(\Delta_1 \star \Delta_1)(0) &= \int_{\mathbb{R}} \Delta_1(y)\Delta_1(-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\Delta_1(y))^2 dy \\ &= \int_{-1}^{1} (1-|y|)^2 dy = 2\int_0^1 (1-y)^2 dy = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

b) Ainsi, avec le même raisonnement que dans la question précédente :

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} = (\Delta_1 \star \Delta_1)(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{(\Delta_1^2)}(y)dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (\widehat{\Delta_1})^2(y)dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\sin y/2}{y/2}\right|^4 dy = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\sin u}{u}\right|^4 du \Rightarrow J_4 = \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

Partie IV. Majoration de l'intégrale J_b

1. a) Avec la formule de Taylor-Lagrange, pour tout réel $t \neq 0$, on a :

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{1}{t}\left(t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120}\sin^{(5)}(\theta_t)\right) \text{ où } 0 < |\theta_t| < |t|$$

et $\sin^{(5)}(\theta_t) = \cos(\theta_t) \leq 1$, ainsi :

$$\frac{\sin t}{t} \leq 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} \text{ pour tout réel } t \neq 0.$$

b) De la même façon, pour tout t réel :

$$\exp\left(-\frac{t^2}{6}\right) = 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{1}{2}\left(-\frac{t^2}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-\frac{t^2}{6}\right)^3 \left(\exp(-\widetilde{\theta}_t)\right)^{(3)} \text{ où } 0 < \widetilde{\theta}_t < \frac{t^2}{6}$$

or $\left(\exp(-\widetilde{\theta}_t)\right)^{(3)} = -\exp(-\widetilde{\theta}_t) > -1$, ainsi :

$$\exp\left(-\frac{t^2}{6}\right) > 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{72} - \frac{t^6}{1296} \text{ pour tout réel } t.$$

c) Ainsi pour $t \in [0, \dfrac{6}{\sqrt{5}}]$, il vient $\dfrac{\sin t}{t} \geq 0$ (car $0 < \frac{6}{\sqrt{5}} < \pi$), et

$$\frac{\sin t}{t} \leq 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} \leq 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{72} - \frac{t^6}{1296} \leq e^{-t^2/6}$$

2. a) Soit $b \geq 4$ et $c = 6/\sqrt{5}$. Par positivité et parité :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^b dt = 2\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^b dt &= 2\int_0^{c} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^b dt + 2\int_c^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^b dt \\
&\leq 2\int_0^{c} e^{-bt^2/6} dt + 2\int_c^{+\infty} \frac{dt}{t^b} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} e^{-bt^2/6} dt + 2\int_c^{+\infty} \frac{dt}{t^b}
\end{aligned}$$

b) Le changement de variables $\sqrt{\dfrac{b}{6}}\,t = u$ donne

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-bt^2/6} dt = \sqrt{\frac{6\pi}{b}} \quad \text{et} \quad \int_c^{+\infty} \frac{dt}{t^b} = \frac{1}{(b-1)c^{b-1}}$$

c) Il suffit d'étudier la fonction $x \mapsto x - 1 - \frac{3}{2}\sqrt{x}$ sur l'intervalle $[4, +\infty[$ et montrer qu'elle y est croissante, tout en s'annulant en $x = 4$.

d) Pour $b \geq 4$, il vient par les questions précédentes :

$$J_b \leq \sqrt{\frac{6\pi}{b}} + \frac{4}{3\sqrt{b}c^3} = \frac{\pi}{\sqrt{b}}\left(\sqrt{\frac{6}{\pi}} + \frac{4}{3\pi c^3}\right)$$

Or $c = 6/\sqrt{5}$. Ainsi

$$\sqrt{\frac{6}{\pi}} + \frac{4}{3\pi c^3} = \sqrt{\frac{6}{\pi}} + \frac{5\sqrt{5}}{162\pi} \sim 1.40394 < \sqrt{2}$$