Université Paris Sud Orsay Préparation à l'Agrégation interne de Mathématiques

Compléments d'analyse

Notes de cours

J. HENRY
septembre 2006

Table des matières

1

Séries numériques

1.1 Généralités sur les séries

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1.1 Définitions

Soit $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On appelle série de terme général u_n la suite $S_n(u)_{n\geqslant 0}$ telle que $S_n(u) = \sum\limits_{k=0}^{k=n} u_k$. La série est dite convergente (resp. divergente) si la suite $S_n(u)$ est convergente (resp. divergente). On écrit souvent la série Σu_n pour la série de terme général u_n, ceci sans préjuger de la convergence ou de la divergence de la série.

La quantité $S_n(u)$ s'appelle la somme partielle de la série. Si la série converge la limite $S(u)$ de la suite $S_n(u)$ s'appelle la somme de la série et se note $S(u) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ ou $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$. Dans ce cas, la différence $R_n(u) := S(u) - S_n(u)$ s'appelle le reste d'ordre n de la série. Ce reste tend évidemment vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
Attention! Le reste d'une série n'est défini que si celle si converge ! et dans ce cas il tend automatiquement vers 0.

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Soit $p \in \mathbb{N}$. Posons $v_n = u_{p+1+n}$. On a de suite $\sum\limits_{k=0}^{k=m} v_k = S_{m+p+1}(u) - S_p(u)$ donc la série de terme général v_n converge et sa somme vaut $S(u) - S_p(u)$ c'est à dire le reste d'ordre p de la série $\sum u_n$. Ceci justifie l'écriture

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{k=p} u_k + \sum_{k=p+1}^{\infty} u_k$$

Si on se donne une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ définie à partir d'un certain rang, on peut encore considérer la série de terme général u_n comme étant la série de terme général $v_k = u_{n_0+k}$. Celà revient à un changement d'indice près, à prolonger la définition de la suite u à $\mathbb{N}$ tout entier en posant $u_j = 0$ pour $j < n_0$.

1.1.2 Propriétés élémentaires

THEOREME 1.1.1
L'ensemble des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que la série Σu_n converge forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application $(u_n)_{n\geqslant 0} \to \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_n$ est linéaire.

THEOREME 1.1.2
Pour que la série de terme général u_n converge, il FAUT que le terme général u_n tende vers 0.

En effet, $u_n = S_n(u) - S_{n-1}(u)$ pour $n \geqslant 1$. Cette condition nécessaire n'est pas suffisante comme le prouve l'exemple suivant.

THEOREME 1.1.3
La série de terme général $u_n = 1/n$ est divergente.

En effet, $S_{2n}(u) - S_n(u) = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ ce qui montre que la suite $(S_n(u))$ n'est pas convergente.

Remarque
Par définition, l'étude de la série de terme général u_n est l'étude de la suite $(S_n(u))$. Inversement, soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Etudier la suite (a_n) revient à étudier la série de terme général b_n avec $b_0 = a_0$ et $b_n = a_n - a_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.

Modification d'un nombre fini de termes : si les suites (u_n) et (v_n) sont telles que $u_n = v_n$ pour tout n sauf un nombre fini, les séries Σu_n et Σv_n sont de même nature (i.e. toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes). On dit qu'on ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de termes.

Suppression des termes nuls : Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ et $A = \{n \in \mathbb{N} \ ; \ u_n \neq 0\}$. Si A est fini, la série de terme général u_n converge et sa somme vaut $\sum_{k \in A} u_k$. Supposons A infini et soit $\varphi : \mathbb{N} \to A$ l'unique bijection strictement croissante de $\mathbb{N}$ sur A. Posons $v_n = u_{\varphi(n)}$. La série de terme général v_n est dite obtenue à partir de Σu_n en supprimant les termes nuls. Les séries Σv_n et Σu_n sont de même nature et, dans le cas où elles convergent, ont la même somme.

1.1.3 Convergence absolue

$\mathbb{K}$ étant complet, une série numérique Σu_n est convergente ssi elle satisfait au critère de Cauchy pour les séries

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \ \ n \geqslant N \Rightarrow \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| \leqslant \varepsilon$$

DEFINITION 1.1.1
On dit que la série de terme général u_n est absolument convergente ssi la série de terme général $|u_n|$ est convergente.

Notation Dans la suite, si $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite numérique, on notera $|u|$ la suite $(|u_n|)_{n \geqslant 0}$.

THEOREME 1.1.4
Toute série numérique absolument convergente est convergente.

Celà résulte immédiatement du critère de Cauchy et de l'inégalité $\left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} |u_k|$.

THEOREME 1.1.5
Soit $q \in \mathbb{C}^*$. La série de terme général q^n converge ssi $|q| < 1$ et dans ce cas $\sum_{k=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

1.2 Séries à termes positifs

Une série Σu_n est dite à termes positifs si pour tout n $u_n \in \mathbb{R}_+$.

1.2.1 CNS de convergence

Avec les notations précédentes, la relation $u_n = S_n(u) - S_{n-1}(u)$ valable pour tout $n \geqslant 1$ montre que si la série est à termes positifs la suite $(S_n(u))$ des sommes partielles est croissante. On en déduit

THEOREME 1.2.1
La série Σu_n à termes positifs est convergente ssi la suite $(S_n(u))$ des sommes partielles est majorée. Dans ce cas

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n(u)$$

En cas de divergence, la suite $(S_n(u))$ tend vers l'infini.

1.2.2 Théorèmes de comparaison

THEOREME 1.2.2
*Soient Σu_n et Σv_n deux séries **à termes positifs**.*
1) Si il existe un entier n_0 et un réel positif K tel que $u_n \leqslant K v_n$ pour tout $n \geqslant n_0$ et si la série Σv_n converge, il en est de même de la série Σu_n.
2) Supposons $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$. Alors les séries Σu_n et Σv_n sont de même nature.

COROLLAIRE 1.2.1
Soient Σu_n une série numérique et Σv_n une série à termes positifs convergente. Si $u_n = O(v_n)$, la série Σu_n est absolument convergente, donc convergente.

La comparaison avec une série géométrique conduit aux deux règles classiques suivantes.

COROLLAIRE 1.2.2 (Règle de d'Alembert)
*Soit (u_n) une suite de réels **stritement positifs** à partir d'un certain rang n_0 telle que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vers a.*
1) Si $a < 1$ la série Σu_n converge.
2) Si $a > 1$ la série Σu_n diverge.

COROLLAIRE 1.2.3 (Règle de Cauchy)
*Soit (u_n) une suite de réels **positifs** telle que la suite $\sqrt[n]{u_n}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vers a.*
1) Si $a < 1$ la série Σu_n converge.
2) Si $a > 1$ la série Σu_n diverge.

On notera que ces corollaires sont des conditions suffisantes de convergence, en aucun cas des conditions nécessaires.

1.2.3 Sommation des relations de comparaison

THEOREME 1.2.3 (sommation des relations de comparaisons)
*Soient $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites numériques, **v étant à termes positifs**. On suppose $u_n = \underset{n\to\infty}{o}(v_n)$ (resp. $u_n = \underset{n\to\infty}{O}(v_n)$).*

1. *Si la série $\sum v_n$ converge, il en est de même de la série $\sum u_n$ et*

$$R_n(u) = \underset{n\to\infty}{o}(R_n(v)) \quad \text{resp.} \quad R_n(u) = \underset{n\to\infty}{O}(R_n(v))$$

2. *Si la série $\sum v_n$ diverge, on a*

$$S_n(u) = \underset{n\to\infty}{o}(S_n(v)) \quad \text{resp.} \quad S_n(u) = \underset{n\to\infty}{O}(S_n(v))$$

preuve

On se limitera au cas $u_n = o(v_n)$ l'autre étant similaire et laissé au lecteur.

1. Supposons que la série Σv_n converge. On sait qu'alors la série Σu_n est absolument convergente, donc convergente. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N tel que $0 \leqslant |u_n| \leqslant \varepsilon v_n$ pour tout $n \geqslant N$. Alors, pour $n \geqslant N$ et $p \in \mathbb{N}^*$ on a $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leqslant \varepsilon \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} v_k\right)$ donc en prenant la limite lorsque p tend vers l'infini

$$n \geqslant N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\right| \leqslant \varepsilon \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right) \blacksquare$$

2. Supposons maintenant que la série Σv_n diverge. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N tel que pour $n \geqslant N$ on ait $|u_n| \leqslant (\varepsilon/2)v_n$. D'autre part, la suite $(S_n(v))$ tend vers l'infini, donc il existe un entier N_1 tel que $S_n(v) > 0$ pour $n \geqslant N_1$. Pour $n \geqslant \max(N, N_1)$ on a

$$|S_n(u)| \leqslant S_n(|u|) = \sum_{k=0}^{k=N} |u_k| + \sum_{k=N+1}^{k=n} |u_k| \leqslant S_N(|u|) + \frac{\varepsilon}{2}\left(\sum_{k=N+1}^{k=n} v_k\right) = S_N(|u|) + \frac{\varepsilon}{2}(S_n(v) - S_N(v))$$

donc

$$\frac{|S_n(u)|}{S_n(v)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{S_n(v)}\left(S_N(|u|) - \frac{\varepsilon}{2}S_N(v)\right)$$

Quand n tend vers infini, $\frac{1}{S_n(v)}\left(S_N(|u|) - \frac{\varepsilon}{2}S_N(v)\right)$ tend vers 0, donc il existe un entier N_2 tel que cette quantité soit inférieure à $\varepsilon/2$ pour tout $n \geqslant N_2$. Alors pour $n \geqslant \max(N, N_1, N_2)$ on a $0 \leqslant |S_n(u)| \leqslant \varepsilon S_n(v)$. On notera que dans ce cas, la série Σu_n peut être divergente ou convergente. ■.

THEOREME 1.2.4 (Sommation des équivalents)
*Soient $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites numériques, **v étant à termes positifs**. On suppose que $u_n \sim kv_n$ où $k \in \mathbb{C}^*$.*

1. *Si la série Σv_n converge, il en est de même de Σu_n, et*

$$R_n(u) \underset{n\to\infty}{\sim} kR_n(v) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

2. *Si la série Σv_n diverge il en est de même de la série Σu_n et*

$$S_n(u) \underset{n\to\infty}{\sim} kS_n(v)$$

preuve
L'hypothèse $u_n \sim kv_n$ équivaut à $(u_n - kv_n) = o(v_n)$.
Supposons Σv_n convergente. On sait qu'alors Σu_n est absolument convergente. Le théorème précédent donne $R_n(u) - kR_n(v) = R_n(u - kv) = o(R_n(v))$ soit $R_n(u) \sim kR_n(v)$.
Supposons Σv_n divergente. Le théorème précédent donne $S_n(u) - kS_n(v) = S_n(u - kv) = o(S_n(v))$ soit $S_n(u) \sim kS_n(v)$.
Comme $S_n(v)$ tend vers l'infini, on en déduit que $S_n(u)$ diverge, ce que l'on peut vérifier directement.

Attention! Si $v_n > 0$ pour tout n et si la suite **réelle** (u_n) est telle que $u_n \sim v_n$ alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang. En effet, le quotient u_n/v_n tend vers 1, donc il existe N tel que $n \geqslant N \Rightarrow 1/2 \leqslant u_n/v_n \leqslant 3/2$. **Ceci tombe en défaut si la suite *u* est complexe** comme le prouve l'exemple $u_n = \frac{1}{n} + \frac{i}{n^2}$ et $v_n = \frac{1}{n}$.

Exercice On suppose que (v_n) soit une suite positive, que (u_n) soit une suite complexe et $u_n \sim kv_n,\ k \in \mathbb{C}^*$. On pose $k = a + ib,\ \ u_n = x_n + iy_n$ avec x_n, y_n, a, b réels. Montrer que si $a \neq 0$ on a $x_n \sim av_n$, que si $b \neq 0$ on a $y_n \sim bv_n$. Montrer aussi que si $a = 0$ (et donc $b \neq 0$) alors $x_n = o(v_n)$. Considérer de même le cas $b = 0$. Retrouver le fait que si Σv_n diverge, alors Σu_n diverge.

1.2.4 Comparaison avec une intégrale

Certaines parties de cette section supposent connues la notion de fonction intégrable sur un intervalle.

THEOREME 1.2.5
Soit n_0 un entier naturel et $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue (ou localement continue par morceaux), décroissante et telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
1) La série $\sum_{k=n_0}^{\infty} f(k)$ converge ssi la fonction f est intégrable sur $[n_0, +\infty[$.
2) Les suites (a_n) et (b_n) définies respectivement par

$$a_n = \sum_{k=n_0}^{k=n} f(k) - \int_{n_0}^{n} f(x)dx \quad \textit{et} \quad b_n = \sum_{k=n_0}^{k=n} f(k) - \int_{n_0}^{n+1} f(x)dx$$

sont adjacentes.
3) Si f est intégrable sur $[n_0, +\infty[$ on a un encadrement du reste de la série :

$$\int_{n+1}^{\infty} f(t)dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leqslant \int_{n}^{\infty} f(k)$$

Remarque
Dans le cas présent où f est une fonction positive, l'intégrabilité de f sur $[n_0, +\infty[$ est équivalente au fait que l'intégrale $\int_{n_0}^{X} f(t)dt$ a une limite finie lorsque X tend vers l'infini.

preuve

1. Soit $k \geqslant n_0 + 1$. On a $\int_{k}^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)dx$. On en déduit
   a) Si f est intégrable, pour tout $n \geqslant n_0 + 1$ on a $\sum\limits_{n_0+1}^{n} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{n} f(x)dx \leqslant \int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ d'où la convergence de la série (théorème 1.2.1).
   b) Si f n'est pas intégrable, l'intégrale $\int_{n_0}^{X} f(t)dt$ tend vers l'infini avec X et l'inégalité $\int_{n_0}^{n+1} f(x)dx \leqslant \sum\limits_{k=n_0}^{k=n} f(k)$ montre que la somme partielle de la série $\Sigma f(k)$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.
2. $a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_{n}^{n+1} f(x)dx \leqslant 0$ $b_{n+1} - b_n = f(n+1) - \int_{n1}^{n+2} f(x)dx \geqslant 0$ et

   $$0 \leqslant a_n - b_n = \int_{n}^{n+1} f(x)dx \leqslant f(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

   De là on peut bien sur retrouver le point 1.
   Mais ce résultat est surtout intéressant en cas de divergence, car alors les suites (a_n) et (b_n) ont une limite commune λ et on obtient un développement asymptotique

   $$\sum_{k=n_0}^{k=n} f(k) = \int_{n_0}^{n} f(x)dx + \lambda + o(1)$$

3. C'est immédiat.

Exemples et applications

THEOREME 1.2.6 (Séries de Riemann)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de terme général $\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ converge ssi $\alpha > 1$.

COROLLAIRE 1.2.4 (Règle $n^{\alpha}u_n$)
Soit Σu_n une série à termes positifs.
1) Si il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $n^{\alpha}u_n$ ait une limite finie lorsque n tend vers l'infini, la série de terme général u_n converge.
2) Si il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que la suite $n^{\alpha}u_n$ ait une limite ***strictement positive*** *(éventuellement infinie), la série de terme général u_n diverge.*

On note traditionnellement $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$. La fonction ζ est définie ainsi sur $]1, +\infty[$ s'appelle la fonction zéta de Riemann.

Exercice : Montrer que pour $s \in \mathbb{C}$ la série de terme général $\dfrac{1}{n^s}$ est absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. La fonction zéta est ainsi définie dans le demi-plan formé des complexes de partie réelle strictement supérieure à 1.

THEOREME 1.2.7 (Séries de Bertrand)
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La série de terme général $\dfrac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}}$ converge dans les deux cas suivants et seulement dans ces deux cas :
1) $\alpha > 1$
2) $\alpha = 1$ et $\beta > 1$

preuve
Soit $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$.

- Si $\alpha > 1$ soit a tel que $1 < a < \alpha$. On a $\lim(n^a u_n) = 0$ d'où la convergence par application de la règle précédente.
- si $\alpha < 1$ soit a tel que $\alpha < a < 1$. On a $\lim(n^a u_n) = \infty$ d'où la divergence d'après la règle précédente.
- Si $\alpha = 1$ on compare avec l'intégrale de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln(x))^\beta}$ intégrale qui se calcule facilement. On obtient dans ce cas la convergence ssi $\beta > 1$.

EXEMPLE 1.2.1 (Constante d'Euler)
Il existe un réel γ appelé constante d'Euler tel que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right) = \gamma$$

Celà résulte immédiatement du point 2. du théorème de comparaison avec une intégrale.

EXEMPLE 1.2.2
Pour $\alpha > 1$ on a l'équivalent

$$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

En effet, en notant $R_n = \sum\limits_{n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ on déduit du point 3. du théorème la double inégalité

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha-1)n^{\alpha-1}R_n = 1$.

EXEMPLE 1.2.3 (Formule de Stirling)
On a l'équivalent

$$\boxed{n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

Posons $s_n = \ln(n!)$.

1. On a $s_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \ln(k)$. Une première approche consiste à utiliser la croissance de la fonction ln pour comparer s_n à une intégrale. On a pour tout $k \geqslant 1$ $\int_{k-1}^{k} \ln(x)dx \leqslant \ln(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} \ln(x)dx$ (Ceci est valable y compris pour $k = 1$ car ln est intégrable sur $]0,1]$). En sommant et en utilisant $\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x$ il vient

$$n\ln(n) - n \leqslant s_n \leqslant n\ln(n) - n + \ln(n) + O(1)$$

   On en déduit $s_n = n\ln(n) - n + O(\ln(n))$

2. Pour poursuivre le développement, on est donc amené à introduire la suite $a_n = s_n - n\ln(n) + n$. Etudier cette suite revient à étudier la série de terme général $\alpha_n = a_n - a_{n-1}$ $n \geqslant 2$. On a

$$\alpha_n = 1 + (n-1)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 + n\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   On a donc $\alpha_n \sim \dfrac{1}{2n}$. Il en résulte que la série de terme général α_n diverge et, d'après le théorème de sommation des équivalents que $a_n - a_1 = \sum\limits_{k=2}^{k=n} \alpha_k \sim \sum\limits_{k=2}^{k=n} \dfrac{1}{2k} \sim \dfrac{1}{2}\ln(n)$.

3. Ceci conduit à introduire $b_n = a_n - \frac{1}{2}\ln(n)$. On procède de même : on pose $\beta_n = b_n - b_{n-1}$, pour $n \geqslant 2$. Il vient
$$\beta_n = \alpha_n + \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 + n\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$
que l'on développe à l'ordre 2. On obtient $\beta_n \sim \frac{-1}{12n^2}$. La série de terme général β_n est donc convergente. Si on désigne sa somme par β, son reste est d'après le théorème sur la sommation des équivalents, équivalent à celui de la série de terme général $\frac{-1}{12n^2}$ donc équivalent à $\frac{-1}{12n}$. Or ce reste vaut $\beta - b_n$. Finalement, $b_n = \beta + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc
$$s_n = b_n + \frac{1}{2}\ln(n) + n\ln(n) - n = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \beta + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
En prenant l'exponentielle, on obtient
$$n! = K\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
où $K = e^\beta$ est une constante strictement positive.

4. La valeur de K se détermine avec la formule de Wallis. On pose $I_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n(x)dx$. Une intégration par parties donne, pour $n \geqslant 2$ $nI_n = (n-1)I_{n-2}$. Il en résulte que la suite $v_n = nI_nI_{n-1}$ est constante. Or $v_1 = I_1I_0 = \frac{\pi}{2}$ donc $v_n = \frac{\pi}{2}$.
La suite (I_n) est décroissante car $0 \leqslant x \leqslant \pi/2 \Rightarrow 0 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$. On en déduit $1 \leqslant \frac{I_{n-1}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n-2}}{I_n} = \frac{n}{n-1}$. Par conséquent I_{n-1}/I_n tend vers 1. Finalement on a $I_n \sim I_{n-1}$ d'où $v_n \sim nI_n^2$, et $I_n^2 \sim \sqrt{v_n/n} = \sqrt{\pi/2n}$ car $I_n > 0$. Pour finir, à partie de la relation de récurrence et de la valeur $I_0 = \pi/2$ on obtient
$$I_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$$
Comme $n! \sim K\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$ on obtient un équivalent de I_n, à savoir
$$I_n \sim \frac{\pi}{2}\frac{K(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}}{2^{2n}K^2n^{2n}e^{-2n}n} = \frac{\pi}{K}\frac{1}{\sqrt{2n}}$$
d'où on déduit $K = \sqrt{\pi}$, la formule de Stirling et même un développement à un terme
$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

1.3 Séries à termes réels ou complexes

Soit Σu_n une série numérique. Puisqu'on ne change pas la nature de la série en modifiant un nombre fini de termes, les résultats de la section précédente s'appliquent si on a $u_n \geqslant 0$ pour tout n supérieur à un certain n_0. De même si $u_n \leqslant 0$ en remplaçant u_n par $-u_n$.
On s'intéresse maintenant à des séries à termes réels dont le signe n'est pas constant à partir d'un certain rang ou à des séries à termes complexes.
Lorsqu'on doit étudier une telle série, la première chose à faire est d'étudier la convergence absolue. Ce n'est que lorque la série n'est pas absolument convergente que l'on doit mettre en oeuvre d'autres méthodes.

DEFINITION 1.3.1
On dit qu'une série Σu_n est semi-convergente si elle est convergente sans être absolument convergente.

1.3.1 Théorème des séries alternées

THEOREME 1.3.1
*Soit (a_n) une suite **décroissante** et **de limite nulle**. La série de terme général $(-1)^n a_n$ est convergente. De plus son reste $R_n = \sum_{k\geqslant n+1}(-1)^k a_k$ est du signe de $(-1)^{n+1}$ et vérifie $|R_n| \leqslant a_{n+1}$.*

preuve
Soit $A_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} (-1)^k a_k$. Les hypothèses sur la suite (a_n) assurent que les suites $(A_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(A_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes, la suite (A_{2n}) étant décroissante, la suite (A_{2n+1}) étant croissante. La suite (A_n) converge donc vers leur limite commune A et on a pour tout n $A_{2n+1} \leqslant A \leqslant A_{2n}$. On en déduit $R_{2n} = A - A_{2n} \leqslant 0$ et $|R_{2n}| = A_{2n} - A \leqslant A_{2n} - A_{2n+1} = a_{2n+1}$. De même, de $A_{2n+1} \leqslant A \leqslant A_{2n+2}$ on déduit $0 \leqslant R_{2n+1} = A - A_{2n+1} \leqslant A_{2n+2} - A_{2n+1} = a_{2n+2}$.

Exemple : Pour a tel que $0 < a \leqslant 1$ la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^a}$ est semi-convergente.

1.3.2 Transformation d'Abel

Le programme prévoit "exemples d'emplois de la transformation d'Abel". On donne ci dessous la méthode et un exemple d'utilisation.

Soit (ε_n) et (a_n) deux suites quelconques. On pose $A_n = a_0 + \cdots + a_n$. On a donc $a_n = A_n - A_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$ et $a_0 = A_0$. La transformation d'Abel consiste à exprimer une somme de termes consécutifs de la forme $\varepsilon_n a_n$ en fonction des ε_k et des A_k. Considérons par exemple $S_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \varepsilon_k a_k$ Il vient

$$S_n = \varepsilon_0 A_0 + \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k (A_k - A_{k-1}) = \sum_{k=0}^{k=n} \varepsilon_k A_k - \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k A_{k-1}$$

Dans la deuxième somme, on fait le changement d'indice $j = k - 1$. Il vient

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \varepsilon_k A_k - \sum_{j=0}^{j=n-1} \varepsilon_{j+1} A_j = \sum_{k=0}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) A_k + \varepsilon_n A_n$$

d'où finalement

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \varepsilon_k a_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) A_k + \varepsilon_n A_n$$

Remarque
Si la série Σa_n est convergente, on peut faire une autre transformation d'Abel en posant $\tilde{A}_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$ et en utilisant cette fois $a_n = \tilde{A}_n - \tilde{A}_{n+1}$.

EXEMPLE 1.3.1
Soient $\theta \in]\,0, 2\pi\,[$ et $a > 0$. La série de terme général $u_n = \dfrac{e^{ni\theta}}{n^a}$ est convergente.

Remarquons que le résultat est trivial si $a > 1$ car alors la série est absolument convergente. Pour $0 < a \leqslant 1$ elle n'est pas absolument convergente. Pour montrer la convergence de la série, on va prouver qu'elle satisfait au critère de Cauchy. On effectue une transformation d'Abel comme ci dessus dans la somme $S_{n+p} - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k a_k$ avec $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n^a}$ et $a_n = e^{ni\theta}$. Il vient en posant $A_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} e^{ik\theta}$

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k (A_k - A_{k-1}) = \sum_{k=n+1}^{n+p} \varepsilon_k A_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} \varepsilon_{k+1} A_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) A_k + \varepsilon_{n+p} A_{n+p} - \varepsilon_{n+1} A_n$$

On en déduit

$$|S_{n+p} - S_n| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}||A_k| + \varepsilon_{n+p}|A_{n+p}| + \varepsilon_{n+1}|A_n|$$

Or

$$A_n = \sum_{k=0}^{k=n} e^{ik\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \quad \text{car} \quad e^{i\theta} \neq 1$$

donc

$$|A_n| \leqslant M(\theta) = \frac{2}{|1-e^{i\theta}|}$$

Par ailleurs, la suite ε_k est décroissante. Il vient

$$|S_{n+p} - S_n| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1})M(\theta) + \varepsilon_{n+p}M(\theta) + \varepsilon_{n+1}M(\theta) = 2\varepsilon_{n+1}M(\theta) \leqslant \frac{2M(\theta)}{n^a}$$

θ étant fixé, cette quantité tend vers 0 avec n, donc pour un $\varepsilon > 0$ donné, il existe un entier N dépendant de θ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $|S_{n+p} - S_n| \leqslant \varepsilon$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. La série considérée satisfait donc bien au critère de Cauchy et par conséquent elle converge.

Complément

On a $|1-e^{i\theta}| = \left|e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}\right)\right| = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Soit alors η tel que $0 < \eta < \pi$. Soit $I = [\eta, 2\pi - \eta]$. Pour $\theta \in I$ on a $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \geqslant \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)$ donc $M(\theta) \leqslant M(\eta)$ d'où la majoration uniforme en θ : $|S_{n+p} - S_n| \leqslant \dfrac{2M(\eta)}{n^a}$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un entier N ne dépendant que de η et de ε tel que $n \geqslant N \Rightarrow \frac{2M(\eta)}{n^a} \leqslant \varepsilon$ ce qui prouve la convergence **uniforme** de la série considérée sur l'intervalle I.

En prenant les parties réelles et imaginaires on obtient en particulier que les séries $\sum \dfrac{\cos(n\theta)}{n}$ et $\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$ convergent sur $]\,0, 2\pi\,[$ et uniformément sur tout intervalle de la forme $[\eta, 2\pi - \eta]$.

1.3.3 Techniques d'études de séries quelconques

Groupements de termes

THEOREME 1.3.2 (Sommation par groupement de termes consécutifs)

Soit $a = (a_n)$ une suite réelle ou complexe ***convergeant vers 0****. Soit d'autre part (N_k) une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que la suite $(N_{k+1} - N_k)$ soit majorée. Soit $u_0 = \sum_{i=0}^{i=N_0} a_i$ et pour $k \geqslant 1,\ u_k = \sum_{i=1+N_{k-1}}^{i=N_k} u_i$. Les séries de terme général a_n et u_k sont de même nature. Si elles sont convergentes, on a $\sum_{n\geqslant 0} a_n = \sum_{k\geqslant 0} v_k$.*

preuve

Soiut $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$. On a $S_k(u) = S_{N_k}(a)$ donc si la série Σa_n converge, il en est de même de la série Σu_k et ces deux séries ont même somme.

Supposons maintenant que la série Σu_k converge et soit $S(u)$ sa somme. Soit d'autre part M un entier tel que $N_{k+1} - N_k \leqslant M$ pour tout k. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier n_1 tel que $n \geqslant n_1 \Rightarrow |a_n| \leqslant \varepsilon/2M$. D'autre part, il existe un entier q tel que $k \geqslant q \Rightarrow |S_k(u) - S(u)| \leqslant \varepsilon/2$. Soit $n \geqslant \max(n_1, N_q)$. Soit k l'unique entier tel que $N_k \leqslant n < N_{k+1}$. Puisque $n \geqslant N_q$, on a $k \geqslant q$ donc $|S_k(u) - S(u)| \leqslant \varepsilon/2$. D'autre part, $|S_n(a) - S_{N_k}(a)| = |a_{N_k+1} + \cdots + a_n|$ est une somme de $(n - N_k) \leqslant (N_{k+1} - N_k) \leqslant M$ termes tous inférieurs à $\varepsilon/2M$ en module. Donc cette somme est inférieure à $\varepsilon/2$. Finalement, comme $S_{N_k}(a) = S_k(u)$, il vient $n \geqslant \max(n_1, N_q) \Rightarrow |S_n(a) - S(u)| \leqslant |S_n(a) - S_{N_k}(a)| + |S_k(u) - S(u)| \leqslant \varepsilon$ d'où la conclusion.

Exemple

Soit à étudier la série de terme général $u_n = \dfrac{j^n}{\sqrt{n}}$ où $j = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right)$.

Cette série n'est pas absolument convergente. Afin d'utiliser la propriété $j^k + j^{k+1} + j^{k+2} = 0$ pour tout entier k, on va grouper les termes trois par trois. Posons donc $v_p = u_{3p-1} + u_{3p} + u_{3p+1}$ pour $p \geqslant 1$ et $v_0 = u_0 + u_1$. On a, pour $p \geqslant 1$

$$\begin{aligned}
v_p &= \frac{j^2}{\sqrt{3p-1}} + \frac{1}{\sqrt{3p}} + \frac{j}{\sqrt{3p+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3p}}\left(j^2\left(1 - \frac{1}{3p}\right)^{-1/2} + 1 + j\left(1 + \frac{1}{3p}\right)^{-1/2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3p}}\left(j^2\left(1 + O\left(\frac{1}{p}\right)\right) + 1 + j\left(1 + O\left(\frac{1}{p}\right)\right)\right) = O\left(\frac{1}{p^{3/2}}\right)
\end{aligned}$$

ce qui prouve que la série de terme général v_p est absolument convergente. Il en résulte que la série de terme général u_n est semi-convergente. Ce résultat est un cas particulier de celui obtenu plus haut à l'aide d'une transformation d'Abel.

Exercice

Soient (a_n) une suite réelle et (N_k) une suite strictement croissante d'entiers naturels. Soit $u_0 = \sum\limits_{i=0}^{i=N_0} a_i$ et pour $k \geqslant 1$, $u_k = \sum\limits_{i=1+N_{k-1}}^{i=N_k} u_i$. Montrer que les séries de terme général a_n et u_k sont de même nature dans chacun des deux cas suivants.
1) $a_n \geqslant 0$ pour tout n.
2) Tous les a_j d'une même tranche sont de même signe, i.e., pour tout k tous les a_i tels que $1 + N_{k-1} \leqslant i \leqslant N_k$ sont de même signe.

Utilisation de développements limités

Pour des suites à termes complexes ou réels de signes non constants, le théorème sur les équivalents (1.2.2) ne s'applique pas. Au lieu d'utiliser un équivalent on doit utiliser des égalités, ce qui conduit à effectuer des développements limités ou des développements asymptotiques plus généraux.

Exemple Soit à étudier la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$ où $a > 0$.

On a $|u_n| \sim \dfrac{1}{n^a}$ donc la série Σu_n est absolument convergente si $a > 1$ et n'est pas absolument convergente pour $0 < a \leqslant 1$. Effctuons alors un développement limité de u_n

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^a}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^a} + o\left(\frac{1}{n^a}\right)\right) = v_n - w_n \quad \text{avec} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n^a} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{n^{2a}}\left(1 + o(1)\right)$$

D'après le théorème des séries alternées la série Σv_n est convergente pour tout $a > 0$. D'autre part w_n est équivalent à $\dfrac{1}{n^{2a}}$ donc convergente si $a > \frac{1}{2}$ et divergente si $a \leqslant \frac{1}{2}$. Il en résulte que la série Σu_n est semi-convergente pour $\frac{1}{2} < a \leqslant 1$ et divergente pour $0 < a \leqslant \frac{1}{2}$.

1.3.4 Une caractérisation des séries réelles semi-convergentes

Notations

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $x^+ = \max(x, 0) = \dfrac{x + |x|}{2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et $x^- = \max(-x, 0) = \dfrac{|x| - x}{2} = \begin{cases} -x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
On définit ainsi deux applications continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $\forall x,\ x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$ et $x^+ \leqslant |x|$; $x^- \leqslant |x|$.

Soit (u_n) une suite réelle. Des majorations $0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n|$ et $0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|$, on déduit que si la série de terme général u_n est absolument convergente, les deux séries Σu_n^+ et Σu_n^- sont convergentes, donc aussi la série de terme général $u_n = u_n^+ - u_n^-$.
On retrouve ainsi le fait qu'une série réelle absolument convergente est convergente.
Supposons maintenant que la série ne soit pas absolument convergente. Comme $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$, l'une des deux séries Σu_n^+ et Σu_n^- au moins est divergente. Si en outre la série Σu_n converge, comme $u_n = u_n^+ - u_n^-$ elles doivent être toutes les deux divergentes.
On a donc prouvé

THEOREME 1.3.3
Soit Σu_n une série réelle convergente. Elle est semi-convergente ssi les deux séries Σu_n^+ et Σu_n^- divergent.

Remarquons pour finir que ces deux séries étant à termes positifs, elles divergent vers $+\infty$.

1.4 Propriétés des séries absolument convergentes

1.4.1 Produit de Cauchy

DEFINITION 1.4.1
Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites numériques. Leur produit de Cauchy est la suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$c_n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k b_{n-k} = \sum_{\substack{p,q\geqslant 0\\ p+q=n}} a_p b_q$$

On dira aussi que la série Σc_n est le produit de Cauchy des séries Σa_n et Σb_n.

THEOREME 1.4.1
Soient $a=(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $b=(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites numériques et $c=(c_n)_{n\geqslant 0}$ leur produit de Cauchy. Si les séries Σa_n et Σb_n sont absolument convergentes, il en est de même de la série Σc_n et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

preuve
Introduisons d'abord quelques notations.
Pour $n\in\mathbb{N}$ on notera $K_n=\{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \mid p\leqslant n,\ q\leqslant n\}$ et $T_n=\{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \mid p+q\leqslant n\}$.
On a $T_n\subset K_n\subset T_{2n}\subset K_{2n}$ et $S_n(a)S_n(b)=\sum\limits_{(p,q)\in K_n} a_p b_q$; $S_n(c)=\sum\limits_{(p,q)\in T_n} a_p b_q$.

1. Supposons d'abord que les séries Σa_n et Σb_n soient à termes positifs. Il résulte des inclusions $K_n\subset T_{2n}\subset K_{2n}$ que $S_n(a)S_n(b)\leqslant S_{2n}(c)\leqslant S_{2n}(a)S_{2n}(b)$. On en déduit $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}(c)=S(a)S(b)$. La suite $(S_n)(c)$ est croisssante et la suite extraite $(S_{2n}(c))$ converge vers $S(a)S(b)$ donc la suite $(S_n(c))$ converge vers $S(a)S(b)$. D'où le résultat dans ce cas.

2. Passons au cas général.
   Posons $\gamma_n=\sum\limits_{k=0}^{k=n}|a_k||b_{n-k}|$ et $\gamma=(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$.
   D'après le 1) appliqué aux séries à termes positifs $\Sigma|a_n|$ et $\Sigma|b_n|$, la suite $S_n(|a|)S_n(|b|)-S_n(\gamma)$ tend vers 0. Or
   $$S_n(a)S_n(b)-S_n(c)=\sum_{(p,q)\in K_n\setminus T_n} a_p b_q \quad \text{et} \quad S_n(|a|)S_n(|b|)-S_n(\gamma)=\sum_{(p,q)\in K_n\setminus T_n} |a|_p|b|_q$$
   d'où
   $$|S_n(a)S_n(b)-S_n(c)|\leqslant \sum_{(p,q)\in K_n\setminus T_n}|a_p b_q| = S_n(|a|)S_n(|b|)-S_n(\gamma)$$
   Par conséquent la suite $(S_n(c))$ converge vers $S(a)S(b)$. ■.

Attention! Ce résultat tombe en défaut si les deux séries ne sont pas absolument convergentes.
Exercice Soient $a_n=b_n=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^{1/4}}$. Montrer que les séries Σa_n et Σb_n sont semi-convergentes. Montrer que le terme général (c_n) de leur produit de Cauchy ne tend pas vers 0. Conclure.

Les deux théorèmes suivants sont indispensables pour la théorie des probabilités sur un ensemble dénombrable.

Notations

Pour la preuve des deux théorèmes suivants, nous aurons besoin d'introduire quelques notations. Soit (u_n) une suite complexe. Ecrivons $u_n=x_n+iy_n$ avec $x_n,y_n\in\mathbb{R}$. On a donc pour tout n, $u_n=x_n^+-x_n^-+iy_n^+-iy_n^-$. On a $|x_n^\pm|\leqslant|u_n|$ et $|y_n^\pm|\leqslant|u_n|$ donc si la série Σu_n est absolument convergente, chacune des quatre séries à termes positifs $\Sigma x_n^+,\Sigma x_n^-,\Sigma y_n^+,\Sigma y_n^-$ est convergente.
On a alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n^+-\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n^-+i\sum\limits_{n=0}^{\infty}y_n^+-i\sum\limits_{n=0}^{\infty}y_n^-$.

1.4.2 Convergence commutative

THEOREME 1.4.2
Soit u_n le terme général d'une série absolument convergente. Pour toute bijection σ de $\mathbb{N}$ la série de terme général $v_n = u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

preuve

- Supposons d'abord $u_n \geqslant 0$ pour tout n. Posons $M_n = \max(\sigma(0), \dots, \sigma(n))$. Les séries étant à termes positifs, on a $S_n(v) = u_{\sigma(0)} + \cdots + u_{\sigma(n)} \leqslant S_{M_n}(u) \leqslant S(u)$. Les sommes partielles de la série à termes positifs Σv_n sont majorées par $S(u)$. Cette série est donc convergente et sa somme vérifie $S(v) \leqslant S(u)$.
  Maintenant, on a $u_n = v_{\sigma^{-1}(n)}$ donc en appliquant ce qui précède en échangeant les rôles de u et v et en remplaçant σ par σ^{-1} on en déduit $S(u) \leqslant S(v)$ d'où l'égalité.
- Passons au cas général ; on applique d'abord ce qu'on vient de montrer à la série à termes positifs $\Sigma|u_n|$; on en déduit la convergence absolue de la série Σv_n. Ensuite, on écrit comme dans le préliminaire $u_n = x_n^+ - x_n^- + iy_n^+ - iy_n^-$. On peut appliquer la première partie à chacune des quatre séries $\Sigma x_n^+ \cdots$. Le résultat sur l'égalité des sommes en découle.

Ce résultat tombe en défaut pour une série semi-convergente. En fait, on peut démontrer, en utilisant le théorème 1.3.3 le théorème suivant

THEOREME 1.4.3
Soit Σu_n une série à termes réels semi-convergente. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la série de terme général $v_n = u_{\sigma(n)}$ soit semi-convergente de somme λ.

Application

Soit I un ensemble dénombrable et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes. A toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \to I$ on peut associer une série de terme général $v_n^\varphi = u_{\varphi(n)}$. Si ψ est une autre bijection de $\mathbb{N}$ sur I, on a en posant $\sigma = \varphi^{-1} \circ \psi$: $v_n^\psi = v_{\sigma(n)}^\varphi$. Il résulte du théorème de convergence commutative que si pour une numérotation φ de I la série associée est absolument convergente, il en est de même pour toute numérotation et qu'alors les sommes de ces séries sont toutes égales entre elles. Cette somme commune $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}$ se note $\sum_{i\in I} u_i$.
Attention! Il résulte du résultat admis plus haut que l'écriture $\sum_{i\in I} u_i$ n' a aucun sens si pour une numérotation φ de I la série de terme général $v_n^\varphi = u_{\varphi(n)}$ est semi-convergente.

1.4.3 Associativité généralisée

Soit Σu_n une série absolument convergente.
Si A est une partie finie de $\mathbb{N}$, la quantité $\sum_{k\in A} u_k$ est bien définie (et vaut 0 si A est vide). On la notera S_A.
Soit maintenant A une partie dénombrable de $\mathbb{N}$. Soit $i_A : \mathbb{N} \to A$ l'unique bijection strictement croissante de $\mathbb{N}$ sur A. Posons $v_n = u_{i_A(n)}$. Il est immédiat de vérifier que les sommes partielles de la série de terme général $|v_n|$ sont majorées par $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.
On en déduit la convergence absolue de la série Σv_n. Vu ce qui précède, la quantité $\sum_{k\in A} u_k$ est donc bien définie ; on la notera S_A. On a $\left|\sum_{k\in A} u_k\right| \leqslant \sum_{k\in A} |u_k|$. D'après le théorème de convergence commutative, on a $S_A = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi(n)}$ pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \to A$.

Lemme 1.4.1
Soient $A_1, \dots, A_p$ des parties disjointes de $\mathbb{N}$ et $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p$. On a $S_A = \sum_{k=1}^{k=p} S_{A_k}$.

preuve
Il suffit de le prouver dans le cas $p = 2$, une récurrence facile donnant ensuite le résultat.

Soient donc A et B deux parties disjointes de $\mathbb{N}$. Le cas où l'une des deux parties est finie est facile et laissé au lecteur. Prouvons le résultat dans le cas où A et B sont toutes deux infinies.
Soient $\varphi_A : \mathbb{N} \to A$ et $\varphi_B : \mathbb{N} \to B$ des numérotations de A et B respectivement.
Définissons une application $\psi : \mathbb{N} \to A \cup B$ en posant pour tout entier k $\psi(2k) = \varphi_A(k)$ et $\psi(2k+1) = \varphi_B(k)$. Il est facile de vérifier que ψ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $A \cup B$. Par définition on a

$$S_A = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi_A(n)} \quad S_B = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\varphi_B(n)} \quad S_{A\cup B} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\psi(n)}$$

On a

$$\sum_{k=0}^{2n+1} u_{\psi(k)} = \sum_{j=0}^{j=n} u_{\psi(2j)} + \sum_{j=0}^{j=n} u_{\psi(2j+1)} = \sum_{j=0}^{j=n} u_{\varphi_A(j)} + \sum_{j=0}^{j=n} u_{\varphi_B(j)}$$

En prenant la limite lorsque n tend vers l'infini, on obtient le résultat.

THEOREME 1.4.4

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de sous ensembles de $\mathbb{N}$ deux à deux disjoints de réunion égale à $\mathbb{N}$.
Soit d'autre part Σu_n une série numérique absolument convergente. Posons, pour tout $i \in \mathbb{N}$ $S_i = S_{A_i} = \sum\limits_{k\in A_i} u_k$. La série de terme général S_i est absolument convergente et $\sum\limits_{i=0}^{\infty} S_i = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$.

Dans cet énoncé certains A_i peuvent être vides.

preuve

Soit $U = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$.

- Comme pour la commutativité généralisée on commence par le cas où $\forall n\ u_n \geqslant 0$. Dans ce cas, pour toute partie B de $\mathbb{N}$, on a $S_B \leqslant U$. En utilisant le lemme, on obtient pour tout n $\sum\limits_{k=0}^{k=n} S_k = S_{A_0\cup\cdots\cup A_n} \leqslant U$ ce qui prouve que la série de terme général S_i est convergente et que sa somme S vérifie $S \leqslant U$.
  Prouvons l'inégalité inverse. Soit $\varepsilon > 0$. Soit N un entier naturel tel que $\sum\limits_{k=0}^{k=N} u_k \geqslant U - \varepsilon$. Notons $\mathbb{N}_N = \{0, \ldots, N\}$.
  L'ensemble des j tels que $A_j \cap \mathbb{N}_n \neq \emptyset$ est fini. Soit $\{j_1, \ldots, j_p\}$ cet ensemble avec $j_1 < \cdots < j_p$. On a pour tout q entre 1 et p $S_{j_q} = \sum\limits_{k\in A_{j_q}} u_k \geqslant \sum\limits_{k\in A_{j_q}\cap\mathbb{N}_n} u_k$ donc

$$\sum_{i=0}^{i=j_p} S_i \geqslant \sum_{q=1}^{q=p} S_{j_q} \geqslant \sum_{q=1}^{q=p}\left(\sum_{k\in A_{j_q}\cap\mathbb{N}_n} u_k\right) = \sum_{i=0}^{i=N} u_i \geqslant U - \varepsilon$$

  d'où $S \geqslant \sum\limits_{i=0}^{i=j_p} S_i \geqslant U - \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$ on obtient $S \geqslant U$.■

- Passons au cas général. En appliquant ce qui précède à la série de terme général $v_n = |u_n|$ et en utilisant l'inégalité $|S_i| = \left|\sum\limits_{k\in A_i} u_k\right| \leqslant \sum\limits_{k\in A_i} |u_k|$ on obtinet le fait que la série ΣS_i est absolument convergente.
  Ensuite, on procède comme pour la convergence commutative, en écrivant $u_n = x_n^+ - x_n^- + iy_n^+ - iy_n^-$. On peut appliquer la première partie à chacune des quatre séries $\Sigma x_n^+ \cdots$. Le résultat sur l'égalité des sommes en découle.

ANNEXE : FAMILLES SOMMABLES

La théorie des familles sommables n'est pas officiellement au programme du concours, mais elle figure au programme des classes préparatoires MP. On trouvera ci dessous un résumé de cette théorie, avec une application à la fonction ζ. Le cadre des familles sommables est celui qui convient le mieux pour l'étude des probabilités sur un ensemble dénombrable.
On suppose connues les notions sur la dénombrabilité.

Soit I un ensemble. On notera $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de $I\cdot$ Soit $a = (a_i)$ une famille de nombres réels ou complexes indexée par I. Pour toute partie finie $J \in \mathcal{P}_f(I)$ on notera $S_J(a) = \sum\limits_{j\in J} a_j$ avec la convention de $S_\emptyset(a) = 0$.

1.5 Familles sommables de nombres positifs

DEFINITION 1.5.1
Soit I un ensemble et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels positifs indexée par I. On dit que la famille (a_i) est sommable si l'ensemble $\{S_J(a) \quad J \in \mathcal{P}_f(I)\}$ est majoré. Dans ce cas, on appellera somme de la famille (a_i) et on notera $\sum\limits_{i\in I} a_i$ la borne supérieure de cet ensemble :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup\{S_J(a)\ ;\ J \in \mathcal{P}_f(I)\} \text{ avec } S_J(a) = \sum_{j\in J} a_j$$

PROPOSITION 1.5.1
Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs tels que $a_i \leqslant b_i$ pour tout $i \in I$. Si la famille (b_i) est sommable, il en est de même de la famille (a_i) et $\sum\limits_{i\in I} a_i \leqslant \sum\limits_{i\in I} b_i$

preuve
Pour toute partie finie J de I on a $S_J(a) \leqslant S_J(b)$ d'où la conclusion.

PROPOSITION 1.5.2
Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres positifs et $K \subset I$. La famille $(a_k)_{k\in K}$ est sommable et $\sum\limits_{k\in K} a_k \leqslant \sum\limits_{i\in I} a_i$.

preuve
Toute partie finie J de K est une partie finie de I donc $\sum\limits_{k\in J} a_k \leqslant \sum\limits_{i\in I} a_i$ d'où la conclusion.

THEOREME 1.5.1
Soit (a_i) une famille sommable de réels positifs. Alors le support de cette famille, c'est à dire $\{i \in I \mid a_i \neq 0\}$ est fini ou dénombrable.

preuve
Soit $S = \sum\limits_{i\in I} a_i$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $I_n = \{i \in I\ ;\ a_i > 1/n\}$. Si $i_1, \ldots, i_p$ sont p éléments distincts de I_n on a $p/n \leqslant a_{i_1} + \cdots + a_{i_p} \leqslant S$ donc $p \leqslant nS$. Il s'ensuit que I_n est fini. Or le support de la famille (a_i) n'est autre que la réunion des $I_n, n \in \mathbb{N}^*$. C'est une réunion dénombrable d'ensembles finis, donc c'est un ensemble fini ou dénombrable.

Dans toute la suite, nous supposerons que l'ensemble I est dénombrable

THEOREME 1.5.2
Soient $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres positifs et (I_n) une suite croissante de parties de I dont la réunion est égale à I. On a

$$\sum_{i\in I} a_i = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i\in I_n} a_i\right)$$

preuve
Posons $A_n = \sum\limits_{i\in I_n} a_i$ et $S = \sum\limits_{i\in I} a_i$. La suite (A_n) est croissante. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une partie finie $J \subset I$ telle que

$S_J(a) \geqslant S - \varepsilon$. L'ensemble J est fini et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$, donc il existe un entier N tel que $J \subset I_N$. Alors, pour $n \geqslant N$ on a $S_J(a) \leqslant A_N \leqslant A_n$ donc $S - \varepsilon \leqslant S_J(a) \leqslant A_n \leqslant S$ d'où la conclusion.

THEOREME 1.5.3
Soit (a_i) une famille de réels positifs et $\sigma : I \to I$ une bijection. La famille $a'_i = a_{\sigma(i)}$ est sommable ssi la famille (a_i) l'est et dans ce cas $\sum\limits_{i\in I} a_{\sigma(i)} = \sum\limits_{i\in I} a_i$.

En effet, σ induit une bijection de $\mathcal{P}_f(I)$ sur lui même ; les ensembles $\{\sum\limits_{j\in J} a_j \ ; \ J \in \mathcal{P}_f(I)\}$ et $\{\sum\limits_{j\in J} a_{\sigma(j)} \ ; \ J \in \mathcal{P}_f(I)\}$ sont égaux.

THEOREME 1.5.4
Soit$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. La famille (a_n) est sommable ssi la série de terme général a_n est convergente et dans ce cas, la somme de la famille (a_n) est égale à la somme de la série .

preuve
Désignons par $s_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} a_k$ la suite des sommes partielles de la série. Supposons d'abord la série convergente et soit s sa somme. Pour toute partie finie J de $\mathbb{N}$, il existe un entier N tel que $J \subset \{0, 1, \dots, N\}$ donc $S_J(a) \leqslant s_N \leqslant s$. Pour tout $J \in \mathcal{P}_f(I), S_J(a) \leqslant s$ donc la famille (a_n) est sommable et sa somme A vérifie $A \leqslant s$. Inversement, supposons la famille (a_n) sommable, de somme A. Les sommes partielles de la série sont majorées par A, donc, la suite (s_n) étant croissante, elle a une limite s quand n tend vers l'infini, ce qui prouve la convergence de la série. Comme $\forall n \ s_n \leqslant A$ on en déduit $s \leqslant A$.

COROLLAIRE 1.5.1
Soit (a_n) une suite de réels positifs et σ une bijection de $\mathbb{N}$. La série de terme général $a_{\sigma(n)}$ converge ssi la série de terme général a_n converge et dans ce cas les sommes de ces deux séries sont égales.

THEOREME 1.5.5 (Associativité généralisée)
Soient I et S deux ensembles dénombrables $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels positifs et $(I_s)_{s\in S}$ une famille de sous ensembles de I deux à deux disjoints dont la réunion est I. Posons pour $s \in S$, $B_s = \sum\limits_{i\in I_s} a_i$. La famille $(B_s)_{s\in S}$ est sommable et $\sum\limits_{s\in S} B_s = \sum\limits_{i\in I} a_i$.

preuve
D'après la proposition précédente, chacune des familles $(a_i)_{i\in I_s}$ est sommable, donc les nombres B_s sont bien définis. On convient que $B_s = 0$ si $I_s = \emptyset$. Posons $A = \sum_{i\in I} a_i$.
i) Soit $T = \{t_1, \dots, t_q\}$ une partie finie de S. Soient $F_1, \dots, F_q$ des parties finies de $I_{t_1}, \dots, I_{t_q}$ respectivement. $F = \bigcup\limits_{1\leqslant k\leqslant q} F_k$ est une partie finie de I, donc $S_F(a) = \sum\limits_{i\in F} a_i \leqslant A$ ce qui s'écrit $S_{F_1}(a) + \cdots + S_{F_q}(a) \leqslant A$

On en déduit

$$\sup_{F_1\in\mathcal{P}_f(I_{t_1})} S_{F_1}(a) + \cdots + \sup_{F_q\in\mathcal{P}_f(I_{t_q})} S_{F_q}(a) \leqslant A \quad \text{soit} \quad \sum_{t\in T} B_t \leqslant A$$

On en déduit que la famille $(B_s)_{s\in S}$ est sommable et que sa somme B vérifie $B \leqslant A$.
ii) Soit $\varepsilon > 0$. Par définition d'une borne supérieure, il existe une partie finie K de I telle que $A - \varepsilon \leqslant S_K(a) \leqslant A$. Puisque K est finie elle ne rencontre qu'un nombre fini d'ensembles I_s soient $I_{s_1}, \dots, I_{s_p}$. Soit $K_k = K \cap I_{s_k}$. On a alors

$$A - \varepsilon \leqslant S_K(a) = \sum_{k=1}^{k=q} S_{K_k}(a) \leqslant \sum_{k=1}^{k=q} B_{I_k} \leqslant B$$

L'inégalité $A - \varepsilon \leqslant B$ ayant lieu pour tout $\varepsilon > 0$ on en déduit $A \leqslant B$ d'où l'égalité.

Remarque
Le théorème s'applique en particulier dans le cas d'une partition finie ou dénombrable de I. Pour une partition finie $I = I_0 \cup \cdots \cup I_p$, il suffit d'appliquer le théorème en posant $I_j = \emptyset$ pour $j > p$.

1.6 Famille sommable de nombres réels ou complexes

Soit $a \in \mathbb{R}$; on pose $a^+ = \max(a, 0)$ et $a^- = \max(-a, 0)$. On a $a^+ \geqslant 0,\ a^- \geqslant 0,\ a = a^+ - a^-$ et $|a| = a^+ + a^-$.

DEFINITION 1.6.1
Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes. On dit que cette famille est sommable si la famille de réels positifs $(|a_i|)_{i\in I}$ est sommable.

- Si les a_i sont réels, chacune des deux familles (a_i^+) et (a_i^-) est sommable car $0 \leqslant a_i^\pm \leqslant |a_i|$ (proposition 1.5.1). On pose alors
$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^-$$
- Si les a_i sont des complexes, les familles $\mathrm{Re}(a_i)$ et $\mathrm{Im}(a_i)$ sont sommables d'après la proposition 1.5.1 puisque $|\mathrm{Re}(a_i)| \leqslant |a_i|$ et $|\mathrm{Im}(a_i)| \leqslant |a_i|$. On pose dans ce cas
$$\sum_{k\in I} a_k = \sum_{k_i n I} \mathrm{Re}(a_k) + i \sum_{k\in I} \mathrm{Im}(a_k)$$

Il en résulte qu'un suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes est une famille sommable ssi la série de terme général a_n est absolument convergente.

Les résultats suivants se déduisent immédiatement des résultats correspondants pour les familles de nombres positifs et de la définition ci dessus.

THEOREME 1.6.1
Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes et $\sigma : I \to I$ une bijection. La famille $(a_{\sigma(i)})$ est sommable et
$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_{\sigma(i)}$$

COROLLAIRE 1.6.1
Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente. Pour toute bijection σ de $\mathbb{N}$ la série de terme général $a_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_{\sigma(n)}$.

THEOREME 1.6.2 (Associativité généralisée)
Soient I et S deux ensembles dénombrables $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres réels ou complexes et $(I_s)_{s\in S}$ une famille de sous ensembles de I deux à deux disjoints dont la réunion est I. Posons pour $s \in S,\ B_s = \sum\limits_{i\in I_s} a_i$. La famille $(B_s)_{s\in S}$ est sommable et $\sum\limits_{s\in S} B_s = \sum\limits_{i\in I} a_i$.

1.7 Sommation double

THEOREME 1.7.1
Soient I et J deux ensembles dénombrables et $u = (u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de nombres réels ou complexes indexée par $I \times J$.

1. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*
   a) La famille u est sommable.
   b) Pour tout $i \in I$, la famille $(u_{i,j})_{j\in J}$ est sommable et en posant $U_i = \sum\limits_{j\in J} |u_{i,j}|$, la famille $(U_i)_{i\in I}$ est sommable.
2. *Dans le cas où la famille u est sommable, les familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ définies par $a_i = \sum\limits_{j\in J} u_{i,j}$ et $b_j = \sum\limits_{i\in I} u_{i,j}$ sont sommables et*
$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)$$

preuve

1. $a \Rightarrow b$ résulte du théorème d'associativité généralisée.
   $b \Rightarrow a$ Soit K une partie finie de $I \times J$. Il existe des sous ensembles finis $I_0 \subset I$ et $J_0 \subset J$ tels que $K \subset I_0 \times J_0$. Alors $\sum\limits_{(i,j)\in K} |u_{i,j}| \leqslant \sum\limits_{(i,j)\in I_0\times J_0} |u_{i,j}| = \sum\limits_{i\in I_0}\left(\sum\limits_{j\in J_0} |u_{i,j}|\right) \leqslant \sum\limits_{i\in I_0} U_i \leqslant \sum\limits_{i\in I} U_i$. Ce qui prouve a).
2. Celà résulte du théorème d'associativité généralisée : on écrit $I \times J = \bigcup\limits_{i\in I} \{i\} \times J$.

Dans le cas $I = J = \mathbb{N}$, on dit que la famille u est une suite double.

COROLLAIRE 1.7.1
Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles sommables de nombres réels ou complexes. La famille $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right)$$

Exemple : Soient Σa_n et Σb_n deux séries absolument convergentes. Les familles $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_q)_{q\in\mathbb{N}}$ sont sommables, donc aussi la famille $(a_p b_q)$. On peut calculer la somme de cette famille en utilisant la propriété d'associativité généralisée comme suit : soit $C_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q = n\}$. Les $(C_n)_{n\geqslant 0}$ forment une partition de $\mathbb{N}^2$. Soit $c_n = \sum\limits_{(p,q)\in C_n} a_p b_q$. La famille (c_n) est sommable, donc la série Σc_n est absolument convergente et sa somme est la somme de la famille $(a_p b_q)$. En utilisant le corollaire, cette somme vaut aussi $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m\right)$ ce qui redonne le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Bien entendu, ces résultats relatifs au prouit de deux familles sommables se généralisent au produit d'un nombre fini quelconque de familles sommables. Voici un exemple d'application.

Fonction zeta et nombre premiers

Soit $s > 1$. On rapelle que $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Soit d'autre part $(p_j)_{j\geqslant 1}$ la suite des nombres premiers numérotés dans l'ordre croissant : $p_1 = 2,\ p_2 = 3$ etc. On pose

$$\Pi_n(s) = \prod_{k=1}^{k=n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$$

1. La famille $\left(\dfrac{1}{p_1^{sk_1}\cdots p_n^{sk_n}}\right)_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n}$ est sommable et $\sum\limits_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n}\left(\dfrac{1}{p_1^{sk_1}\cdots p_n^{sk_n}}\right) = \Pi_n(s)$
   Chacune des familles $\left(\dfrac{1}{(p_j^s)^{k_j}}\right)_{k_j\in\mathbb{N}}$ est sommable car la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(p_j^s)^k}$ converge (absolument !). La somme de cette série géométrique vaut $\dfrac{1}{1 - 1/p_j^s}$. D'où le résultat en utilisant le théorème 1.7
2. La suite $(\Pi_n(s))_{n\geqslant 1}$ est convergente si $s > 1$.
   En effet, on a $\ln(\Pi_n(s)) = \sum\limits_{k=1}^{k=n} -\ln\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)$. $1/p_k^s$ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini et $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) \sim \frac{1}{p_k^s}$. Comme $p_k \geqslant k$, on a $\frac{1}{p_k^s} \leqslant \frac{1}{k^s}$ qui est le terme général s'une série convergente. On en déduit la convergence de la série de terme général $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)$, donc celle de la suite $\ln(\Pi_n(s))$. De plus, les termes de la série sont strictement positifs, donc sa somme aussi et par conséquent, la suite $\ln(\Pi_n(s))$ a une limite $\lambda > 0$. Donc la suite $(\Pi_n(s))$ a une limite distincte de 1.

3. Pour $s > 1$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n(s) = \zeta(s)$.
Soit, pour $n \geqslant 1$, A_n l'ensemble des entiers naturels dont les facteurs premiers appartiennent à l'ensemble $\{p_1, \ldots, p_n\}$. L'ensemble des nombres $\left\{\dfrac{1}{p_1^{sk_1}\cdots p_n^{sk_n}}\ ;\ (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n\right\}$ est égal à $\left\{\dfrac{1}{m^s}\ ;\ m \in A_n\right\}$. On a donc $\sum\limits_{m\in A_n} \dfrac{1}{m^s} = \Pi_n(s)$. Maintenant, la suite d'ensemble $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite croissante de réunion $\mathbb{N}^*$. Donc (théorème 1.5.2) la limite lorsque n tend vers l'infini de $\sum\limits_{m\in A_n} \dfrac{1}{m^s}$ vaut $\sum\limits_{m\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{m^s} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{m^s} = \zeta(s)$.

On a donc prouvé

$$\forall s \in]1, \infty[\quad \zeta(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$$

Exercice Montrer en utilisant la même méthode que la série $\Sigma \dfrac{1}{p_k}$ diverge. (cas $s = 1$).

2

Développement d'un réel positif en base b

2.1 Développement d'un réel positif en base b

Soit b un entier naturel, $b \geqslant 2$. Dans la pratique, b est souvent égal à 2 ou à 10. Le programme prévoir l'étude du cas $b = 10$, mais cette hypothèse sur b ne simplifie en rien l'exposé. On gardera donc le cas b quelconque. Pour $x \in \mathbb{R}$ on notera $[x]$ la partie entière de x.

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.1.1
Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que les séries de terme général a_n et b_n convergent. Supposons en outre que pour tout n on ait $a_n \leqslant b_n$. Si il existe un entier m tel que $a_m < b_m$ on a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k < \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$

preuve
Pour $n \geqslant m$ on a $\sum\limits_{k=0}^{k=n} b_k - \sum\limits_{k=0}^{k=n} a_k \geqslant b_m - a_m$ donc en prenant la limite lorsque k tend vers l'infini $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k - \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \geqslant b_m - a_m > 0$.

2.1.1 Notations

Soit b un entier naturel, $b \geqslant 2$ et $\mathcal{B} = \{0, 1, \dots, b-1\}$.
On désignera par Σ' l'ensemble des suites $\underline{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$, indexée par $\mathbb{Z}$ dont le support $\{n \in \mathbb{Z}\ ;\ x_n \neq 0\}$ est minoré, c'est à dire telles que $\exists M \in \mathbb{Z}\ \ \forall n \in \mathbb{Z}\ \ n < M \Rightarrow x_n = 0$.

Une suite $\underline{x} = (x_k)$ d'éléments de $\mathcal{B}$ est dite propre si il n'existe pas d'entiers m tels qu'on ait $x_k = b-1$ pour tout $k \geqslant m$. Il revient au même de dire que l'ensemble des entiers k tels que $x_k \neq b-1$ est infini. Nous noterons Σ le sous ensemble de Σ' formé des suites propres.

Soit $\underline{x} = (x_k) \in \Sigma'$. On a pour tout $k \geqslant 1,\ 0 \leqslant x_k b^{-k} \leqslant (b-1)b^{-k}$ de sorte que la série de terme général $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k b^{-k}$ est convergente. De plus, on a $0 \leqslant \sum\limits_{k\geqslant 1} x_k b^{-k} \leqslant (b-1)\sum\limits_{k\geqslant 1} b^{-k} = 1$. Par ailleurs, $Z(\underline{x}) = \{m \leqslant 0\ ;\ x_m \neq 0\}$ est fini. Nous noterons $\sum\limits_{m\leqslant 0} x_m b^{-m}$ la somme $\sum\limits_{m\in Z(\underline{x})} x_m b^{-m}$.
On définit une application $\Phi' : \Sigma' \to \mathbb{R}_+$ en posant

$$\Phi'(\underline{x}) = \sum_{m\in Z(\underline{x})} x_m b^{-m} + \sum_{k=1}^{\infty} x_k b^{-k} \quad \text{que nous noterons} \quad \Phi'(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k b^{-k}$$

Soit Φ la restriction de Φ' à l'ensemble Σ des suites propres.

On notera par $\preceq$ l'ordre lexicographique sur Σ' et sur Σ. Rappellons qu'on pose, pour $\underline{x}, \underline{y} \in \Sigma'$ $\ \underline{x} \prec \underline{y} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}\ ;\ x_j = y_j$ pour $j \leqslant m-1$ et $x_m < y_m$ et que l'ordre lexicographique est défini par $\underline{x} \preceq \underline{y}$ ssi $\underline{x} \prec \underline{y}$ ou $\underline{x} = \underline{y}$ et que $\preceq$ est une relation d'ordre total sur Σ'.

Enfin, on notera D_b l'ensemble des réels x tels qu'il existe un entier naturel m tel que $b^m x \in \mathbb{Z}$. L'ensemble D_b est un sous anneau de $\mathbb{Q}$. En fait c'est le plus petit sous anneau de $\mathbb{Q}$ contenant $\mathbb{Z}$ et $1/b$. Pour cette raison, il est souvent noté $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{b}\right]$. Pour $b = 10$, D_b est l'anneau des nombres décimaux.

2.1.2 Développement propre d'un réel positif en base b

Lemme 2.1.2
Φ' est croissante et Φ est strictement croissante.

preuve
Soient $\underline{x}, \underline{y}$ deux éléments de Σ' tels que $\underline{x} \prec \underline{y}$. Soit m l'unique entier tel que $x_j = y_j$ pour $j \leqslant m-1$ et $x_m < y_m$. Il vient :

$$\Phi'(\underline{y}) - \Phi'(\underline{x}) = \frac{y_m - x_m}{b^m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{y_k - x_k}{b^k}$$

Or

$$\frac{y_m - x_m}{b^m} \geqslant \frac{1}{b^m} \tag{2.1}$$

et

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{y_k - x_k}{b^k} \geqslant - \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{b-1}{b^k} = -\frac{1}{b^m} \tag{2.2}$$

On en déduit $\Phi'(\underline{y}) - \Phi'(\underline{x}) \geqslant 0$, donc la croissance de Φ'. Ensuite l'égalité ne peut avoir lieu que si on a l'égalité dans (1) ce qui suppose $y_m = x_m + 1$ et dans (2) ce qui nécessite $y_k - x_k = -b + 1$ pour tout $k > m$, soit $y_k = 0$ et $x_k = b - 1$. En particulier, l'égalité n'a pas lieu si $\underline{x}$ et $\underline{y}$ sont dans Σ. Donc Φ est strictement croissante. De plus, on constate que si $\Phi'(\underline{y}) = \Phi'(\underline{x})$ alors ce nombre est nécessairement dans D_b, la suite $\underline{x}$ n'est pas propre et la suite $\underline{y}$ est à support fini.

THEOREME 2.1.1
1) L'application Φ est une bijection strictement croissante de $(\Sigma, \preceq)$ sur $\mathbb{R}_+$ muni de l'ordre induit par celui de $\mathbb{R}$.
2) Soit $\underline{x} \in \Sigma$.
  a) $\Phi(\underline{x}) \in \mathbb{N}$ ssi $x_n = 0$ pour $n \geqslant 1$.
  b $\Phi(\underline{x}) \in D_b$ ssi la suite $\underline{x}$ est à support fini.

preuve
1) On a déjà vu que Φ était une application strictement croisssante de Σ dans $\mathbb{R}_+$. Il reste à prouver la surjectivité.

Soit donc $x \in \mathbb{R}_+$. On pose pour n entier

$$\boxed{p_n = [b^n x]\,; \quad \alpha_n = p_n b^{-n}\,; \quad \beta_n = \alpha_n + b^{-n} = (p_n+1)b^{-n}}$$

De $p_n \leqslant b^n x < p_n + 1$ on déduit $bp_n \leqslant b^{n+1}x < bp_n + b$ d'où $bp_n \leqslant p_{n+1}$ et $p_{n+1} + 1 \leqslant bp_n + b$. En divisant par b^{n+1} on obtient $\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$ et $\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n + b^{-n} - b^{-(n+1)}$ soit $\beta_{n+1} \leqslant \beta_n$. D'autre part, on a $\alpha_n \leqslant x < \beta_n$ et $0 \leqslant x - \alpha_n < b^{-n}$.

Les deux suites (α_n) et (β_n) sont adjacentes et convergent vers x.

Il existe un entier M tel que $m \geqslant M \Rightarrow b^m > x$ car, comme on le voit par une récurrence immédiate $b^m \geqslant m$ pour $m \geqslant 0$. Soit $M(x)$ le plus petit de ces entiers M. Pour $n \leqslant -M(x)$ on a $p_n = 0$ et $\alpha_n = 0$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$ on pose

$$\boxed{x_n = p_n - bp_{n-1}}$$

De $bp_{n-1} \leqslant p_n < bp_{n-1} + b$ on déduit $0 \leqslant x_n < b$. En fait x_n est le reste de la division euclidienne de p_n par b, le quotient étant p_{n-1}. On a $x_n = 0$ pour $n \leqslant -M(x)$ donc la suite (x_n) est dans Σ'.

On a $x_n b^{-n} = \alpha_n - \alpha_{n-1}$ d'où, en sommant

$$\boxed{\alpha_n = \sum_{k=-M(x)}^{k=n} x_k b^{-k}} \quad \text{et} \quad \boxed{x = \sum_{k=-M(x)}^{\infty} x_k b^{-k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k b^{-k}}$$

Soit $\underline{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. C'est un élément de Σ' qui vérifie $\Phi'(\underline{x}) = x$. Pour terminer la preuve du 1), il reste à prouver que $\underline{x}$ est une suite propre. Supposons le contraire. Il existe alors un entier m tel que $x_k = b-1$ pour tout $k \geqslant m$. On a alors, pour $n > m$ $\alpha_n = \alpha_{m-1} + \sum\limits_{k=m}^{k=n}(b-1)b^{-k}$ et donc $x = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha_{m-1} + (b-1)\dfrac{b^{-(m-1)}}{b-1} = \alpha_{m-1} + b^{-(m-1)} = \beta_{m-1}$, mais ceci est exclus par construction. Donc $(x_n) \in \Sigma$.

2)
a)On peut écrire

$$\Phi(\underline{x}) = \sum_{k\leqslant 0} x_k b^{-k} + \sum_{k\geqslant 1} x_k b^{-k} = \sum_{j\geqslant 0} x_{-j} b^j + \sum_{k\geqslant 1} \frac{x_k}{b^k}$$

Le premier terme de cette somme est un entier naturel. Puisque la suite $\underline{x}$ est propre, le second est **strictement** inférieur, d'après le lemme 2.1.1 à $\sum\limits_{k\geqslant 1}(b-1)b^{-k} = 1$. Autrement dit, $\sum\limits_{k\leqslant 0} x_k b^{-k}$ est la partie entière de $\Phi(\underline{x})$. Alors $\Phi(\underline{x}) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sum\limits_{k\geqslant 1} x_k b^{-k} = 0 \Leftrightarrow \forall k \geqslant 1\ x_k = 0$.
Remarque On retrouve ainsi l'écriture en base b d'un entier naturel.

b) Soit $\tau : \Sigma \to \Sigma$ le décalage défini par $\tau(\underline{x}) = \underline{y}$ avec $y_j = x_{j+1}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. On a de suite $\Phi(\tau(\underline{x})) = b\Phi(\underline{x})$. On en déduit le résultat :
$\Phi(\underline{x}) \in D_b \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}\ b^m\Phi(\underline{x}) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}\ \Phi(\tau^m(\underline{x})) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \Phi(\tau^m(\underline{x}))$ est à support fini $\Leftrightarrow \underline{x}$ est à support fini.

Pour $b = 10$, α_n (resp. β_n) est l'approximation décimale par défaut (resp. par excés) de x à 10^{-n} prés.

Remarque
L'ensemble $\mathcal{B}$ est fini. On représente chacun de ses éléments par un symbole, appellé chiffre. Si $b \leqslant 16$, les chiffres utilisés sont les b premiers éléments de la suite 1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F.
Pour $a \in \mathcal{B}$, notons $\overline{a}$ le symbole associé. Alors, on écrit $x = \overline{x_{-M}}\cdots\overline{x_{-1}}\,\overline{x_0},\overline{x_1}\,\overline{x_2}\cdots\overline{x_n}\cdots$. Le symbole , ($\cdot$ pour les anglosaxons) indiquant indiquant la séparation entre les termes d'indices négatifs ou nuls qui fournissent la partie entiére et les autres.

Terminons cette partie en énonçant les propriétés de Φ'. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Supposons que $\Phi'(\underline{u}) = \Phi'(\underline{v}) = x$ avec par exemple $\underline{u} \prec \underline{v}$. La preuve du lemme 2.1.2 montre qu'alors $x \in D_b$, que $\underline{v}$ est une suite à support fini telle que $\Phi(\underline{v}) = x$ donc que $\underline{v} = \Phi^{-1}(x)$, que si on écrit $\Phi^{-1}(x) = (x_{-M}, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0, \cdots)$ alors $\underline{u} = (x_{-M}, \cdots, x_{m-1}, x_m - 1, b-1, \cdots, b-1, \cdots)$. On a donc prouvé

THEOREME 2.1.2
L'application Φ' est une surjection croissante de Σ sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
1) Si $x \notin D_b$, x a un unique antécédent par Φ' qui est $\Phi^{-1}(x) \in \Sigma$.
3) Si $x \in D_b$, x admet deux antécédents par Φ' à savoir

$$\Phi^{-1}(x) = (x_{-M}, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0, \cdots) \quad \textit{et la suite} \quad \underline{y} = (x_{-M}, \cdots, x_{m-1}, x_m - 1, (b-1), \cdots, (b-1), \cdots)$$

donc telle que $y_j = x_j$ pour $j \leqslant m-1$, $y_m = x_m - 1$ et $y_k = b-1$ pour $k > m$.

2.1.3 Caractérisation des rationnels

THEOREME 2.1.3
Soit $b \geqslant 2$ un entier naturel fixé. Le réel x est rationnel ssi son développement propre en base b est prépériodique, c'est à dire ssi il existe un entier $r \geqslant 1$ et un entier $p \geqslant 1$ tels que $x_{k+p} = x_k$ pour $k \geqslant r$.

preuve

- Supposons d'abord le développement de x prépériodique. On a $x = \sum\limits_{-\infty}^{r-1} x_i b^{-i} + y$ avec $y = \sum\limits_{k=r}^{\infty} x_k b^{-k}$ et il suffit de montrer que y est rationnel. Or

$$b^p y = \sum_{k=r}^{\infty} x_k b^{p-k} = \sum_{j=r-p}^{\infty} x_{j+p} b^{-j} = \sum_{j=r-p}^{j=r-1} x_{j+p} b^{-j} + \sum_{j=r}^{\infty} x_{j+p} b^{-j}$$

or $x_{j+p} = x_j$ pour $j \geqslant r$ donc

$$b^p y = \sum_{j=r-p}^{j=r-1} x_{j+p} b^{-j} + \sum_{j=r}^{\infty} x_j b^{-j} = c + y$$

où $c = \sum_{j=r-p}^{j=r-1} x_{j+p} b^{-j} = \frac{C}{b^{r-1}}$ avec $C \in \mathbb{N}$. Donc $y = \frac{C}{b^{r-1}(b^p - 1)} \in \mathbb{Q}$.
x s'écrit aussi sous la forme $x = \frac{a}{b^{r-1}(b^p - 1)}$ avec $a \in \mathbb{N}$.

- Réciproquement, supposons $x \in \mathbb{Q}$, $x = p/q$ avec p, q entiers premiers entre eux. Nous voulons prouver que son développement propre est prépériodique.
La suite (p_n) est donnée par $p_n = \left[\frac{b^n p}{q}\right]$, ce qui signifie que p_n est le quotient de la division euclidienne de $b^n p$ par q. Ecrivons donc $b^n p = p_n q + r_n$. On a $r_n \in \{0, 1, \dots, q-1\}$. Il existe donc des entiers $m < n$ tels que $r_m = r_n$. Soit r cette valeur commune. On a alors, pour tout entier k

$$r_{n+k} \equiv b^{n+k} p \equiv b^k p_n q + b^k r_n \equiv b^k r \bmod q$$

et de même

$$r_{m+k} \equiv b^k r \bmod q$$

on en déduit $r_{n+k} = r_{m+k}$. Or par définition, $x_n = p_n - b p_{n-1}$, donc $x_n q = (b^n p - r_n) - b(b^{n-1} p - r_{n-1}) = b r_{n-1} - r_n$. On a donc $(x_{n+k} - x_{m+k}) q = b r_{n+k-1} - r_{n+k} - (b r_{m+k-1} - r_{m+k}) = 0$ soit $x_{n+k} = x_{m+k}$.$\blacksquare$.

Remarque : l'algorithme de division

Soit $x = p/q$. La "justification" élémentaire de la prépériodicité du développement de x est la suivante : on pose la division de p par q et on regarde la suite des restes (ρ_n). Comme ces restes sont compris entre 1 et $q-1$, il existe deux entiers $m < n$ tels que $\rho_m = \rho_n$. On en déduit la périodicité de la suite des restes, puis celle de la suite des "décimales".

Précisons tout cela. Considérons l'algorithme de la division élémentaire en commençant par le cas $0 < x < 1$. On a alors $0 < p < q$

On pose $\rho_0 = p,\ y_0 = [p/q] = 0$. On multiplie le reste en cours par b et on effectue la division euclidienne. On définit donc, pour $n \geqslant 0$

$$b\rho_n = q y_{n+1} + \rho_{n+1} \quad \text{avec} \quad y_{n+1} = \left[\frac{b\rho_n}{q}\right]$$

La suite (y_n) ainsi obtenue est celle qu'on obtient en "posant" la division indéfinie de p par q.

Tout d'abord, on a pour tout n $0 \leqslant \rho_n < q$ par construction, donc pour tout $n \geqslant 1,\ 0 \leqslant y_n < b$. Le quotient obtenu à la n-ième étape est $a_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{y_k}{b^k}$.
On a

$$\frac{\rho_{n+1}}{b^{n+1}} = \frac{\rho_n}{b^n} - q\frac{y_{n+1}}{b^{n+1}} \quad \text{donc en ajoutant} \quad \frac{\rho_n}{b^n} = -q a_n + \rho_0 = p - q a_n = q(x - a_n)$$

soit

$$b^n x = b^n a_n + \frac{\rho_n}{q}$$

On en déduit $b^n a_n = [b^n x]$. Avec les notations du début, on a pour tout n $a_n = \alpha_n$ $p_n = a_n b^n$ et $x_n = p_n - b p_{n-1} = b^n(a_n - a_{n-1}) = y_n$. La suite (y_n) des entiers obtenue en posant la division est celle du développement propre de x.
Enfin, les restes successifs ρ_n de l'algorithme de la division sont les r_n de la preuve précédente. En effet, de $\frac{\rho_n}{b^n} = -q a_n + p$ on déduit $\rho_n = p b^n - q a_n b^n = p b^n - q p_n = r_n$.

Dans le cas général où x n'est pas nécessairement entre 0 et 1, on définit n_0 comme le plus petit entier naturel tel que $x' = b^{-n_0} x < 1$. On applique ce qui précède à x' et on récupère x en multipliant par b^{n_0} ce qui revient à décaler la virgule de n_0 positions.

2.1.4 Applications

THEOREME 2.1.4
$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

On notera Σ_0 le sous ensemble de Σ formé des suites $\underline{x}$ telles que $x_n = 0$ pour tout $n \leqslant 0$. Σ_0 s'identifie à l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites propres $(x_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{B}$. Φ induit une bijection de $\mathcal{S}$ sur $I = [0, 1\,[$.

Choisissons une base $b \geqslant 3$. Si $\mathbb{R}$ était dénombrable, il en serait de même de I donc de $\mathcal{S}$. Supposons que celà soit le cas. Il existerait une bijection $n \to Y^{(n)}$ de $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{S}$. Ecrivons $Y^{(n)} = (y_j^n)_{j \geqslant 1}$. Définissons ensuite une suite $\underline{z} = (z_n)$ de la manière suivante : on pose $z_k = 0$ si $y_k^k \neq 0$ et $z_k = 1$ si $y_k^k = 0$. Puisque $b \geqslant 3$ la suite $\underline{z}$ est propre donc est dans $\mathcal{S}$. On constate que par construction, pour tout $k,\ y_k^k \neq z_k$, donc $\underline{z} \neq Y^k$. D'où la contradiction.

COROLLAIRE 2.1.1
L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des irrationnels n'est pas dénombrable.

En effet, on sait que $\mathbb{Q}$ est dénombrable et que la réunion de deux ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable. Si $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ était dénombrable, il en serait de même de $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$.

2.1.5 Compléments

Autre preuve de la prépériodicité du développement d'un rationnel

Dans la preuve de la partie directe, nous avons vu que si x admettait un développement prépériodique, on pouvait écrire x sous la forme $x = \frac{a}{b^{r-1}(b^m - 1)}$ où $a \in \mathbb{N}$. Pour prouver l'implication dans l'autre sens, nous allons procéder en deux étapes :

- Supposons que x soit de la forme $x = \frac{a}{b^{r-1}(b^m - 1)}$ et montrons que son développement est prépériodique. La division euclidienne de a par $b^m - 1$ s'écrit $a = (b^m - 1)A + B$ avec A, B entiers, $0 \leqslant B < b^m - 1$. On en déduit

  $$x = \frac{A}{b^{r-1}} + \frac{B}{b^{r-1}(b^m - 1)}$$

  Le nombre naturel B s'écrit en base b sous la forme $B = \sum\limits_{j=0}^{m-1} \lambda_j b^j$ avec $\lambda_j \in \mathbb{N}$ puisque $B < b^m$. Il en résulte

  $$\frac{B}{b^{r-1}(b^m - 1)} = \left(\sum_{j=0}^{m-1} \frac{\lambda_j}{b^{r-j-1}} \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{b^{im}} \right) \frac{1}{b^m} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{b^{im}} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \frac{\lambda_j}{b^{m+r-j-1}} \right) \right)$$

  Posant $k = m + r - 1 - j$ et $x_k = \lambda_{m+r-1-k}$ il vient

  $$\frac{B}{b^{r-1}(b^m - 1)} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{b^{im}} \left(\sum_{k=r}^{m-1+r} \frac{x_k}{b^k} \right) \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=r}^{m-1+r} \frac{x_k}{b^{im+k}} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=r}^{m-1+r} \frac{x_{k+im}}{b^{k+im}} \right)$$

  en posant $x_{k+im} = x_k$ pour tout k entre r et $r + m - 1$ et tout $i \in \mathbb{N}^*$. D'où, en utilisant la sommation par groupements de m termes consécutifs

  $$\frac{B}{b^{r-1}(b^m - 1)} = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{x_k}{b^k}$$

  Enfin, en décomposant A en base b, on obtient $\frac{A}{b^{r-1}} = \sum\limits_{j=1}^{r-1} \frac{a_j}{b^j}$ car $x < 1 \Rightarrow A < b^{r-1}$ d'où le résultat.

- Il reste à montrer que tout rationnel x compris strictement entre 0 et 1 peut s'écrire sous la forme $x = \frac{a}{b^{r-1}(b^m - 1)}$

  a) Il existe des entiers $p, c \geqslant 1$ et un entier naturel $k \geqslant 0$ tels que c et b soient premiers entre eux et $x = \frac{p}{cb^k}$. Pour le voir, on décompose b en facteurs premiers : $b = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ avec $\alpha_j \geqslant 1$ pour $1 \leqslant j \leqslant r$. Ensuite, on écrit $x = u/v$ avec u, v entiers premiers entre eux. v s'écrit $v = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r} c$ où les β_j sont positifs ou nuls et où c est premier avec tous les p_j donc avec b. On choisit ensuite un entier naturel k tel que pour tout j entre 1 et r l'entier $\gamma_j := k\alpha_j - \beta_j$ soit positif ou nul. Soit $t = p_1^{\gamma_1} \cdots p_r^{\gamma_r}$. On a $vt = cb^k$ et on pose $p = ut$.

b)Il reste à prouver l'existence d'entiers μ et m tels que $\mu c = b^m - 1$ car alors on aura $x = \dfrac{p\mu}{b^k(b^m-1)}$. b est premier avec c, donc la classe $\overline{b}$ de b dans $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$ est inversible. C'est donc un élément du groupe fini $(\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^*$. Donc $\overline{b}$ est d'ordre fini et il existe un entier m tel que $\overline{b}^m = \overline{1}$ dans $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$, ce qui signifie exactement qu'il existe $\mu \in \mathbb{Z}$ tel que $b^m - 1 = \mu c$.■

Nombre de décimales exactes d'une approximation

Problème : Soient t_0 un réel et t une approximation de t_0 à 10^{-N} près, dont on sait calculer le développement décimal. C'est par exemple le cas lorsqu'on approche t_0 par un rationnel, ou même par un nombre décimal. La question est : les décimales de t_0 sont elles égales à celles de t jusqu'à l'ordre $N-1$? par exemple, sachant que $|\pi - 3.141| < 10^{-3}$, les deux premières décimales de π sont elles 1 et 4 ?

Soient $x, y \in I =]\,0,1\,[$ et N un entier strictement positif. On suppose $0 < y - x < b^{-N}$. On note $\underline{x} = (x_n)$ et $\underline{y} = (y_n)$ les développements propres en base b de x et y. Etant donné un entier $m \leqslant N-1$, on veut savoir si $x_m = y_m$.

Supposons que les deux développements ne soient pas identiques jusqu'à l'ordre $N-1$ inclus et soit m le plus petit entier k tel que $x_k \neq y_k$. On a donc $m \leqslant N-1$. D'après la croissance de Φ, on a nécessairement $x_m < y_m$.
• Montrons que $y_m = x_m + 1$. Sinon, $y_m - x_m \geqslant 2$ et $y - x \geqslant \dfrac{2}{b^m} - \sum\limits_{k \geqslant m+1} \dfrac{b-1}{b^k} = \dfrac{2}{b^m} - (b-1)\dfrac{1}{b^{m+1}}\dfrac{b}{b-1} = \dfrac{1}{b^m} > \dfrac{1}{b^N}$. Contradiction.
• Montrons que pour $m+1 \leqslant j \leqslant N$ on a $x_j = b-1$ et $y_j = 0$. Supposons le contraire. Soit n le plus petit des entiers k compris entre m et N tels que $(x_k, y_k) \neq (b-1, 0)$. On a donc $y_n - x_n \geqslant -(b-2)$ et, pour $m+1 \leqslant j < n$, $x_j = b-1$ et $y_j = 0$. Il vient

$$y - x \geqslant \frac{1}{b^m} - (b-1)\sum_{k=m+1}^{n-1} \frac{1}{b^k} - (b-2)\frac{1}{b^n} - (b-1)\sum_{j \geqslant n+1} \frac{1}{b^j} = \frac{1}{b^m} - b\left(\frac{1}{b^{m+1}} - \frac{1}{b^n}\right) - (b-2)\frac{1}{b^n} - \frac{1}{b^n} = \frac{1}{b^n} \geqslant \frac{1}{b^N}$$

contradiction.

Conclusion
Si x, y vérifient $0 < y - x < b^{-N}$ et si les deux développements différent à partir du rang $m < N-1$, on a nécessairement $y_m = x_m + 1$ et, pour $m+1 \leqslant j \leqslant N$ $\left\{\begin{array}{lcc} x_j & = & b-1 \\ y_j & = & 0 \end{array}\right.$
En particulier, si $y_N \neq 0$ on a $x_k = y_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant N-1$.

Application
Revenons au problème posé au début. Soit t_0 un réel et t une approximation de t_0 à 10^{-N} près. Les décimales de t sont elles celles de t_0? D'après ce qui précède, on voit que l'on peut conclure partiellement si on sait que l'approximation est par défaut ou par excès.
Si $t > t_0$ on prend $x = t_0,\ y = t$. Si la N-ième décimale t_N de t n'est pas égale à 0, on est sur que les $N-1$ premières décimales de t_0 sont égales à celles de t. Si $t_N = 0$ on ne peut pas conclure.
Si $t < t_0$, on prend $x = t$ et $y = t_0$. On voit que si la N-ième décimale t_N de t n'est pas égale à 9, alors les $N-1$ premières décimales de t_0 sont égales à celles de t. Si $t_N = 9$ on ne peut pas conclure.
Si on ne sait pas si la valeur approchée t l'est par défaut ou par excés, on pourra conclure que les $N-1$ premières décimales de t_0 sont égales à celles de t, si la N-ième décimale de t n'est ni un 0 ni un 9. Donc la seule propriété $|\pi - 3.141| < 10^{-3}$ implique que les deux premières décimales de π sont 1 et 4.

Continuité des décimales

Problème : Soit $d_n : I \to \{0, 1, \ldots b-1\}$ l'application qui à un réel x associe sa n-"décimale". L'application d_n est elle continue ?

Rappelons que D_b dénote l'ensemble des nombres rationnels de la forme a/b^k où $a \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$ (si $b = 10$, ce sont les nombres décimaux). La fonction d_n est définie par $d_n(x) = p_n(x) - bp_{n-1}(x) = [b^n x] - b\left[b^{n-1}x\right]$. On sait que la fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Il s'ensuit déjà que, pour tout n, si $x \notin D_b$, la fonction d_n est continue en x.
D'autre part, la fonction partie entière est continue à droite en tout point, donc les fonctions d_n aussi. Il reste à étudier la continuité à gauche en un point $x \in D_b$.

Fixons donc $x = \frac{x_1}{b} + \cdots + \frac{x_n}{b^n}$ avec $0 < x_n \leqslant b-1$.

- La fonction p_n est discontinue à gauche en x.
- $b^{n-1}x - \frac{x_n}{b} \in \mathbb{N}$ donc $b^{n-1}x \notin \mathbb{Z}$, par conséquent p_{n-1} est continue en x. Il en est de même des fonctions p_k pour $k < n$. Donc les fonctions d_k, pour $k < n$ sont continues en x et la fonction d_n est discontinue (à gauche) en x.
- Considérons maintenant un entier $m > n$. Soit y tel que $x - b^{-m} < y < x$. On a $d_m(x) = 0$. D'autre part, $b^m x - 1 < b^m y < b^m x$ donc $[b^m y] = b^m x - 1$ et de même, $\left[b^{m-1}y\right] = b^{m-1}x - 1$ donc $d_m(y) = b^m x - 1 - b(b^{m-1}x - 1) = b - 1$. Ceci prouve que d_m n'est pas continue à gauche en x.

Finalement, les fonctions $d_k,\ k < n$ sont continues en x et les fonctions $d_m\ m \geqslant n$ sont discontinues en x (continues à droite et discontinues à gauche).
Exercice Montrer que $\int_0^1 d_n(x)dx = \frac{1}{b}$ pour tout n.

3

Intégration des fonctions numériques sur un intervalle quelconque

Prérequis On suppose connue l'intégrale des fonctions numériques continues par morceaux sur un segment.

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, d'extrémités α et β. On désignera par $S(I)$ l'ensemble des segments contenus dans I: $S(I) = \{J = [a, b]\,;\, [a, b] \subset I\}$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est positive si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$. Rappelons qu'une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est dite localement continue par morceaux si sa restriction à tout segment $J \subset I$ est continue par morceaux. On désignera par $C_M(I, \mathbb{K})$ ou $C_M(I)$ la $\mathbb{K}$ algèbre des fonctions localement continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

3.1 Intégration des fonctions positives

Si f est continue et positive sur le segment I_0, on a pour tout segment $J \subset I_0$, $\int_J f \leqslant \int_{I_0} f$, de sorte que $\int_{I_0} f = \sup\limits_{J \in S(I_0)} \int_J f$. Ceci justifie la définition suivante.

DEFINITION 3.1.1
Soit $f \in C_M(I, \mathbb{R})$ ***positive*** *sur I. On dit que f est intégrable sur I si la famille de nombres postifs $\left(\int_J f;\ J \in S(I)\right)$ est majorée. Dans ce cas, l'intégrale de f est définie par*

$$\int_I f = \sup_{J \in S(I)} \int_J f$$

♠ Soient $I = [\alpha, \beta]$ un segment et $f : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux. Il résulte de cette définition que f est intégrable sur chacun des quatre intervalles $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta[$, $]\alpha, \beta]$, $]\alpha, \beta[$ et que les intégrales de f sur chacun de ces intervalles sont égales.

PROPOSITION 3.1.1
Soit (J_n) une suite croissante (pour l'inclusion) de segments de I dont la réunion est I et $f \in C_M(I, \mathbb{R})$ positive ; f est intégrable sur I si et seulement si la suite (croissante) $\left(\int_{J_n} f\right)_{n \geqslant 0}$ est majorée et alors $\int_I f = \lim\limits_{n \to \infty} \int_{J_n} f$.

preuve
Si f est intégrable on a par définition $\int_{J_n} f \leqslant \int_I f$ pour tout n, donc la suite $\left(\int_{J_n} f\right)$ est majorée et $\lim\limits_{n \to \infty} \int_{J_n} f \leqslant \int_J f$. Réciproquement, suposons cette suite majorée et soit L sa limite. Pour tout segment J inclus dans I, il existe un entier n tel que $J \subset J_n$ donc f étant positive, $\int_J f \leqslant \int_{J_n} f \leqslant L$. Donc f est intégrable sur I et $\int_I f \leqslant L$. ■

COROLLAIRE 3.1.1
Soient $f, g \in C_M(I, \mathbb{R})$ positives et intégrables et $\lambda \geqslant 0$. Les fonctions λf et $f + g$ sont positives intégrables et on a $\int_I \lambda f = \lambda \int_I f$ et $\int_J (f + g) = \int_I f + \int_J g$.

PROPOSITION 3.1.2
*Soit $f \in C_M(I,\mathbb{R})$ **positive**, $c \in I$ et $F : I \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$. f est intégrable sur I si et seulement si la fonction F a des limites finies en α et β. On a alors $\int_I f = \lim\limits_{x\to\beta} F(x) - \lim\limits_{x\to\alpha} F(x)$, ce que l'on note $\int_I f = F(x)]_{x\to\alpha}^{x\to\beta}$ ou plus simplement $F(x)]_\alpha^\beta$.*

preuve
Puisque f est positive, F est croissante ; si $J = [a,b] \subset I$ on a $\int_J f = F(b) - F(a)$ donc $\sup\{\int_J f;\ J \in S(I)\} = \sup\{F(b) - F(a); a,b \in I, a < b\} = \lim\limits_{x\to\beta} F(x) - \lim\limits_{x\to\alpha} F(x)$ d'où la conclusion. ■

PROPOSITION 3.1.3
*Soit $f,g \in C_M(I,\mathbb{R})$ **positives**, telles que $\forall x \in I\ f(x) \leqslant g(x)$. Si g est intégrable sur I, il en est de même de f et $\int_I f \leqslant \int_I g$.*

preuve
Pour tout $J \in S(I)$ on a $\int_J f \leqslant \int_J g \leqslant \int_I g$ donc f est intégrable et $\int_I f = \sup\{\int_J f;\ J \subset I\} \leqslant \int_I g$. ■

COROLLAIRE 3.1.2
*Soient $f,g \in C_M([c,\beta[,\mathbb{R})$ **toutes deux positives**. Si $f(x) \underset{x\to\beta}{\sim} g(x)$, f est intégrable sur I ssi g est intégrable sur I.*

Bien entendu, ce résultat s'applique aussi à des fonctions négatives (en considérant les fonctions opposées).

Exemples usuels

1. Soient $f_a(x) = x^{-a}$ et $c > 0$; f_a est intégrable sur $[c,+\infty[$ si et seulement si $a > 1$;f_a est intégrable sur $]0,c]$ si et seulement si $a < 1$.
2. $x \to e^{-kx}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $k > 0$.
3. $x \to -\ln(x)$ est intégrable sur $]0,1]$.

Attention! Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ intégrable. Si $f(x)$ a une limite λ lorsque x tens vers l'infini, on a nécessairement $\lambda = 0$ (celà résulte par exemple du corollaire précédent). Par contre f peut ne pas avoir de limite en l'infini, ni même être majorée sur $[a,+\infty[$. Considérons par exemple la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie comme suit : pour tout entier $n \geqslant 1$ $f(n) = n^2, f(n-\frac{1}{n^4}) = f(n+\frac{1}{n^4}) = 0$ et f affine sur chaque intervalle $[n-\frac{1}{n^4},n],\quad [n,n+\frac{1}{n^4}],\quad [n+\frac{1}{n^4},(n+1)-\frac{1}{(n+1)^4}]$. Il est clair que f n'est pas majorée. Soit $x > 0$ et n un entier $n > x+1$; on a
$\int_0^x f(t)\,dt \leqslant \int_0^{(n+n^{-4})} f(t)\,dt = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} =: K$ quantité finie. Donc l'intégrale de f sur tout segment de $\mathbb{R}^+$ est majorée par K et f est intégrable.

3.2 Intégration des fonctions quelconques

Soit $f : I \to \mathbb{R}$; on définit les fonctions $f_+, f_- : I \to \mathbb{R}$ par

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} = \max\{f(x),0\} \quad \text{et} \quad f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} = \max\{-f(x),0\}$$

Ces fonctions sont positives et localement continues par morceaux si f l'est. Pour tout $x \in I$, on a $0 \leqslant f_+(x) \leqslant |f(x)|$, $0 \leqslant f_-(x) \leqslant |f(x)|$ et $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$, $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$. Il résulte de la proposition 3.1.3 que si $|f|$ est intégrable sur I il en est de même de f_+ et de f_-. Soit maintenant $f : I \to \mathbb{C}$. On écrit avec des notations évidentes $f = \mathrm{Re}(f) + i\mathrm{Im}(f)$ et on a $|\mathrm{Re}(f)| \leqslant |f|$ et $|\mathrm{Im}(f)| \leqslant |f|$. Si f est localement continue par morceaux, il en est de même de sa partie réelle et de sa partie imaginaire. Si en outre $|f|$ est intégrable, il en est de même de $|\mathrm{Re}(f)|$ et de $|\mathrm{Im}(f)|$.

DEFINITION 3.2.1
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ localement continue par morceaux ; on dit que f est intégrable sur I si la fonction $|f|$ est intégrable sur I. Dans ce cas, on pose $\int_I f = \int_I f_+ - \int_I f_-$.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ localement continue par morceaux ; on dit que f est intégrable sur I si la fonction $|f|$ est intégrable sur I. Dans ce cas les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont intégrables sur I et on pose $\int_I f = \int_I \mathrm{Re}(f) + i\int_I \mathrm{Im}(f)$.

Si I est un segment ces définitions sont cohérentes avec les notions existantes d'intégrales de f sur I.

3.2.1 Propriétés

PROPOSITION 3.2.1
*Soit (J_n) une suite croissante (pour l'inclusion) de segments de I dont la réunion est I et $f \in C_M(I,\mathbb{R})$ **intégrable** sur I. Alors $\int_I f = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{J_n} f$.*

PROPOSITION 3.2.2
*Soit $f \in C_M(I)$ **intégrable**, $c \in I$ et $F : I \to \mathbb{K}$ définie par $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$. La fonction F a des limites finies en α et β et on a $\int_I f = \lim\limits_{x\to\beta} F(x) - \lim\limits_{x\to\alpha} F(x)$,*

Ces propositions sont des conséquences immédiates de la définition et des propositions 3.1.1 et 3.1.2.
Attention Dans ces deux propositions le fait que f est intégrable sur I est une hypothèse. Si $f \in C_M(I)$ n'est pas de signe constant, F peut avoir des limites finies en α et en β sans que f soit intégrable.
♠ C'est le cas par exemple pour la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ sur $I = \mathbb{R}_*^+$.(voir partie 3.7)

De la proposition 3.1.3 on déduit le résultat suivant, essentiel dans la pratique :

PROPOSITION 3.2.3
Soient $f,\ \varphi \in C_M(I)$ vérifiant $\forall x \in I,\ |f(x)| \leqslant \varphi(x)$. Si φ est intégrable sur I, il en est de même de f.

En particulier, si I est un intervalle borné et si $f \in C_M(I)$ est bornée sur I, f est intégrable sur I. On déduit des exemples usuels et de la proposition précédente les deux règles pratiques suivantes:

1. Soit $f :]0,a] \to \mathbb{C}$ continue ; si il existe $\alpha < 1$ tel que $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha f(t)$ existe dans $\mathbb{C}$, f est intégrable sur $]0,a]$.
2. Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{C}$ continue ; si il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{t\to\infty} t^\alpha f(t)$ existe dans $\mathbb{C}$, f est intégrable sur $[a,+\infty[$.

PROPOSITION 3.2.4
Soit $f \in C_M(I)$ intégrable. On a $\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$.

preuve
Utiliser la proposition 3.2.2 et le résultat connu pour les fonctions continues par morceaux sur un segment.

THEOREME 3.2.1

1. *L'ensemble des fonctions $f \in C_M(I,\mathbb{K})$ intégrables est un sous espace vectoriel de $C_M(I,\mathbb{K})$ que l'on notera $L(I,\mathbb{K})$ et l'application $f \to \int_I f$ est une forme linéaire .*
2. *L'application $f \to \int_I |f|$ est une norme sur l'espace $L(I,\mathbb{K}) \cap C^0(I,\mathbb{K})$.*
3. *Pour cette norme, l'application $f \to \int_I f$ est une forme linéaire continue de norme 1.*

preuve

(1) La fonction nulle appartient à $L(I,\mathbb{K})$ qui est donc non vide ; si $f,g \in L(I,\mathbb{K}),\ \lambda \in \mathbb{K}$, la majoration $|\lambda f(x) + g(x)| \leqslant |\lambda||f(x)| + |g(x)|$ valable pour tout $x \in I$, le corollaire 3.1.1 et la proposition 3.1.3 montrent que $\lambda f + g \in L(I,\mathbb{K})$. Ensuite, si (J_n) est une suite croissante de segments de réunion I, on a $\int_{J_n}(\lambda f + g) = \lambda\int_{J_n} f + \int_{J_n} g$, donc en passant à la limite, $\int_I(\lambda f + g) = \lambda\int_I f + \int_I g$. L'application $I : L(I,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est donc linéaire.

(2) La seule propriété non immédiate à vérifier est $\int_I |f| = 0 \Longrightarrow f = 0$. Si J est un segment, $J \in S(I)$, on a $0 \leqslant \int_J |f| \leqslant \int_I |f| = 0$; $|f|$ étant continue et positive sur J, f est nulle sur J ; ceci est vrai pour tout segment $J \subset I$ donc $f = 0$.

(3) De l'inégalité $\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$ on déduit la continuité de I et l'inégalité $\|I\| \leqslant 1$. En choisissant pour f une fonction positive continue non nulle à support compact contenu dans I (c'est à dire nulle hors d'un intervalle compact contenu dans I , ce qui garantit qu'elle est intégrable) , on a l'égalité. Donc $\|I\| \geqslant 1$ d'où la conclusion. ■

PROPOSITION 3.2.5 (Relation de Chasles)
Soient $f \in C_M(I, \mathbb{K})$, $c \in I$, $I_1 = I \cap]-\infty, c]$ et $I_2 = I \cap [c, +\infty[$. Soient f_1, f_2 les restrictions de f aux intervalles I_1 et I_2 respectivement. f intégrable sur I si et seulement si f_1 et f_2 sont intégrables sur I_1 et I_2 respectivement. Dans ce cas $\int_I f = \int_{I_1} f_1 + \int_{I_2} f_2$.

Soit $J_n = [a_n, b_n]$ une suite croissante de segments de réunion I tels que $a_n < c < b_n$ pour tout n. La suite de segments $([a_n, c])$ (respectivement $([c, b_n])$) est croissante de réunion I_1 (resp I_2).
Si f est intégrable sur I, il en est de même de $|f|$ (par définition); les suites $\left(\int_{[a_n,c]} |f|\right)$ et $\left(\int_{[c,b_n]} |f|\right)$ sont majorées par $\int_I |f|$; donc f_1 et f_2 sont intégrables. Réciproquement si f_1 et f_2 sont intégrables, on a $\int_{[a_n,b_n]} |f| = \int_{[a_n,c]} |f| + \int_{[c,b_n]} |f| \leqslant \int_{I_1} |f_1| + \int_{I_2} |f_2|$, donc f est intégrable sur I.
On a alors pour tout n $\int_{a_n}^{b_n} f = \int_{a_n}^{c} f + \int_{c}^{b_n} f$ d'où la conclusion en utilisant la proposition 3.2.1.

3.2.2 Changement de variables

THEOREME 3.2.2
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{C}$ continue ; soit d'autre part $\varphi : J \to I$ une bijection de classe C^1 de l'intervalle J sur l'intervalle I. Alors f est intégrable sur I ssi la fonction $g = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ est intégrable sur J et dans ce cas

$$\int_I f(x)\, dx = \int_J (f \circ \varphi)(u) \cdot |\varphi'(u)|\, du$$

preuve
La fonction φ est strictement monotone ; elle induit une bijection $\phi : S(J) \to S(I)$ qui envoie le segment d'extrémités u et v sur celui d'extrémités $\varphi(u)$ et $\varphi(v)$. Pour $K \in S(J)$ on a d'après le théorème de changement de variable usuel $\int_K |(f \circ \varphi)||\varphi'| = \int_{\phi(K)} |f|$. Les deux ensembles de réels $\left\{\int_K |(f \circ \varphi)||\varphi'| \,;\ K \in S(J)\right\}$ et $\left\{\int_L |f| \,;\ L \in S(I)\right\}$ sont donc égaux. Donc simultanément majorés ou non majorés. Ceci prouve la première partie du théorème.
Supposons maintenant ces ensembles majorés, i.e. f intégrable sur I et donc aussi $(f \circ \varphi)|\varphi'|$ intégrable sur J. Soit (K_n) une suite croissante de segments de J de réunion J; la suite $L_n = \phi(K_n)$ est une suite croissante de segments de réunion I; comme on a pour tout n $\int_{K_n} (f \circ \varphi)|\varphi'| = \int_{L_n} f$ on obtient en faisant tendre n vers ∞ $\int_J (f \circ \varphi)(u) \cdot |\varphi'(u)|\, du = \int_I f(x)\, dx$. ■

Exemple
Existence et calcul de $\int_0^\infty \frac{\ln(t)}{1+t^2}\, dt$. En déduire la valeur, pour $a > 0$ de $\int_0^\infty \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\, dt$.

Posons $f(t) = \frac{\ln(t)}{1+t^2}$; la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$; pour $0 < t \leqslant 1$ on a $|f(t)| \leqslant |\ln(t)|$ et la fonction $|\ln|$ est intégrable sur $]0, 1]$. Il en est donc de même de f. D'autre part $t^{3/2}|f(t)| \longrightarrow 0$ quand $t \to \infty$ donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$. Par conséquent, f est intégrable sur $]0, +\infty[$. Le changement de variables $u = 1/t$ donne, $\int_0^1 f(t)\, dt = -\int_1^\infty f(t)\, dt$ donc $\int_0^\infty f(t)\, dt = 0$. On justifie comme ci dessus l'intégrabilité de la fonction $f_a(t) = \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}$. Le changement de variables $t = ua$ donne

$$\int_0^\infty \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\, dt = \frac{\ln(a)}{a} \int_0^\infty \frac{1}{u^2+1}\, du + \frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{\ln(u)}{1+u^2}\, du = \frac{\pi \ln(a)}{2a}.$$

3.3 Intégration des relations de comparaison

Dans toute cette partie on énoncera les résultats pour des fonctions localement continues par morceaux $[a, b[\to \mathbb{R}^+$ avec $a < b$; on a bien entendu des résultats analogues pour des fonction $]b, a] \to \mathbb{R}^+$ avec $b < a$.

THEOREME 3.3.1
*Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ **positives** telles que $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$. (On sait qu'alors f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si g est intégrable sur $[a, b[$).*

1. *Si f et g sont intégrables sur $[a, b[$ $\int_x^b f(t)\,dt$ et $\int_x^b g(t)\,dt$ sont, lorsque x tend vers b, des infiniment petits équivalents :*
$$\int_x^b f(t)\,dt \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g(t)\,dt \quad (\underset{x\to b}{\longrightarrow} 0)$$
2. *Si f (et donc aussi g) n'est pas intégrable sur $[a, b[$ $\int_a^x f(t)\,dt$ et $\int_a^x g(t)\,dt$ sont, lorsque x tend vers b, des infiniment grands équivalents :*
$$\int_a^x f(t)\,dt \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g(t)\,dt \quad (\underset{x\to b}{\longrightarrow} \infty)$$

preuve

1. Soit $\varepsilon,\ 0 < \varepsilon < 1$; il existe un réel $\beta \in]a, b[$ tel que $\beta \leqslant t < b \Rightarrow (1-\varepsilon)f(t) \leqslant g(t) \leqslant (1+\varepsilon)f(t)$. Alors, pour $\beta < x < b$ on a $(1-\varepsilon)\int_x^b f(t)\,dt \leqslant \int_x^b g(t)\,dt \leqslant (1+\varepsilon)\int_x^b f(t)\,dt$. ■
2. Posons $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ et $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ Puisque f est positive et non intégrable, $\lim\limits_{x\to b} F(x) = +\infty$. De même pour $G(x)$. Soit $\alpha \in]a, b[$ tel que $t \geqslant \alpha \Rightarrow F(t) > 0$ et $(1-\varepsilon/2)f(t) \leqslant g(t) \leqslant (1+\varepsilon/2)f(t)$. En intégrant cette dernière inégalité, on obtient, pour $\alpha < x < b$ $\quad (1-\varepsilon/2)\,(F(x)-F(\alpha)) \leqslant G(x)-G(\alpha) \leqslant (1+\varepsilon/2)\,(F(x)-F(\alpha))$. α étant ainsi fixé, on a, pour $\alpha < x < b$:
$$\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{F(x)-F(\alpha)}{F(x)} + \frac{G(\alpha)}{F(x)} \leqslant \frac{G(x)}{F(x)} \leqslant \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{F(x)-F(\alpha)}{F(x)} + \frac{G(\alpha)}{F(x)}$$
Lorsque x tend vers b le membre de gauche de cette double inégalité tend vers $1-\varepsilon/2$ et celui de droite vers $1+\varepsilon/2$; il existe donc un $\beta \in]\alpha, b[$ tel que pour $x \in]\beta, b[$ le membre de gauche soit supérieur à $1-\varepsilon$ et celui de droite inférieur à $1+\varepsilon$. Alors pour $x \in]\beta, b[$ on a $1-\varepsilon \leqslant \frac{G(x)}{F(x)} \leqslant 1+\varepsilon$. ■

THEOREME 3.3.2
*Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ avec g **positive** telles que $|f(t)| = \underset{t\to b}{o}(g(t))$ (respectivement $|f(t)| = \underset{t\to b}{O}(g(t))$.*

1. *Si g est intégrable sur $[a, b[$, f aussi et $\int_x^b f(t)\,dt = \underset{x\to b}{o}\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$*
(respectivement $\int_x^b f(t)\,dt = \underset{x\to b}{O}\left(\int_x^b g(t)\,dt\right)$
2. *Si f n'est pas intégrable, g ne l'est pas non plus et $\int_a^x f(t)\,dt = \underset{x\to b}{o}\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)$*
(respectivement $\int_a^x f(t)\,dt = \underset{x\to b}{O}\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)$.

♠ La preuve est semblable à celle du théorème précédent.

3.4 Suites et séries de fonctions

Les deux théorèmes de cette section sont admis par le programme.

THEOREME 3.4.1 (théorème de convergence monotone)
*Soit $(f_n : I \to \mathbb{R})_{n\geqslant 0}$ une suite **croissante** de fonctions localement continues par morceaux sur l'intervalle I et intégrables sur I , convergeant simplement sur I vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ **localement continue par morceaux** sur I. Alors f est intégrable sur I si et seulement si la suite (croissante) $\left(\int_I f_n\right)_{n\geqslant 0)}$ est majorée. Dans ce cas*
$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$$

COROLLAIRE 3.4.1
Soit $(u_n : I \to \mathbb{R})_{n \geqslant 0}$ une suite de fonctions ***positives****, localement continues par morceaux et intégrables sur I telles que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement sur I. On suppose en outre que la somme u de cette série est* ***localement continue par morceaux*** *sur I. Alors u est intégable sur I si et seulement si la série de terme général $\int_I u_n$ est convergente. Dans ce cas*

$$\int_I \left(\sum_{n\geqslant 0} u_n \right) = \sum_{n\geqslant 0} \left(\int_I u_n \right)$$

Le corollaire se prouve en appliquant le théorème à la suite des sommes partielles de la série.

THEOREME 3.4.2 (Théorème de convergence dominée)
Soit $(f_n : I \to \mathbb{C})_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions localement continues par morceaux sur l'intervalle I possèdant les propriétés suivantes:

- *la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction $f : I \to \mathbb{C}$* ***localement continue par morceaux****.*
- *Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ localement continue par morceaux et intégrable sur I telle que pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ (on dit que la suite (f_n) est dominée par la fonction φ).*

Alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n$$

Exemple En utilisant la relation $e^{-t} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ montrer que $\int_0^\infty e^{-t} \ln(t) dt = -\gamma$ (constante d'Euler).

- Soit $h(t) = e^{-t} |\ln(t)|$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $h(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t)$ et $\lim\limits_{t\to\infty} t^2 h(t) = 0$, donc h est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$; il en est donc de même de $t \to e^{-t} \ln t$.
- La fonction $t \to \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. Pour contourner cette difficulté, on va la tronquer : soit $\chi_{[0,n]}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, n]$. Posons $\varphi_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \chi_{[0,n]}(t)$ et $h_n(t) = \varphi_n(t) \ln t$. Soit $t > 0$ fixé ; pour $n > [t] + 1$, on a $h_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(t) = e^{-t} \ln t$.
  Montrons maintenant que $|h_n(t)| \leqslant h(t)$ pour tout $t > 0$; cette inégalité est trivialement vérifiée si $t > n$; d'autre part, on a pour tout $u \in \mathbb{R}$, $1 - u \leqslant e^{-u}$ (convexité de la fonction exponentielle) ; donc $1 - \frac{t}{n} \leqslant e^{-t/n}$; pour $0 \leqslant t \leqslant n$, les deux membres de cette inégalité sont positifs ; on peut élever à la puissance n : $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$. On en déduit $|h_n(t)| \leqslant h(t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant n$; ce qui établit l'inégalité annoncée. Les fonctions h_n et h sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$; on déduit du théorème de convergence dominée $\int_o^\infty e^{-t} \ln t\, dt = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty h_n(t)\, dt$.
- Soit $I_n = \int_0^\infty h_n(t) dt$. Il vient

  $$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t\, dt = n \int_0^1 x^n \left(\ln(n) + \ln(1-x)\right)\, dx$$

  (changement de variables $x = 1 - t/n$) soit

  $$I_n = \frac{n}{n+1} \ln(n) + nJ_n \text{ avec } J_n = \int_0^1 x^n \ln(1-x)\, dx$$

  On intègre par parties, en posant $v(x) = \ln(1-x)$, $u'(x) = x^n$, $u(x) = \frac{x^{n+1}-1}{n+1}$; ce choix de u assure que $\lim\limits_{x\to 1} u(x)v(x) = 0$. Il vient

  $$J_n = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}-1}{x-1}\, dx = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 (1 + x + \cdots + x^n)\, dx = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

  d'où

  $$I_n = \frac{n}{n+1} \left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right)$$

  quantité qui tend vers $-\gamma$ quand n tend vers l'infini. Donc

  $$\int_0^\infty e^{-t} \ln(t)\, dt = -\gamma.$$

3.5 Complément

Le théorème ci dessous est donné en complément : il ne figure pas explicitement au programme de l'agrégation interne, mais est par contre au programme des classes préparatoires.

THEOREME 3.5.1
Soit $(u_n : I \to \mathbb{C})_{(n\geqslant 0)}$ une suite de fonctions localement continues par morceaux et intégrables sur I ; on suppose que la série $\sum u_n$ converge simplement sur I et que sa somme $u = \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est une fonction localement continue par morceaux. Si la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_I |u_n|$ est convergente, la fonction u est intégrable et $\int_I u = \sum\limits_{n\geqslant 0} \int_I u_n$.

preuve

1. Intégrabilité de u :
   Posons $A_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} |u_n|$; on ne peut pas appliquer directement le théorème de convergence monotone ; en effet d'une part la série $\sum |u_n(x)|$ peut diverger pour certaines valeurs de x et d'autre part, même si cette série converge pour tout x, rien ne garantit que sa somme soit continue par morceaux. On va tronquer la fonction A_n ; posons, pour $x \in I,\ h_n(x) = \min\left(A_n(x), |u(x)|\right)$. On vérifie facilement les propriétés suivantes :

   - Pour tout n, h_n est localement continue par morceaux sur I et intégrable, car $0 \leqslant h_n \leqslant A_n$ (et A_n est intégrable).
   - Pour tout $x \in I$ la suite $(h_n(x))$ est croissante.
   - Pour tout $x \in I,\ \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = |u(x)|$ et la fonction $|u|$ est localement continue par morceaux sur I.

   On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone. On a $\int_I h_n \leqslant \int_I A_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \int_I |u_k| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{\infty} \int_I |u_k|$ quantité finie par hypothèse. Donc la fonction $|u|$ est intégrable sur I et

   $$\int_I |u| = \lim_{n\to\infty} \int_I h_n \leqslant \sum_{k\geqslant 0} \int_I |u_n| \tag{3.1}$$

   par conséquent u est intégrable.

2. Egalité $\int_I u = \sum\limits_{n\geqslant 0} \int_I u_n$.
   La fonction $R_n = u - \sum\limits_{k=0}^{k=n} u_k$ est localement continue par morceaux. On peut apliquer les résultats de la première partie de la preuve à la série $R_n = \sum\limits_{k\geqslant n+1} u_k$. R_n est donc intégrable sur I et d'après (1), $\left|\int_I R_n\right| \leqslant \int_I |R_n| \leqslant \sum\limits_{k\geqslant n+1} \int_I |u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc

   $$\left|\int_I u - \sum_{k=0}^{k=n} \int_I u_k\right| = \left|\int_I \left(u - \sum_{k=0}^{k=n} u_k\right)\right| = \left|\int_I R_n\right|$$

   tend vers 0 quand n tend vers l'infini, ce qui achève la preuve.

3.6 Séries et Intégrales

Soit $u = (u_n)$ une suite réelle ou complexe ; on lui associe la fonction $f_u : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ définie par $f_u(x) = u_{[x]}$ où $[x]$ désigne la partie entière de x ; autrement dit $f_u(x) = u_n$ pour $n \leqslant x < n+1$. La fonction f_u est localement continue par morceaux.

Soit $U_n = u_0 + \cdots + u_n$ la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n et par convention $U_{-1} = 0$. Pour tout $x > 0$ on a en posant $n = [x]$,

$$\int_0^x f_u(t)\,dt = U_{n-1} + (x-n)u_n$$

Supposons d'abord la suite u positive ; la fonction U est positive et on a $U_{[x]-1} \leqslant \int_0^x f_u(t)\,dt \leqslant U_{[x]}$. Donc l'intégrale de f_u sur tout segement contenu dans $\mathbb{R}^+$ est majorée ssi la suite (U_n) est majorée, ce qui revient à dire (**série à termes positifs**) que la série $\sum u_n$ converge. On a donc, dans le cas d'une suite positive l'équivalence entre la convergence de la série $\sum u_n$ et l'intégrabilité de la fonction f_u.
Soit maintenant (u_n) une suite quelconque ; la fonction associée à la suite $(|u_n|)$ est la fonction $|f_u|$ telle que $|f_u|(x) = |f_u(x)|$. On a donc montré, compte tenu de ce qui précède le

THEOREME 3.6.1
*Soit $u = (u_n)$ une suite complexe et f_u la fonction associée comme ci dessus. La fonction f_u est intégrable ssi la série de terme général u_n est **absolument convergente**. Dans ce cas*

$$\int_0^{\infty} f_u(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} u_n$$

Exercice On se donne une suite $(u^{(m)})$ de suites complexes, la suite $u^{(m)}$ ayant pour terme général $u_n^{(m)}$. Que devient dans ce cadre le théorème de convergence dominée ?

3.7 Intégrales impropres (ou généralisées)

3.7.1 Définitions

DEFINITION 3.7.1
Soient $I = [a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ où a est un réel et $a < b \leqslant \infty$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction localement continue par morceaux. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si la quantité $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ a une limite finie quand x tend vers b. Dans ce cas on note $\int_a^b f(t)\,dt = \lim\limits_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt$

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge. Dans ce cas, la fonction f est intégrable sur I et l'intégrale généralisée de f n'est autre que son intégrale déjà définie dans la partie 3. C'est en particulier le cas si f est positive.
On dira que l'intégrale de f est semi-convergente si elle est convergente et si f n'est pas intégrable (donc si l'intégrale n'est pas absolument convergente).

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est donc intégrable au sens du nouveau programme si et seulement si son intégrale est absolument convergente au sens de l'ancien programme.

Bien entendu, on a des définitions analogues pour une fonction $f :]b, a] \to \mathbb{K}$ où $-\infty \leqslant b < a < \infty$. Enfin, soit $f :]a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction localement continue par morceaux avec cette fois $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Soit $c, d \in]a, b[$. Si les deux intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent, il en est de même des intégrales $\int_a^d f$ et $\int_d^b f$ et on a $\int_a^c f + \int_c^b f$ =$\int_a^f + \int_d^b f$. Dans ce cas on dira que l'intégrale $\int_a^b f$ converge.

Attention! Il est essentiel dans la définition précédente que les deux limites $\lim\limits_{x\to b} \int_c^x f(t)\,dt$ et $\lim\limits_{x\to a} \int_x^c f(t)\,dt$ existent. Par exemple, soit $f(x) = x$ avec $I = \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,dt$ diverge alors que $\lim\limits_{x\to\infty} \int_{-x}^{x} t\,dt = 0$.

Exemple Etude de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$ et prolongée par continuité en 0 par $f(0) = 1$. Par parité, les intégrales $\int_{-X}^0 f(t)\,dt$ et $\int_0^X f(t)\,dt$ sont égales pour tout $X > 0$. Il suffit donc de montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$. f étant continue sur $\mathbb{R}$ il suffit de montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Soit $X > 1$; une intégration par parties sur l'intervalle compact $[1, X]$ donne

$$\int_1^X \frac{\sin t}{t}\,dt = \cos 1 - \frac{\cos X}{X} - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2}\,dt$$

La fonction $h(t) = \frac{\cos t}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et majorée sur cet intervalle par la fonction intégrable $t \to t^{-2}$; elle est donc intégrable sur $[1, +\infty[$ et $\lim\limits_{X\to\infty} \int_1^X \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ existe dans $\mathbb{R}$. Comme $\frac{\cos X}{X}$ tend vers 0 quand X tend vers l'infini, on en déduit que $\int_1^X \frac{\sin t}{t}\, dt$ a une limite finie quand X tend vers l'infini. ■

Montrons maintenant que la fonction f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit k entier, $k \geqslant 1$. Pour $(k-1)\pi \leqslant t \leqslant k\pi$ on a $|f(t)| \geqslant |\sin(t)|/k\pi$ donc $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |f(t)|\, dt \geqslant \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)|\, dt = 2/k\pi$. Il vient

$$\int_0^{n\pi} |f(t)|\, dt \geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$$

Le membre de droite de cette expression tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. L'intégrale de $|f|$ sur les segments de $\mathbb{R}$ n'est donc pas majorée, ce qui prouve que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

3.8 Calculs

Il est essentiel de garder en mémoire que le calcul d'une intégrale sur un intervalle non compact d'une fonction intégrable, ou le calcul d'une intégrale semi-convergente est un calcul de limite.

- Si $f : I \to \mathbb{C}$ est intégrable (ou a une intégrale semi convergente) sur I et si $f = g + h$, les intégrales des fonctions g et h peuvent ne pas converger. Par exemple, si $I = [2, +\infty[,\ f(x) = \frac{2}{x^2-1},\ g(x) = \frac{1}{x-1}$ et $h(x) = -\frac{1}{x+1}$. On conduira le calcul de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty \frac{2}{x^2-1}\, dx &= \lim_{X\to\infty} \int_2^X \frac{2}{x^2-1}\, dx \\
&= \lim_{X\to\infty} \left(\int_2^X \frac{1}{x-1}\, dx - \int_2^X \frac{1}{x+1}\, dx \right) \\
&= \lim_{X\to\infty} (\ln(X-1) - \ln(X+1) + \ln(2)) \\
&= \ln(2)
\end{aligned}$$

- Les mêmes précautions s'imposent pour une intégration par parties. Si u, v sont de classe C^1 sur $I = [0, +\infty[$ par exemple et si $u'v$ est intégrable sur I (ou si l'intégrale sur I de $u'v$ est semi convergente) il n'y a aucune raison pour qu'il en soit de même de l'intégrale de uv'. Dans le cas considéré ici, on a pour tout $X > 0$ $\int_0^X u'v = u(X)v(X) - u(0)v(0) - \int_0^X uv'$ et le fait que le premier membre ait une limite quand X tend vers l'infini n'implique pas qu'il en soit de même pour $u(X)v(X)$ et pour $\int_0^X uv'$.

  Exemple
  Existence et calcul de $I = \int_o^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\, dx$

  - Existence : Posons pour $x \in]0, 1[$ $f(x) = \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}$; f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = -1$; f est constamment négative et au voisinage de 1 on a $f(x) \sim \ln(1-x)$ qui est intégrable au voisinage de 1. Donc f est intégrable sur $[0, 1[$.
  - Calcul: On effectue une intégration par parties en posant $u(x) = -1/x$ et $v(x) = \ln(1-x^2)$; ces deux fonctions sont de classe C^1 sur tout $[t, T]$ où $0 < t < T < 1$. On obtient :

$$\int_t^T \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\, dx = -\frac{\ln(1-T^2)}{T} + \frac{\ln(1-t^2)}{t} - \int_t^T \frac{2}{1-x^2}\, dx$$

  $\ln(1-t^2) \underset{t\to 0}{\sim} -t^2$ donc

$$\int_0^T \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\, dx = -\frac{\ln(1-T^2)}{T} - \int_0^T \frac{2}{1-x^2}\, dx = -\frac{\ln(1-T^2)}{T} + \ln(1-T) - \ln(1+T)$$

Mais quand $T \to 1$, les deux expressions figurant au second membre tendent vers l'infini. On doit donc finir le calcul comme suit:

$$\int_0^T \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(1-T^2)}{T} - \ln(1+T) + \ln(1-T) = \left(1-\frac{1}{T}\right)\ln(1-T) - \left(1+\frac{1}{T}\right)\ln(1+T)$$

Lorsque $T \to 1$, $(1-T)\ln(1-T) \longrightarrow 0$ donc

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,dx = \lim_{T\to 1}\int_0^T \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,dx = -2\ln(2)$$

.

– Il aurait été plus astucieux de choisir $u(x) = -1/x + 1$. On obtenait alors

$$\int_t^T \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,dx = -\ln(1-T^2)\frac{T-1}{T} + \ln(1-t^2)\frac{t-1}{t} - \int_t^T \frac{2}{1+x}\,dx$$

Comme $\lim\limits_{T\to 1}(T-1)\ln(1-T^2) = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0}\ln(1-t^2)\frac{t-1}{t} = 0$ il reste

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,dx = -\int_0^1 \frac{2}{1+x}\,dx = -2\ln(2).$$

4

Series entieres

4.1 Etude de la convergence

4.1.1 Definition et exemples

DEFINITION 4.1.1
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La série entière associée à cette suite est la série de fonctions de terme général $u_n(z) = a_n z^n$ où par convention $z^0 = 1$ i.e. $u_0(z) = a_0$. On la notera $\sum a_n z^n$.

Une telle série converge toujours pour $z = 0$.

Exemples

1. $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$ est la série entière associée à la suite $a_n = 1$ pour tout n. C'est la série géométrique qui converge ssi $|z| < 1$ auquel cas sa somme vaut $1/(1-z)$.
2. $\sum\limits_{n\geqslant 0} (\cosh n) z^{2n}$, série entière associée à la suite (a_n) définie par $\forall p \in \mathbb{N}\ a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \cosh p$.
3. $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^{n!}$ série entière associée à la suite (a_n) telle que $a_n = 1$ si il existe un entier p tel que $n = p!$ et $a_n = 0$ sinon.

4.1.2 Rayon de convergence

THEOREME 4.1.1 (Lemme d'Abel)
Soit (a_n) une suite de nombre complexes et $z_0 \in \mathbb{C}$. Si la suite $(a_n z_0^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$.

preuve
Il n'y a rien à montrer si $z_0 = 0$; supposons donc $z_0 \neq 0$. Soit M tel que $\forall n,\ |a_n z_0^n| \leqslant M$. Pour tout n et tout $|z| < |z_0|$ on a

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

L'expression de droite est le terme général d'une série géométrique de raison inférieure strictement à 1, donc convergente. D'où la conclusion (théorème de comparaison des séries à termes positifs).

THEOREME 4.1.2
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Les sous ensembles suivants de $\mathbb{R}_+$

1. $E_1 = \{r \in \mathbb{R}_+ \ ;$ *la suite* $(a_n r^n)$ *est bornée*$\}$

2. $E_2 = \{r \in \mathbb{R}_+ \ ; \ \textit{la suite } (a_n r^n) \textit{ tend vers 0}\}$
3. $E_3 = \{r \in \mathbb{R}_+ \ ; \ \textit{la série } \sum a_n r^n \textit{ converge}\}$
4. $E_4 = \{r \in \mathbb{R}_+ \ ; \ \textit{la série } \sum a_n r^n \textit{ est absolument convergente}\}$

sont des intervalles qui ont la même borne supérieure R dans $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$.

DEFINITION 4.1.2
Cette borne supérieure commune est appelée rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$. Le disque ouvert de centre 0 de rayon R s'appelle le disque de convergence.

preuve
Ces ensembles sont non vides et contenus dans $\overline{\mathbb{R}}$ donc ont tous une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$. On a $E_4 \subset E_3 \subset E_2 \subset E_1$ donc $0 \leqslant \sup E_4 \leqslant \sup E_3 \leqslant \sup E_2 \leqslant \sup E_1$. Pour montrer l'égalité, il suffit de prouver que $\sup E_1 \leqslant \sup E_4$. C'est trivial si $\sup E_1 = 0$; dans le cas contraire, soit $b > 0$ tel que $b < \sup E_1$; b n'est pas un majorant de E_1, donc il existe $r_0 \in E_1$ tel que $b < r_0$; par hypothèse la suite $(|a_n| r_0^n)$ est bornée, donc d'après le lemme d'Abel, la série entière est absolument convergente en tout $r \in [0, r_0[$. On a donc montré que $b < \sup E_1 \Rightarrow [0, b] \in E_4$; on en déduit $\sup E_1 \leqslant \sup E_4$ d'où l'égalité des bornes supérieures.
Soit R la valeur commune ce ces bornes. La démonstration précédente montre que $[0, R[\subset E_4 \subset E_3 \subset E_2 \subset E_1 \subset [0, R]$. Les quatre ensembles sont donc des intervalles fermés à gauche en 0, d'extrémité droite R. La série entière est donc absolument convergente en tout point du disque de convergence ; si on se limite à une variable réelle, elle est absolument convergente en tout point de l'intervalle $]-R, R[$.

COROLLAIRE 4.1.1
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R

1. *Si $R = 0$ la série diverge en tout $z \neq 0$.*
2. *Si $R = \infty$ la série est absolument convergente dans $\mathbb{C}$ tout entier.*
3. *Si $0 < R < \infty$*
   - *Si $|z| < R$ la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.*
   - *Si $|z| > R$ la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement (i.e. son terme général ne tend pas vers 0).*

Dans le dernier cas, si $|z| = R$ le comportement de la série $\sum a_n z^n$ dépend du cas considéré comme on le verra ci dessous.

4.1.3 Détermination pratique du rayon de convergence

Les méthodes les plus efficaces pour déterminer le rayon de convergence R d'une série enttière $\sum a_n z^n$ reposent sur la définition (théorème 4.1.2) et ses conséquences (corollaire 4.1.1). Il est important de noter que pour déterminer R il suffit de déterminer pour quelles valeurs de $r > 0$ la suite positive $u_n = |a_n| r^n$ est majorée. C'est donc une question qui fait intervenir essentiellement des **suites positives**.

1. Si $\rho > 0$ est tel que la suite $(a_n r^n)$ est bornée pour $r < \rho$ et non bornée pour $r > \rho$ alors $R = \rho$.
   Si pour tout r la suite $(a_n r^n)$ est bornée $R = \infty$.
2. Si $\rho > 0$ est tel que $\sum a_n r^n$ converge pour $r < \rho$ et diverge pour $r > \rho$ alors $R = \rho$.
3. Si (a_n) et (b_n) sont deux suites complexes telles que $a_n \underset{n \to \infty}{\sim} b_n$, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

   Car les deux suites $a_n r^n$ et $b_n r^n$ sont équivalentes donc sont simultanément bornées ou non bornées.
4. Règle de d'Alembert
   Supposons qu'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0, \ a_n \neq 0$ et que la suite $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ ait une limite λ dans $\overline{\mathbb{R}}$; alors le

rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est $R = 1/\lambda$ (où par convention $1/0 = \infty$ et $1/\infty = 0$).

En effet, posons pour $n > n_0,\ u_n = |a_n| r^n$. Alors la série $\sum u_n$ est à termes positifs et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to r\lambda$ donc $\sum u_n$ converge pour $r\lambda < 1$ et diverge pour $r\lambda > 1$. D'où la conclusion.■

5. Règle de Cauchy
Si la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$ a une limite μ dans $\overline{\mathbb{R}}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R = 1/\mu$.

En effet, $\sqrt[n]{|a_n| r^n} \to r\mu$ et on conclut comme pour la règle de d'Alembert.

Attention! Ces deux règles sont des conditions suffisantes pour que le rayon de convergence de la série donnée soit R ; **elles ne sont en aucun cas des conditions nécessaires**. Autrement dit si on sait que la rayon de convergence la série entière $\sum a_n z^n$ vaut R, on ne peut en aucun cas en déduire que la suite $|a_{n+1}|/|a_n|$ converge vers $1/R$. Car même si les a_n sont non nuls à partir d'un certain rang, la suite $|a_{n+1}|/|a_n|$ peut ne pas avoir de limite (voir les exemples ci dessous).

4.1.4 Exemples

1. La série $\sum z^n$ est une série géométrique de raison z. Elle converge si $|z| < 1$ et diverge si $|z| \geqslant 1$; le rayon de convergence est 1 et la série diverge en tout point du cercle de centre 0 de rayon $R = 1$.

2. La série entière $\sum z^n/n^2$ a elle aussi un rayon de convergence égal à 1 ; celà se voit par exemple avec la règle de d'Alembert ou en constatant que la série de terme général r^n/n^2 converge si $r \leqslant 1$ (car elle est majorée par la série de Riemann de terme général $1/n^2$) et que la suite r^n/n^2 tend vers l'infini si $r > 1$. Cette série est absolument convergente en tout point du cercle de centre 0 de rayon $R = 1$.

3. La série entière $\sum z^n/n$ a un rayon de convergence égal à 1 (règle de d'Alemebrt) ; elle est divergente pour $z = 1$ et semi-convergente en tous les autres points du cercle de centre 0 de rayon $R = 1$. (exemple 1.3.1).

4. Déterminons maintenant le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} (\cosh n) z^{2n}$. La suite (a_n) associée est définie par $\forall p \in \mathbb{N}\ a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \cosh p$. On ne peut donc pas appliquer la règle de d'Alembert. Posons, pour $r > 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N},\ u_p = (\cosh p)\, r^{2p}$; on a $u_p \underset{p\to\infty}{\sim} e^p r^{2p}/2$; donc la série de terme général u_p converge ssi $er^2 < 1$; le rayon de convergence de la série entière proposée est donc $R = 1/\sqrt{e}$.

5. Considérons la série $\sum n! z^{2^n}$. La encore, il y a une infinité d'indices n pour lesquels $a_n = 0$. On procède comme ci dessus: pour $r > 0$ on pose $u_n = n! r^{2^n}$. Il vient
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1) r^{2^{n+1} - 2^n} = (n+1) r^{2^n}$$
quantité qui tend vers 0 si $r < 1$ et vers l'infini si $r > 1$; donc $R = 1$.

6. Soit la suite (a_n) définie par $\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p} = 2^p$ et $a_{2p+1} = 3^p$. Là encore, on ne peut pas apliquer la régle de d'Alembert car la suite $|a_{n+1}|/|a_n|$ n'a pas de limite. Considérons donc la suite $u_n = a_n r^n$; on a $u_{2p} = (2r^2)^p$ et $u_{2p+1} = r(3r^2)^p$. On voit immédiatement que cette suite est bornée si et seulement si $2r^2 < 1$ et $3r^2 < 1$, ce qui se réduit à $r < 1/\sqrt{3}$. On a donc $R = 1/\sqrt{3}$.

4.1.5 Opérations

THEOREME 4.1.3
Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum a'_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R'. Le rayon de convergence R'' de la série entière $\sum (a_n + a'_n) z^n$ est supérieur ou égal à $\min(R, R')$. Si $R \neq R'$, on a $R'' = \min(R, R')$. Enfin, pour $|z| < \min(R, R')$, on a
$$\sum_{n \geqslant 0} (a_n + a'_n) z^n = \left(\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n \right) + \left(\sum_{n \geqslant 0} a'_n z^n \right)$$

preuve
Si $r < \min(R, R')$, les deux suites $(a_n r^n)$ et $(a'_n r^n)$ sont bornées ; il en est donc de même de la suite $(a_n + a'_n) r^n$; donc $R'' \geqslant \min(R, R')$.

Supposons maintenant par exemple que $R < R'$; soit r tel que $R < r < R'$; la suite $a'_n r^n$ est bornée et la suite $a_n r^n$ ne l'est pas, donc la suite $(a_n + a'_n)r^n$ est non bornée ; on en déduit $R'' \leqslant r$. Ceci est vrai pour tout $r \in]R, R'[$ donc $R'' \leqslant R$. L'égalité en résulte.
L'égalité finale est triviale puisque pour $|z| < \min(R, R')$ les trois séries $\sum a_n z^n$, $\sum a'_n z^n$ et $\sum (a_n + a'_n) z^n$ convergent.

Il est évident que si $\lambda \neq 0$ les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum \lambda_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Etant données deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum a'_n z^n$ on définit leur produit de Cauchy comme la série entière de terme général $c_n z^n$ où

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p a'_q = a_n a'_0 + a_{n-1} a'_1 + \cdots + a_1 a'_{n-1} + a_0 a'_n$$

THEOREME 4.1.4
Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum a'_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectifs R et R'. Le rayon de convergence R'' de leur produit de Cauchy est supérieur ou égal à $\min(R, R')$, et pour $|z| < \min(R, R')$, on a

$$\sum_{n \geqslant 0} c_n z^n = \left(\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n \right) \left(\sum_{n \geqslant 0} a'_n z^n \right)$$

preuve
Pour $|z| < \min(R, R')$, les séries de terme général $(a_n z^n)$ et $(b_n z^n)$ sont absolument convergentes. Le produit de Cauchy de ces deux séries est la série de terme général $\sum\limits_{p+q=n} a_p z^p b_q z^q = c_n z^n$. Du théorème 1.4.1 on déduit que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} c_n z^n$ est absolument convergente pour $|z| < \min(R, R')$, et que dans ce domaine sa somme est le produit des sommes des séries $\Sigma a_n z^n$ et $\Sigma b_n z^n$. Son rayon de convergence vérifie donc $R'' \geqslant \min(R, R')$.■

Attention! Même si $R \neq R'$ on n'a pas en général $R'' = \min(R, R')$.
Par exemple soit $\forall n \ a_n = 1$ et $a'_0 = 1, \ a'_1 = -1,$ et $\forall n \geqslant 2 \ a'_n = 0$. La série $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence R égal à 1 et sa somme est, pour $|z| < 1$ égale à $1/(1-z)$. La série $\sum a'_n z^n$ a un rayon de convergence infini et une somme égale à $1 - z$; la série produit est donnée par $c_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1, \ c_n = 0$. Son rayon de convergence est infini.

DEFINITION 4.1.3
Soit $S = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière ; on appelle série dérivée de S la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} (n+1) a_{n+1} z^n$.
Autrement dit c'est la série associée à la suite (b_n) définie par $\forall n \geqslant 0 \ b_n = (n+1) a_{n+1}$
Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on appelle série entière dérivée k fois de S la série de terme général $(n+k)(n+k-1) \cdots (n+1) a_{n+k} z^n$.

THEOREME 4.1.5
Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.

COROLLAIRE 4.1.2
Une série entière et sa série dérivée k fois ont même rayon de convergence.

preuve
Soit R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ et R' celui de la série $\sum b_n z^n$ où $b_n = (n+1) a_{n+1}$.

- Montrons que $R' \leqslant R$
  Il n'y a rien à montrer si $R' = 0$; si $R' > 0$ soit r tel que $0 < r < R'$. La suite $(|b_n| r^n)$ est majorée par un réel M. On a, pour tout $n \geqslant 1$
  $$|a_n| r^n = \frac{r}{n} |b_{n-1}| r^{n-1} \leqslant rM$$
  donc la suite $(|a_n| r^n)$ est majorée et par conséquent $r \leqslant R$; ceci ayant lieu pour tout $r < R'$ on en déduit $R' \leqslant R$.
- Montrons que $R \leqslant R'$
  Il n'y a rien à montrer si $R = 0$. Supposons $R > 0$. Soit r tel que $0 < r < R$; choisissons r' tel que $r < r' < R$. La suite $(|a_n| r'^n)$ est majorée par un réel $K > 0$. On a
  $$|b_n| r^n = (n+1) |a_{n+1}| r^n = \frac{n+1}{r} \left(\frac{r}{r'} \right)^{n+1} |a_{n+1}| r'^{n+1} \leqslant \frac{K}{r} (n+1) \left(\frac{r}{r'} \right)^{n+1}$$
  Comme $r < r'$ la suite figurant dans le membre de droite de l'inégalité ci dessus converge vers 0 ; il en est donc de même de $(b_n r^n)$; on en déduit $r < R'$; ceci ayant lieu pour tout $r < R$ on en déduit $R \leqslant R'$.

4.1.6 Théorème fondamental

THEOREME 4.1.6
*Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence non nul. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est normalement convergente sur tout disque fermé de rayon r **strictement inférieur** à R*

preuve
Soit donc r tel que $0 < r < R \leqslant \infty$. Soit ρ tel que $r < \rho < R$; la suite $(|a_n|\rho^n)$ est majorée par un réel positif M. On a alors pour tout $n \geqslant 1$ et tout z tel que $|z| \leqslant r$,

$$|a_n z^n| = |a_n \rho^n| \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \leqslant M \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$

qui est le terme général d'une série numérique convergente.■

Attention! La convergence n'est en général pas uniforme dans le disque ouvert de convergence comme le montre l'exemple de la série géométrique $\sum z^n$. Son reste d'ordre n est en effet égal à $R_n(z) = z^{n+1}/(1-z)$ et $\sup\limits_{|z|<1} |R_n(z)| = +\infty$ ne tend pas vers 0.

Exercice Déterminer toutes les séries entières $\sum a_n z^n$ qui convergent uniformément dans $\mathbb{C}$ tout entier.

4.2 Propriétés de la somme

Dans toute cette partie on se donne une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$. La série converge dans le disque ouvert $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| < R\}$ (si $R = \infty$, $D(0, R) = \mathbb{C}$) ; sur ce disque on peut donc définir la somme f de la série : $f(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

THEOREME 4.2.1
La fonction f est continue sur $D(0, R)$.

C'est une conséquence immédiate du théorème fondamental.

On se limite maintenant au cas où la variable est réelle.

THEOREME 4.2.2
Soit $S :]-R, R[\to \mathbb{C}$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$: $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

1. *S est de classe C^∞ sur $]-R, R[$, et dérivable terme à terme. Autrement dit, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-R, R[$ on a :*

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)a_{n+k}x^n$$

2. *En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

3. *Intégration terme à terme :*

$$\forall x \in]-R, R[, \ \int_0^x S(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

4. *Pour tout n, S admet en 0 un dévelopement limité à l'ordre n donné par*

$$S(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k + o(x^n)$$

preuve
La série donnée et sa série dérivée terme à terme ont le même rayon de convergence R. Le fait que S soit de classe C^1 se déduit alors du théorème fondamental appliqué à la série dérivée. En effet, soit r tel que $0 < r < R$. Posons pour tout n, $u_n(x) = a_n x^n$. La série $\sum u_n(x)$ converge simplement en 0 ; chaque fonction u_n est de classe C^1 sur $]-R, R[$ et la série dérivée converge normalement donc uniformément sur tout compact $[-r, r]$ de $]-R, R[$. Il en résulte que S est de classe C^1 sur $]-R, R[$ et que sur cet intervalle $S'(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} u'_n(x)$. Une récurrence facile donne ensuite le caractère C^∞ de S.

Les points (2) et (4) résultent de (1) et le point (3) de la convergence uniforme de la série sur l'intervalle fermé d'extrémités 0 et x.■

4.3 Fonctions développables en série entière

4.3.1 Définitions

DEFINITION 4.3.1
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f : I \to \mathbb{C}$ une application . On dit que f est développable en série entière en 0 (on notera DSE$_0$) si il existe une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et un réel $r > 0$ tels que

$$\forall x \in I\cap]-r, r[\ \ f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$$

La série entière $\sum a_n x^n$ a alors nécessairement un rayon de convergence $R \geqslant r$. Pour que f soit développable en série entière au vosinage de 0 il est nécessaire qu'elle soit de classe C^∞ dans un voisinage de 0 (théorème 4.2.2). On a alors nécessairement $a_n = f^{(n)}(0)/n!$. La suite (a_n) est donc uniquement déterminée par f et la série entière associée est la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

dite série de Taylor de f.

Attention! On vient de voir qu'une condition nécessaire pour qu'une fonction définie au voisinage de 0 soit DSE$_0$ est qu'elle soit de classe C^∞ dans un voisinage de 0. Cette condition n'est pas suffisante. Il y a deux raisons possibles pour qu'une fonction f, C^∞ au voisinage de 0 ne soit pas DSE$_0$.

1. La série de Taylor de f peut avor un rayon de convergence nul.
   Soit $f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-n+n^2 ix}$. Vérifier
   (a) f est de classe C^∞ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
   $$f^{(p)}(x) = \sum_{n\geqslant 0} (n^2 i)^p e^{-n+in^2 x}$$
   (b) Pour tout entier naturel p,
   $$\left|\frac{f^{(p)}(0)}{p!}\right| \geqslant b_p := \frac{n^{2p} e^{-p}}{p!}$$
   En déduire que le rayon de convergence de la série de Taylor de f est nul.
2. La série de Taylor de f peut avoir un rayon de convergence $R > 0$ mais sa somme S n'est pas égale à f dans aucun voisinage de 0.
   ♠ Exemple: on considère la fonction f définie par $f(x) = \exp(-1/x^2)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Cette fonction est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout entier n, on a $f^{(n)}(0) = 0$ donc la série de Taylor a un rayon de convergence infini et sa somme est la fonction nulle.

DEFINITION 4.3.2
Soit I in intervalle de $\mathbb{R}$ contenant x_0 et $f : I \to \mathbb{C}$ une application . On dit que f est développable en série entière en x_0 si il existe une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et un réel $r > 0$ tels que

$$\forall x \in I\cap]x_0 - r, x_0 r[\ \ f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n (x - x_0)^n$$

Celà revient à dire que la fonction $g(x) = f(x + x_0)$ est DSE$_0$.

4.3.2 Opérations

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition et des résultats précédents.

1. La somme, le produit de deux fonctions DSE_{x_0} est une fonction DSE_{x_0}.
2. Si f est DSE_{x_0}, f est C^∞ dans un voisinage de x_0 et ses dérivées successives sont DSE_{x_0} ; le développement en série entière de f' s'obtient en dérivant terme à terme celui de f.
3. Si f est DSE_{x_0}, il en est de même de toute primitive F de f. Le développement en série entière de F s'obtient, **à une constante près**, en intégrant terme à terme celui de f.

THEOREME 4.3.1 (Développement en série entière des fractions rationelles)
Soit $F(z)$ une fraction rationelle dont 0 n'est pas un pôle.

1. *F est DSE_0.*
2. *Le rayon de convergence de la série de Taylor de F est $R = \min\{|\alpha| \,;\, \alpha$ pôle de $F\}$.*
3. *F est égale à la somme de sa série de Taylor dans le disque de centre 0 de rayon R.*

preuve
Soient P l'ensemble des pôles de F et $\rho = \min\{|\alpha| \,;\, \alpha \in P\}$. La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ de F s'écrit

$$F(z) = E(z) + \sum_{\alpha\in P} R_\alpha(z)$$

où E est un polynôme et R_α la partie polaire relative au pôle α:

$$R_\alpha(z) = \sum_{p=1}^{p=k_\alpha} \frac{a_{p,\alpha}}{(z-\alpha)^p}$$

Pour $\alpha \neq 0$, on a

$$\frac{1}{z-\alpha} = -\frac{1}{\alpha}\frac{1}{1-\frac{z}{\alpha}} = -\frac{1}{\alpha}\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{z}{\alpha}\right)^n \text{ pour } |z| < |\alpha|$$

le rayon de convergence de la série géométrique ainsi obtenue étant égal à $|\alpha|$. On en déduit (produit de séries entières) que pour tout entier $p \geqslant 1$ la fraction $1/(z-\alpha)^p$ est développable en série entière dans le disque de rayon $|\alpha|$.
On obtient donc que F est DSE_0, que la série entière associée $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R \geqslant \rho$ et que pour $|z| < \rho$, $F(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. Pour achever la preuve du théorème il reste à montrer que $R = \rho$. Supposons $R > \rho$; par définition il existe un pôle α_0 de F tel que $|\alpha_0| = \rho$. Soit $D = D(0,\rho)$. Pour $z \in D$ on a $F(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. Lorsque z tend vers α_0 dans D, le premier membre de cette égalité a un module qui tend vers l'infini puisque α_0 est un pôle de F ; le second membre a une limite finie puisque la somme de la série entière est continue dans le disque de convergence $D(0,R)$ et qu'on a supposé $R > \rho$. L'hypothèse $R > \rho$ conduit à une contradiction. Donc $R \leqslant \rho$ ce qui achève la preuve.

4.3.3 Méthodes de développements et développements usuels

1. La fonction exponentielle, les fonctions trigonométriques et hyperboliques usuelles sont DSE_0. Voir le chapitre consacré à l'exponentielle complexe.
2. Développements déduits de la série géométrique.
   On a pour $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

- Par intégration on en déduit, pour $|x| < 1$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n} \qquad R = 1$$

$$\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \qquad R = 1$$

- En remplaçant x par x^2 on a, pour $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$$

d'où en intégrant

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad R = 1$$

$$\operatorname{arg\,tanh} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad R = 1$$

qui peut se retrouver en utilisant $\operatorname{arg\,tanh} x = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right)$.

3. Enfin, par dérivation successives du développement de $\frac{1}{1-x}$ on déduit, pour p entier, $p \geqslant 1$,

$$\frac{1}{(1-x)^p} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{-p}{n}(-x)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{n+p-1}{n}x^n$$

où on pose, pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

THEOREME 4.3.2
Soit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$; on a, pour $|x| < 1$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

le rayon de convergence de la série entière ci dessus étant égal à 1.

Si α est un entier négatif, on retrouve le résultat précédent.
preuve
Posons $f(x) = (1+x)^\alpha$; on va utiliser la méthode de l'équation différentielle.

- f est l'unique solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle $(1+x)y' = \alpha y$ avec la condition initiale $f(0) = 1$. Le fait que f vérifie cette équation différentielle est immédiat ; l'unicité résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles linéaires. On peut le voir directement comme suit : soit g une autre solution de cette équation vérifiant $g(0) = 1$; la fonction h définie par $h(x) = (1+x)^{-\alpha}g(x)$ est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et vérifie $h'(x) = 0$ pour tout x. Elle est donc constante égale à $h(0) = 1$ d'où $g = f$.

- Supposons f DSE$_0$; soit $f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ son développement dans un intervalle $]-r,r[$ avec $r \leqslant 1$. Dans cet intervalle on a alors

$$\begin{aligned}
(1+x)f'(x) - \alpha f(x) &= (1+x)\sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}x^n - \alpha\sum_{n\geqslant 0}a_n x^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0}\left[(n+1)a_{n+1} - \alpha a_n\right]x^n + \sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} \\
&= \sum_{n\geqslant 0}\left[(n+1)a_{n+1} - (\alpha-n)a_n\right]x^n
\end{aligned}$$

Puisque f vérifie l'équation différentielle on doit avoir (par unicité du développement en série entière de la fonction nulle)

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (n+1)a_{n+1} = (\alpha-n)a_n \qquad (R)$$

Comme $f(0) = 1$ on a nécessairement $a_0 = 1$.

- Les relations (R) définissent une unique suite (a_n) ; puisque α n'est pas un entier naturel, une récurrence immédiate montre que $a_n \neq 0$ pour tout n ; de (R) on déduit

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|n-\alpha|}{n+1} \to 1$$

la série entière $\sum a_n x^n$ a donc un rayon de convergence égal à 1. Une récurrence immédiate donne

$$\forall n \geqslant 1 \;\; a_n = \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

- Soit $g(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$; il est immédiat que $g(0) = 1$ et vu les relations (R) que g est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle $(1+x)y' = \alpha y$. Donc d'après le début $g = f$ ce qui achève la preuve.

Applications
On prend $\alpha = -1/2$, on remplace dans les développements x par $\pm x^2$ et on intègre. On obtient :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n} x^n$$

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n} x^{2n}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n} x^{2n}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n} x^{2n+1}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \arg\sinh x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n} x^{2n+1}$$

4.4 Complément

DEFINITION 4.4.1
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application. On dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 \in \Omega$ si la fonction de la variable complexe z, $T(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, définie sur $\Omega \setminus \{z_0\}$ admet une limite quand $z \to z_0$. Cette limite s'appelle nombre dérivé de f en z_0. On dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable dans Ω si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en chaque point de Ω ; dans ce cas on définit comme d'habitude la fonction dérivée.

On vérifie par exemple que l'application $z \to z^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ est $\mathbb{C}$-dérivable de dérivée $z \to nz^{n-1}$ si $n \geqslant 1$ et 0 si $n = 0$. Par contre le lecteur vérifiera que la fonction $z \to \overline{z}$ n'est nulle part $\mathbb{C}$-dérivable.

THEOREME 4.4.1
Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$; f est $\mathbb{C}$-dérivable dans le disque ouvert de convergence et sa dérivée est la somme de la série dérivée de la série entière définisant f.

preuve
Soient $f(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$, $z \in D(0,R)$ et r tel que $|z| < r < R$. Soit enfin $\rho = r - |z|$. Pour $|h| < \rho$ on a $|z+h| < r < R$. Il s'agit de montrer que

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n \right) = 0$$

On a

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z,h)$$

avec
$$u_n(z,h)=\frac{a_n}{h}\left[(z+h)^n-z^n\right]-na_nz^{n-1}=a_n\left[(z+h)^{n-1}+\cdots+(z+h)z^{n-2}-(n-1)z^{n-1}\right]$$

Pour tout $|h|<\rho$ on a $|u_n(z,h)|\leqslant 2|a_n|(n-1)r^{n-1}$; le membre de droite est le terme général d'une série numérique convergente (car le rayon de convergence de la série $\sum(n-1)a_nz^n$ est R et $r<R$). Donc la série de fonctions de la variable h, $\sum u_n(z,h)$ est normalement, donc uniformément convergente dans le disque $\{h\ ;\ |h|<\rho\}$. On peut donc échanger somme et limite :

$$\lim_{h\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z,h)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{h\to 0}u_n(z,h)=0\ \blacksquare$$

5

Exponentielle. Fonctions circulaires réelles

5.1 Premières propriétés

DEFINITION 5.1.1
Le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n(z) = z^n/n!$ *est infini (règle de D'Alembert). On appelle fonction exponentielle l'application* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *définie par*

$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

THEOREME 5.1.1

$$\forall\, z, z' \in \mathbb{C},\ \exp(z + z') = \exp(z) \cdot \exp(z')$$

preuve

$$\sum_{p+q=n} \frac{z^p}{p!} \frac{z'^q}{q!} = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p z^p z'^{n-p} = \frac{(z+z')^n}{n!}$$

et le résultat découle du théorème sur le produit de Cauchy de deux séries entières.

COROLLAIRE 5.1.1
$z \to \exp(z)$ *est un homomorphisme du groupe additif* $(\mathbb{C}, +)$ *dans le groupe multiplicatif* $(\mathbb{C}^*, \times)$.

En particulier, on notera que $\exp(0) = 1$, que $\forall\, z \in \mathbb{C}\ \exp(z)\exp(-z) = 1$ et donc que $\exp(z) \neq 0$.

THEOREME 5.1.2
Pour tout $z \in \mathbb{C}$*, l'application* $e_z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *définie par* $e_z(t) = \exp(tz)$ *est dérivable de dérivée* $e_z'(t) = z\exp(tz)$.

preuve
Pour z fixé, $e_z(t)$ est la somme de la série entière de terme général $(z^n/n!)t^n$. Cette série converge pour tout t ; son rayon de convergence est infini ; d'après les thérorèmes généraux sur les séries entières, e_z est de classe C^∞ et

$$e_z'(t) = \sum_{n \geqslant 0} (n+1) \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} t^n = z \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!} t^n = z e_z(t)$$

5.2 Exponentielle réelle

On fait fréquemment la construction dans l'ordre suivant: on définit la fonction logarithme (néperien) comme l'unique primitive nulle en 1 de $x \to 1/x$ (on a vu dans le cours sur l'intégration que toute fonction continue sur un intervalle avait des primitives), on montre que cette fonction est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, ce qui permet de définir l'exponentielle comme la fonction réciproque de $\ln$. On vérifie alors qu'elle est C^∞ et on montre, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange qu'elle est développable en série entière et que pour tout $x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum\limits_{n\geqslant 0} x^n/n!$.

Voici à titre d'exercice une autre manière de procéder : on définit l'exponentielle réelle comme étant la fonction $e_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to \exp(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} x^n/n!$. Il résulte du théorème 5.1.2 que cette fonction est dérivable (prendre $z = 1$) de dérivée $x \to \exp(x)$. On en déduit qu'elle est C^∞. Comme $\exp(x) = (\exp(x/2))^2$, on a $\exp(x) > 0$ pour tout x, donc la fonction e_1 est croissante. De $\exp(x) > 1 + x$ pour $x > 0$, on déduit $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = +\infty$; comme $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ on a $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$; e_1 est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme sa dérivée ne s'annule jamais, sa bijection réciproque est une fonction $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivable, vérifiant $L(1) = 0$ et pour tout $x > 0$, $L'(x) = 1/e_1'(L(x)) = 1/e_1(L(x)) = 1/x$. L est donc la primitive nulle en 1 de $x \to 1/x$ et $x \to \exp(x)$ sa fonction réciproque. On laisse le soin au lecteur de prouver les propriétés usuelles de ces fonctions (en particulier les théorèmes sur les croissances comparées avec les fonctions puissances). On définit enfin $e = \exp(1)$.

La restriction à $\mathbb{R}$ de la fonction $\exp$ est donc l'exponentielle usuelle.
On utilisera donc, y compris pour $z \in \mathbb{C}$, la notation $\exp(z) = e^z$.

5.3 Fonctions circulaires

DEFINITION 5.3.1
Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

On a donc

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z), \quad e^{-iz} = \cos(z) - i\sin(z), \quad e^z = \cosh(z) + \sinh(z), \quad e^{-z} = \cosh(z) - \sinh(z)$$

Ces fonctions sont donc toutes développables en série entière sur $\mathbb{C}$ avec un rayon de convergence infini :

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Par construction, on a les relations

$$\cos(z) = \cosh(iz), \quad \sin(z) = -i\sinh(iz), \quad \cosh(z) = \cos(iz), \quad \sinh(z) = -i\sin(iz)$$

Les fonctions cos, cosh sont paires et les fonctions sin, sinh sont impaires. Toutes les formules usuelles de trigonométrie et de trigonométrie hyperbolique sont valables. En particulier on a pour tout nombre complexe z $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ et $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$ (vérifications immédiates).

Attention! $\cos(z)$ n'est pas la partie réelle de e^{iz} !
Prouvons à titre d'exemple la relation $\forall\, a, b \in \mathbb{C}\ \cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$. On a

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \frac{1}{2}\left(e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{ia}e^{ib} + e^{-ia}e^{-ib}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b)) + (\cos(a) - i\sin(a))(\cos(b) - i\sin(b))\right) \\
&= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)
\end{aligned}$$

Attention! Les fonctions cos et sin ne sont pas bornées sur $\mathbb{C}$. On a par exemple $\cos(ix) = \cosh(x) > e^x/2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

5.4 Fonctions circulaires réelles

Dans tout ce paragraphe, x est une variable réelle. Les fonctions cos et sin sont donc définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Elles sont de classe C^∞, cos est paire, sin est impaire. La dérivée de cos est -sin, celle de sin est cos.

Lemme 5.4.1
a) $\cos(2) < 0$
b) $\forall\, x \in]0, 2[\ \ \sin(x) > 0$

preuve
a) $\cos(2) = 1 - 2 + 2/3 + s$ avec $s = \sum\limits_{n\geqslant 3} (-1)^n a_n$ et $a_n = 2^{2n}/(2n)!$. Or $a_{n+1}/a_n = 4/(2n+1)(2n+2) < 1$ pour $n \geqslant 3$, donc la série définissant s vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées ; en particulier, on en déduit que s est du signe du premier terme, c'est à dire négatif ; donc $\cos(2) < -1/3$.
b) Même méthode; on peut écrire par exemple $\sin(x) = x\left(\left(1 - \frac{x^2}{3!}\right) + \left(\frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!}\right) + \cdots\right) > 0$.

La fonction cos est donc continue et strictement décroissante sur $[0, 2]$, avec $\cos(0) = 1$ et $\cos(2) < 0$. Il existe donc un unique élément $t_0 \in]0, 2[$ tel que $\cos(t_0) = 0$.

DEFINITION 5.4.1
On note π le réel $\pi = 2t_0$ égal au double de la plus petite solution positive de l'équation $\cos(x) = 0$.

On a $\sin(\pi/2) > 0$ et $\sin^2(\pi/2) = 1$, donc $\sin(\pi/2) = 1$, soit $e^{i\pi/2} = i$, d'où $e^{i\pi} = -1$, $e^{3i\pi/2} = -i$ et $e^{2i\pi} = 1$. On en déduit les valeurs de sin et cos aux points $\pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$ et $\forall\, z \in \mathbb{C}\ e^{z+2i\pi} = e^z$; en particulier les fonctions sin et cos sont périodiques de période 2π.

THEOREME 5.4.1
L'application $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\psi(x) = e^{ix}$ est un homomorphisme surjectif de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

preuve
Posons $U_1 = \{z \in \mathbb{U} \mid \mathrm{Re}(z) \geqslant 0 \text{ et } \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}$. La restriction de la fonction cos à $I_1 = [0, \pi/2]$ est une bijection de I_1 sur $[0, 1]$. Montrons que la restriction ψ_1 de ψ à I_1 est une bijection de cet intervalle sur U_1 . D'après l'étude du signe de cos et sin, ψ_1 est à valeurs dans U_1 ; ψ_1 est injective car $\psi_1(t) = \psi_1(t') \Rightarrow \cos(t) = \cos(t') \Rightarrow t = t'$. Enfin, soit $z = a + ib \in U_1$. Il existe $t \in I_1$ tel que $\cos(t) = a$ car $0 \leqslant a \leqslant 1$. On a alors $\sin(t) \geqslant 0$ et $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t) = 1 - a^2 = b^2$ soit $\sin(t) = b$ i.e. $\psi(t) = a + ib$.

En utilisant la relation $\psi(x + \pi/2) = i\psi(x)$, on en déduit facilement que la restriction de ψ à $I_2 = [\pi/2, \pi]$ est une bijection de I_2 sur $U_2 = \{z \in \mathbb{U} \mid \mathrm{Re}(z) \leqslant 0 \text{ et } \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}$, puis que la restriction de ψ à $[0, \pi]$ est une bijection de cet intervalle sur $U_+ = \{z \in \mathbb{U} \mid \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}$ et enfin, en utilisant $\psi(x + \pi) = -\psi(x)$ que la restriction de ψ à $[\pi, 2\pi]$ est une bijection de cet intervalle sur $U_- = \{z \in \mathbb{U} \mid \mathrm{Im}(z) \leqslant 0\}$. On en déduit enfin que la restriction de ψ à $[0, 2\pi[$ est une bijection de cet intervalle sur $\mathbb{U}$. Il en résulte que ψ est surjectif.

Il est clair que $2\pi\mathbb{Z} \subset \ker(\psi)$. Réciproquement, soit $x \in \ker(\psi)$ et n la partie entière de $x/2\pi$. On a donc $x = 2n\pi + y$ avec $0 \leqslant y < 2\pi$. Comme $\psi(x) = 1$, on a $\psi(y) = \psi(x - 2n\pi) = \psi(x)/\psi(2n\pi) = 1$; mais ψ restreint à $[0, 2\pi[$ est injectif, donc $y = 0$, soit $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Par passage aux quotients on en déduit un isomorphisme $\Psi : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{U}$ du groupe quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sur le groupe $\mathbb{U}$: à un élément $\overline{x} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, on associe $\psi(x) = e^{ix}$ où x est un représentant quelconque de la classe $\overline{x}$.

DEFINITION 5.4.2
Soit $u \in \mathbb{U}$; on définit l'argument de u comme l'élément $\Psi^{-1}(u)$ de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; on désigne aussi sous ce nom un représentant quelconque de $\Psi^{-1}(u)$.

Cet isomorphisme Ψ est l'outil essentiel pour définir rigoureusement la mesure des angles.

THEOREME 5.4.2
L'application $z \to e^z$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ de noyau $2\pi i\mathbb{Z}$.

preuve
On sait déjà que l'exponentielle est un morphisme de groupes. Si $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a $e^z = e^x e^{iy}$, d'où $|e^z| = e^x$

(car $e^{iy} \in \mathbb{U}$). Il en résulte que $e^z = 1 \Rightarrow \begin{cases} e^x = 1 \\ e^{iy} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow z \in 2\pi i\mathbb{Z}$ d'où $\ker(\exp) \subset 2\pi i\mathbb{Z}$. L'inclusion dans l'autre sens est triviale. D'autre part, soit $Z = X + iY \in \mathbb{C}^*$. Posons $R = |Z| = \sqrt{X^2 + Y^2}$, $x = \ln(R)$ et $u = Z/R$. $u \in \mathbb{U}$ donc il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $e^{iy} = u$. Alors $z = x + iy$ vérifie $e^z = Z$, donc l'exponentielle est bien surjective sur $\mathbb{C}^*$.

5.5 Théorème de relèvement

THEOREME 5.5.1
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{U}$ de classe C^k avec $k \geqslant 1$. Soient $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) = e^{ix_0}$. Il existe une application $F : I \to \mathbb{R}$ de classe C^k et une seule vérifiant les deux propriétés suivantes:

$$\begin{cases} (1) \quad \forall t \in I,\ e^{iF(t)} = f(t) \\ (2) \quad F(t_0) = x_0 \end{cases}$$

preuve

1. Unicité
   Si F et G répondent à la question, la fonction $F - G$ vérifie $\forall\, t \in I,\ F(t) - G(t) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Mais $F - G$ est continue, donc $(F - G)(I)$ est un intervalle ; cet intervalle étant contenu dans $\mathbb{Z}$ est nécessairement réduit à un point. Donc $\forall\, t \in I,\ F(t) - G(t) = F(t_0) - G(t_0) = 0$ soit $F = G$.

2. Existence
   Si F de classe C^1 existe, la relation (1) implique en dérivant, $iF'(t)f(t) = f'(t)$ soit $F' = f'/if$. Posons donc

$$F(t) = x_0 + \frac{1}{i}\int_{t_0}^{t} \frac{f'(s)}{f(s)}\, ds$$

   - D'après les hypothèses, f'/f est continue sur I, donc F est bien définie sur I et de classe C^1 ; de plus $F' = f'/if$ et on voit que si f est de classe C^k, F' est C^{k-1} donc F est C^k.
   - $F(t_0) = x_0$.
   - Posons pour $t \in I$, $g(t) = f(t)e^{-iF(t)}$; g est dérivable sur I et $g'(t) = f'(t)e^{-iF(t)} - if(t)F'(t)e^{-iF(t)} = 0$, donc g est constante : pour tout t on a $g(t) = g(t_0) = 1$ soit $e^{iF(t)} = f(t)$. La preuve est complète.

Remarque
Si on suppose seulement f continue, il existe encore une fonction F continue satisfaisant à (1) et (2), mais la démonstration est nettement plus difficile.

Applications

Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel euclidien de dimension 2 orienté et E un espace affine d'espace directeur $\overrightarrow{E}$. Le choix d'une base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$ permet d'identifier $\overrightarrow{E}$ à $\mathbb{C}$. Soient d'autre part I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \to E$ un arc paramétré de classe C^k. $\|\ \|$ est la norme euclidienne.

1. Représentation polaire
   Supposons $k \geqslant 1$ et que γ ne s'annule pas, i.e. que la courbe paramétrée ne passe pas par l'origine. La fonction $t \to \gamma(t)/\|\gamma(t)\|$ est une fonction de classe C^k à valeurs dans $\mathbb{U}$. Il existe donc une fonction $\theta : I \to \mathbb{R}$ de classe C^k telle que $\gamma(t)/\|\gamma(t)\| = e^{i\theta(t)}$. On pose $\rho(t) = \|\gamma(t)\|$. Comme γ ne s'annnule pas, ρ est aussi de classe C^k. L'application $t \to (\rho(t), \theta(t))$ est une représentation polaire de l'arc considéré. On a alors $\gamma(t) = \rho(t)\left(\cos(\theta(t))\overrightarrow{I} + \sin(\theta(t))\overrightarrow{J}\right)$.

2. Supposons maintenant $k \geqslant 2$ et que γ est régulier (i.e. tel que $\forall\, t \in I,\ \overrightarrow{\gamma'(t)} \neq \overrightarrow{0}$). On peut définir le vecteur unitaire tangent

$$\overrightarrow{T} : I \to \mathbb{U} \quad \overrightarrow{T}(t) = \frac{\overrightarrow{\gamma'}(t)}{\left\|\overrightarrow{\gamma'}(t)\right\|}$$

D'après le théorème de relèvement, il existe une application de classe C^{k-1} (traditionnellement) notée $\varphi : I \to \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{T}(t) = e^{i\varphi(t)}$ ce qui s'écrit aussi $\overrightarrow{T}(t) = \cos(\varphi(t))\,\overrightarrow{I} + \sin(\varphi(t))\,\overrightarrow{J}$. Ce qui revient à dire que $\varphi(t)$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{T}(t)\right)$ dépendant de manière continûment différentiable du paramètre t. Notons que d'après le théorème de relèvement, si $\psi : I \to \mathbb{R}$ est une autre fonction C^1 telle que $\overrightarrow{T}(t) = e^{i\psi(t)}$, il existe un entier constant n tel que pour tout t de I, on ait $\psi(t) = \varphi(t) + 2n\pi$. Cette fonction φ joue un rôle essentiel dans l'étude des propriétés métriques (courbure, repère de Frenet) des courbes planes.

5.6 Exercices

1. On définit lorsque cela a un sens

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}, \quad \cot z = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}, \quad \tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} \text{ et } \coth z = \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)}$$

   Déterminer les domaines de définition (dans $\mathbb{C}$) de ces différentes fonctions.

2. Résoudre les équations
   $\cos(z) = i$ rep: $z_k = 3\pi/2 + 2k\pi - i\ln\left(\sqrt{2} - 1\right)$ et $w_k = \pi/2 + 2k\pi - i\ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$ (noter que $w_p = -z_{-p-1}$).
   $\sin(z) = 2$ rep: $z_k = \pi/2 + 2k\pi + i\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$ et $w_k = \pi/2 + 2k\pi + i\ln\left(2 - \sqrt{3}\right)$ (noter que $w_k = \pi - z_{-k}$).

3. Soit $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $T(z) = \cos(z)$. Pour λ (resp. μ) réel étudier l'image C_λ (resp. D_μ) par T de la droite d'équation $\mathrm{Re}(z) = \lambda$ (resp. $\mathrm{Im}(z) = \mu$).

4. Montrer que $\forall\, z \in \mathbb{C},\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$.
   Indication : Vérifier que pour tout k, $a_k := \frac{1}{k!} - C_n^k \frac{1}{n^k}$ est positif. On pose $S_n(z) = \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} z^k/k!$. Montrer que

$$\left| S_n(z) - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| \leqslant S_n(|z|) - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n$$

   Conclure.

5. Montrer que $\pi = 16\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$.

6

Intégrales dépendant d'un paramètre Cas d'un intervalle d'intégration compact

6.1 Introduction

Soient $I = [a, b]$ un intervalle compact, (X, d) un espace métrique et $f : X \times [a, b] \to \mathbb{C}$ une application. Si pour chaque $x \in X$ la fonction $f_x : t \to f(x, t)$ est continue sur $[a, b]$, on peut définir une fonction $F : X \to \mathbb{C}$ par $F(x) = \int_a^b f_x(t)\, dt = \int_a^b f(x, t)\, dt$. Le but de cette partie est d'étudier les propriétés de F.

Lemme 6.1.1
Soit (X, d) un espace métrique et $\varphi : X \times [a, b] \to \mathbb{C}$ continue. Soit $x_0 \in X$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\eta > 0$ tel que si $x \in X$ vérifie $d(x, x_0) < \eta$ on ait $|\varphi(x, t) - \varphi(x_0, t)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in [a, b]$.

preuve
Supposons le contraire ; il existe alors un $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$ il existe un $x \in X$ et un $t \in [a, b]$ vérifiant $d(x, x_0) < \eta$ et $|\varphi(x, t) - \varphi(x_0, t)| \geqslant \varepsilon_0$. En appliquant ceci à $\eta = 1/n$ pour n entier naturel quelconque ($n \geqslant 1$), on obtient une suite (x_n, t_n) de points de $X \times [a, b]$ vérifiant, pour tout $n \geqslant 1$, $d(x_n, x_0) \leqslant 1/n$ et $|\varphi(x_n, t_n) - \varphi(x_0, t_n)| \geqslant \varepsilon_0$. $[a, b]$ étant compact, on peut extraire de la suite (t_n) une suite (t_{n_k}) qui converge vers un point $s \in [a, b]$. La suite (x_n) converge vers x_0 donc la suite extraite (x_{n_k}) aussi. Par conséquent, les deux suites (x_{n_k}, t_{n_k}) et (x_0, t_{n_k}) convergent vers (x_0, s) dans $X \times [a, b]$. La fonction φ est continue en ce point, donc $\varphi(x_{n_k}, t_{n_k})$ et $\varphi(x_0, t_{n_k})$ convergent vers $\varphi(x_0, s)$ ce qui est contradictoire avec $\forall k \;\; |\varphi(x_{n_k}, t_{n_k}) - \varphi(x_0, t_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0$.■

Ce résultat reste valable pour une fonction φ à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.

6.2 Continuité

THEOREME 6.2.1
Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \times [a, b] \to \mathbb{C}$ continue. L'application $F : x \to \int_a^b f(x, t)\, dt$ est continue sur X.

preuve
Pour tout x la fonction partielle $t \to f(x, t)$ est continue sur $[a, b]$ donc intégrable ; F est bien définie.
Soit $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$; le lemme 6.1.1 appliqué à f et au réel positif $\varepsilon/(b-a)$ fournit un $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in X$ vérifiant $d(x, x_0) < \eta$ on ait pour tout t $|f(x, t) - f(x_0, t)| \leqslant \varepsilon_0/(b-a)$. On en déduit $|F(x) - F(x_0)| \leqslant \int_a^b |f(x, t) - f(x_0, t)|\, dt \leqslant \varepsilon$ pour tout x vérifiant $d(x, x_0) < \eta$. ■

6.3 Dérivabilité

THEOREME 6.3.1 (Dérivation sous le signe somme)
Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : J \times [a,b] \to \mathbb{C}$ une application vérifiant les propriétés suivantes :

1) *Pour tout $x \in J$ l'application $t \to f(x,t)$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ est continue.*
2) *L'application f admet en tout point $(x,t) \in J \times [a,b]$ une dérivée partielle par rapport à la première variable.*
3) *L'application $\frac{\partial f}{\partial x} : J \times [a,b] \to \mathbb{C}$ est continue.*

Alors la fonction $F : x \to \int_a^b f(x,t)\,dt$ est de classe C^1 sur J et, pour tout $x \in J$ on a

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

preuve

- La propriété 1) garantit l'existence de la fonction F.
- Posons $g(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$. D'après le théorème précédent, g est continue sur J. Le résultat sera donc établi si on prouve que F est dérivable en tout point $x \in J$ et que $F'(x) = g(x)$.
- On a, pour $x \in J$ et h tel que $x+h \in J$

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - g(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_a^b \left(f(x+h,t) - f(x,t) - h\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right)\,dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|h|}\int_a^b \left|f(x+h,t) - f(x,t) - h\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\,dt \end{aligned}$$

  Posons, pour x,t fixés et u entre 0 et h, $\theta_t(u) = f(x+u,t) - f(x,t) - u\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$. L'hypothèse 3) garantit que θ_t est de classe C^1 et on a $\theta_t'(u) = \frac{\partial f}{\partial x}(x+u,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.
  Soit $\varepsilon > 0$. D'après le lemme 6.1.1 appliqué la fonction continue $\partial f/\partial x$, on dispose d'un $\eta > 0$ (dépendant de x) tel que, $|u| < \eta \Rightarrow |\theta_t'(u)| \leqslant \varepsilon/(b-a)$ pour tout $t \in [a,b]$. Alors, pour h tel que $|h| < \eta$ et $x+h \in J$ on a d'après l'inégalité des accroissements finis $|\theta_t(h)| \leqslant |h|\varepsilon/(b-a)$. On en déduit que, pour $|h| < \eta$ et $x+h \in J$ on a

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - g(x)\right| \leqslant \frac{1}{|h|}\int_a^b |\theta_t(u)|\,dt \leqslant \varepsilon$$

  ce qui prouve que F est dérivable en x et que $F'(x) = g(x)$.■

Attention! L'hypothèse que la dérivée partielle est globalement continue (c'est à dire continue comme fonction de la variable (x,t) apartenant à l'espace produit $J \times I$ est essentielle.

6.4 Théorème de Fubini

THEOREME 6.4.1
Soient $a < b,\ \alpha < \beta$ des réels et $f : [\alpha,\beta] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ une application continue. Alors

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\,dt\right)\,dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx\right)\,dt$$

première preuve
Observons d'abord que d'après le théorème 6.2.1, les aplications $x \to \int_a^b f(x,t)\,dt$ et $t \to \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx$ sont continues respectivement sur $[\alpha,\beta]$ et $[a,b]$, donc intégrables sur ces deux intervalles. Les deux membres de l'égalité figurant dans l'énoncé ont un sens.
Posons alors :

$$H(x,t) = \int_\alpha^x f(u,t)\,du \quad \text{et pour } \; x \in [\alpha,\beta] \quad \Phi(x) = \int_a^b \left(\int_\alpha^x f(u,t)\,du \right)\,dt = \int_a^b H(x,t)\,dt$$

- Pour tout x fixé, $t \to H(x,t)$ est continue sur $[a,b]$ d'après le théorème 6.2.1.
- H admet en chaque point $x \in [\alpha,\beta]$ une dérivée partielle par raport à x et $\frac{\partial H}{\partial x}(x,t) = f(x,t)$. L'hypothèse garantit que cette dérivée est continue sur $[\alpha,\beta] \times [a,b]$.

D'après le théorème 6.3.1 Φ est de classe C^1 et $\Phi'(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$. On a donc $\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \int_\alpha^\beta \Phi'(x)\,dx$. Comme $\Phi(\alpha) = 0$, cette dernière égalité est le résultat cherché.■

deuxième preuve
Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue sur le compact $[\alpha,\beta] \times [a,b]$ donc uniformément continue. Il existe donc un $\eta > 0$ tel qu'on ait $|f(x,t) - f(x',t')| \leqslant \varepsilon$ pour tous $x, x' \in [\alpha,\beta]$, $t,t' \in [a,b]$ vérifiant $|x - x'| \leqslant \eta$ et $|t - t'| \leqslant \eta$. Choisissons alors un entier natutel n tel que $(b-a)/n < \eta$ et $(\beta - \alpha)/n < \eta$. Pour k, m entre 0 et $n-1$, posons $x_k = \alpha + k(\beta-\alpha)/n$ et $t_m = a + m(b-a)/n$. Soit enfin

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} (t_{m+1} - t_m)(x_{k+1} - x_k) f(x_k, t_m)$$

Il vient

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\,dt \right)\,dx - S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[\sum_{m=0}^{n-1} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \left(f(x,t) - f(x_k,t_m)\right)\,dt \right]\,dx \right)$$

On a, pour $x \in [x_k, x_{k+1}]$,

$$\left| \sum_{m=0}^{n-1} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \left(f(x,t) - f(x_k,t_m)\right)\,dt \right| \leqslant \sum_{m=0}^{n-1} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \varepsilon dt = \varepsilon(b-a)$$

d'où

$$\left| \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\,dt \right)\,dx - S_n \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (b-a)\varepsilon\,dx = \varepsilon(b-a)(\beta-\alpha)$$

Le même raisonnement vaut avec l'autre intégrale. On en déduit que, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\left| \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\,dt \right)\,dx - \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx \right)\,dt \right| \leqslant 2(b-a)(\beta-\alpha)\varepsilon$$

d'où l'égalité voulue.

6.5 Exemple : un calcul de $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$.

Soit

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$$

Soit $f : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$. f est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$ et admet en tout point une dérivée partielle en x, donnée par $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$, manifestement continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$. La fonction F est donc de classe C^1 et

$$F'(x) = \int_0^1 -2xe^{-x^2(1+t^2)}\,dt = -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2t^2} x dt = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2}\,du$$

de sorte que si l'on pose $g(x) = \int_0^x e^{-u^2}\,du$ et $G(x) = (g(x))^2$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) + G'(x) = 0$$

Par conséquent, la fonction $F + G$ est constante sur $\mathbb{R}$. Or $F(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \pi/4$ et $G(0) = 0$. Donc

$$F(x) = \frac{\pi}{4} - G(x)$$

Par ailleurs, on a $0 \leqslant f(x,t) \leqslant e^{-x^2}$ donc $0 \leqslant F(x) \leqslant e^{-x^2}$. On en déduit $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to\infty} G(x) = \pi/4$. Comme pour tout x on a $g(x) = \sqrt{G(x)}$, on en déduit $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \sqrt{\pi}/2$, soit

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

On en déduit facilement

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

7

Intégrales dépendant d'un paramètre
Cas d'un intervalle d'intégration quelconque

Dans ce qui suit,la phrase: " soit g une fonction intégrable sur I " sous entend que g est localement continue par morceaux sur I.

7.1 Continuité

THEOREME 7.1.1
Soient (X, d) un espace métrique, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : X \times I \to \mathbb{C}$ continue. On suppose qu'il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $\forall (x,t) \in X \times I \quad |f(x,t)| \leqslant g(t)$. La fonction $F : X \to \mathbb{C}$ définie par $F(x) = \int_I f(x,t)\, dt$ est continue sur X.

preuve
Ce théorème est admis par le programme. Néanmois, nous donnons ici sa preuve qui est une application immédiate des théorèmes sur les suites de fonctions intégrables.
Tout d'abord, pour tout x dans X, la fonction $t \to f(x,t)$ est continue et majorée par la fonction intégrable g, donc est intégrable. F est donc bien définie.
Soit $x_0 \in X$ et $(x_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de points de X convergeant vers x_0; la suite de fonctions intégrable $h_n(t) = f(x_n, t)$ converge simplement vers la fonction $h(t) = f(x_0, t)$ et par hypothèse la convergence est dominée par la fonction g. D'après le théorème de convergence dominée (3.4.2) la suite $F(x_n) = \int_I h_n(t)\, dt$ converge vers $F(x_0) = \int_I h(t)\, dt$. Pour toute suite (x_n) de points de X convergeant vers x_0 la suite $F(x_n)$ converge vers $F(x_0)$. D'aprés un théorème vu dans le cours sur les espaces métriques, on en déduit que F est continue en x_0.$\blacksquare$

Remarque
La démonstration prouve que la conclusion du théorème reste valable si au lieu de supposer f globalement continue on suppose que f vérifie les deux propriétés suivantes:

- Pour tout $x \in X,\ t \to f(x,t)$ est localement continue par morceaux.
- Pour tout $t \in I,\ x \to f(x,t)$ est continue sur X.

en gardant bien sur l'hypothèse de domination.

7.2 Dérivabilité

THEOREME 7.2.1
Soient J et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : J \times I \to \mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes:

1. $\forall x \in J \quad t \to f(x,t)$ *est continue et intégrable sur I.*

2. *f admet en tout point de $J \times I$ une dérivée partielle par rapport à la première variable et la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $J \times I$.*

3. *Il existe une fonction intégrable $g : I \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x,t) \in J \times I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant g(t)$.*

Alors la fonction F définie par $F(x) = \int_I f(x,t)\,dt$ est définie et de classe C^1 sur J et

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

preuve
Là encore le théorème est admis par le programme, mais sa démonstration est facile.
Notons d'abord que F est bien définie par hypothèse et que la fonction $H : x \to \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ est définie et continue sur J d'après le théorème précédent.
Il reste à voir que F est dérivable en tout point $x_0 \in J$ de dérivée $H(x_0)$. Posons, pour $x \in J,\ x \neq x_0, T(x) = \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$. Il s'agit de vérifier que $\lim\limits_{x \to x_0} T(x) = H(x_0)$. Pour celà, il suffit de montrer que pour toute suite (x_n) de points de J convergeant vers x_0 la suite $T(x_n)$ converge vers $H(x_0)$.
Or $T(x_n) = \int_I u_n(t)\,dt$, avec $u_n(t) = \frac{f(x_n,t)-f(x_0,t)}{x_n-x_0}$. La suite $u_n(x,t)$ converge simplement vers $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)$. D'après le théorème des accroissements finis (appliqué à la fonction $x \to f(x,t),\ t$ étant fixé) , $|u_n(x,t)| \leqslant g(t)$ donc la convergence est dominée par la fonction intégrable g. Le résultat découle alors du théorème de convergence dominée.■
Remarque
Comme pour la continuité, on voit facilement que la conclusion du théorème subsiste sous les hypothèses plus faibles suivantes:

- Pour tout $x \in J$ la fonction $t \to f(x,t)$ est localement continue par morceaux et intégrable sur I.
- f admet en tout point une dérivée partielle par rapport à la première variable qui vérifie
  - Pour tout $x \in J$, la fonction $t \to \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est localement continue par morceaux sur I.
  - Pour tout $t \in I$ la fonction $x \to \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur J.
  - Et bien sur $\forall (x,t) \in J \times I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant g(t)$

Remarque
Les conditions de domination figurant dans les théorèmes ci dessus ne sont pas toujours faciles à vérifier ; elles n'ont même pas lieu en général. Il est important de remarquer que pour montrer que F est continue (respectivement dérivable) en x_0, il suffit de montrer que la restriction de F à un intervalle fermé borné $[\alpha,\beta]$ où $\alpha < x_0 < \beta$ est continue (resp. dérivable) en x_0 (Ceci si x_0 est intérieur à J ; si $x_0 = \inf J \in J$ (respectivement $x_0 = \sup J \in J$), on prendra $\alpha = x_0$ (respectivement $\beta = x_0$). Autrement dit, dans la pratique on sera amené à appliquer les théorèmes ci dessus à la restriction de f à $K \times I$ pour K sous intervalle compact arbitraire de J. Voir l'exemple ci dessous.

7.3 Exemple 1: la fonction Γ

On définit, pour $x > 0$

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

1. Existence et continuité
   Soit $J = I = \mathbb{R}_+^*$ et $f : J \times I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = e^{-t}t^{x-1} = e^{-t+(x-1)\ln(t)}$.
   f est continue et positive sur $J \times I$. Soient $0 < \alpha < \beta$ et $K = [\alpha,\beta]$. Pour $x \in K$ on a $f(x,t) \leqslant g_{\alpha,\beta}(t)$ où

   $$g_{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} e^{-t}t^{\alpha-1} & \text{si } 0 < t < 1 \\ e^{-t}t^{\beta-1} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

   La fonction $g_{\alpha,\beta}$ est continue, positive ; au voisinage de 0, $g_{\alpha,\beta}(t) \sim t^{\alpha-1}$ où $\alpha > 0$ donc $g_{\alpha,\beta}$ est intégrable sur $]0,1]$. Ensuite $\lim\limits_{t\to\infty} t^2 g_{\alpha,\beta}(t) = 0$ donc $g_{\alpha,\beta}$ est intégrable sur $[1,\infty[$, donc finalement sur I. D'après le théorème 7.1.1, Γ est définie et continue sur $[\alpha,\beta]$, ceci pour tout $0 < \alpha < \beta$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Dérivabilité
   f est de classe C^∞ sur $J \times I$ (i.e. admet des dérivées partielles continues de tout ordre dans ce domaine). Soit k un entier, $k \geqslant 1$. On a $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = e^{-t}\,(\ln(t))^k\, t^{x-1}$. Pour $x \in K$ on a $\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant g_{\alpha,\beta,k}(t)$ où

$$g_{\alpha,\beta,k}(t) = \begin{cases} e^{-t}\,|\ln(t)|^k\, t^{\alpha-1} & \text{si } 0 < t < 1 \\ e^{-t}\,(\ln(t))^k\, t^{\beta-1} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

   La fonction $g_{\alpha,\beta,k}$ est continue et intégrable sur J. En effet,

   - Soit a tel que $0 < a < \alpha$ et $b = \alpha - a > 0$; on a $\lim\limits_{t\to 0} t^{1-b} g_{\alpha,\beta,k}(t) = \lim\limits_{t\to 0} t^a\,|\ln(t)|^k = 0$ donc $g_{\alpha,\beta,k}$ est intégrable sur $]0,1]$.
   - $\lim\limits_{t\to\infty} t^2 g_{\alpha,\beta,k}(t) = 0$, donc $g_{\alpha,\beta,k}$ est intégrable sur $[1,\infty[$.

   En prenant $k = 1$ on voit d'après le théorème 7.2.1 que Γ est de classe C^1 sur tout $[\alpha,\beta]$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$ on a

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t}\ln(t)t^{x-1}\,dt$$

   Maintenant, une récurrence facile permet de montrer que Γ est de classe C^∞ :
   Considérons l'hypothèse de récurrence

$$(HR)_k \quad \Gamma \text{ est de classe } C^k \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,dt$$

   La majoration $\left|\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(x,t)\right| \leqslant g_{\alpha,\beta,k+1}(t)$ permet d'appliquer le théorème 7.2.1 à la fonction $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ sur tout intervalle $[\alpha,\beta] \subset J$. On en déduit $(HR)_k \Rightarrow (HR)_{k+1}$.■

3. Propriétés
   Une intégration par parties facile à justifier donne

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

   D'autre part, on a facilement $\Gamma(1) = 1$. Une récurrence facile donne alors, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

   On a, pour tout $x > 0$, $\Gamma''(x) = \int_0^\infty e^{-t}(\ln(t))^2 t^{x-1}\,dt > 0$. On en déduit que la fonction Γ est strictement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa dérivée est donc strictement croissante. Comme $\Gamma(1) = \Gamma(2)$, il existe $c \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$. On a alors $\Gamma'(x) < 0$ pour $x < c$ et $\Gamma'(x) > 0$ pour $x > c$. Γ est croissante sur $]c,+\infty[$ et $\Gamma(n) = (n-1)!$ donc $\lim\limits_{x\to\infty}\Gamma(x) = +\infty$. Enfin, on a $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x$; comme Γ est continue en 1, on a $\lim\limits_{x\to 0}\Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$ donc $\Gamma(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1/x$; en particulier, $\Gamma(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers 0 à droite.

Exercice expression de Γ comme produit infini.

1. Fonction B.
Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ on définit $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,du$.
Justifier l'existence de cette intégrale.
Vérifier que

$$B(\alpha,\beta+1) = \frac{\beta}{\alpha}B(\alpha+1,\beta)$$

2. Montrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$$

(On pourra s'inspirer de la méthode utilisée dans l'exemple du paragraphe 3.2.2)
3. En déduire

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

7.4 Exemple 2 : Transformation de Fourier

7.4.1 Définition et propriétés élémentaires

Désignons par $L^1(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$ espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ localement continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$ et par $L^1_c(\mathbb{K})$ le sous espace vectoriel de $L^1(\mathbb{K})$ formé des fonctions continues. On notera par ailleurs $C_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, ayant une limite égale à 0 en $\pm\infty$. Toute fonction appartenant à $C_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est bornée sur $\mathbb{R}$. On munira cet espace de la norme $\|\ \|_\infty$ de la convergence uniforme.

DEFINITION 7.4.1
Soit $f \in L^1(\mathbb{C})$; la transformée de Fourier de f est la fonction notée $\mathcal{F}f$ ou encore $\hat{f}$ définie par

$$\hat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itu}\, dt$$

THEOREME 7.4.1
Soit $f \in L^1(\mathbb{C})$.

1. *La transformée de Fourier de f est définie et continue et bornée sur $\mathbb{R}$. On a $\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leqslant \|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt$.*
2. *L'application $f \to \hat{f}$ est linéaire. Sa restriction à l'espace $L^1_c(\mathbb{K})$ muni de la norme $\|\ \|_1$ de la convergence en moyenne est une aplication linéaire continue de $L^1_c(\mathbb{K})$ dans $C_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$.*
3. *(Lemme de Riemann Lebesgue) $\hat{f}(u)$ tend vers 0 quand u tend vers $\pm\infty$.*

preuve
Posons, pour $u \in \mathbb{R}$, $g(u,t) = f(t)\exp(-itu)$. On a $\forall (u,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $|g(u,t)| \leqslant |f(t)|$ et $|f|$ est intégrable. Si f est continue, la continuité de $\hat{f}$ résulte du théorème 7.1.1 et si elle est seulement continue par morceaux, de la remarque qui suit. La majoration est évidente. Le point 2) en découle
Prouvons maintenant le dernier point, connu sous le nom de lemme de Riemann Lebesgue.

- Soit d'abord $\varphi = \chi_{(a,b)}$ la fonction caractéristique d'un intervalle borné (ouvert, fermé ou semi ouvert). On a

  $$\hat{\varphi}(u) = \int_a^b \exp(-itu)\, dt = \frac{\exp(-iua) - \exp(-iub)}{iu}$$

  donc $|\hat{\varphi}(u)| \leqslant 2/|u|$ d'où la conclusion dans ce cas. Par linéarité, le lemme de Riemann Lebesgue est vrai pour toute combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'intervalles, c'est à dire pour toute fonction en escalier.
- Soit maintenant $f \in L^1(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. En vertu de la proposition 3.2.2 il existe un réel positif A tel que

  $$\int_{-\infty}^{-A} |f(t)|\, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{et} \qquad \int_A^{\infty} |f(t)|\, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

  La restriction de f à l'intervalle $[-A,A]$ est continue par morceaux ; il existe une fonction en escalier $\varphi : [-A,A] \to \mathbb{C}$ telle que

  $$\forall t \in [-A,A],\ |f(t) - \varphi(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{8A}$$

  d'où l'on déduit

  $$\left|\int_{-A}^{A} f(t)e^{-iut}\, dt - \int_{-A}^{A} \varphi(t)e^{-iut}\, dt\right| \leqslant \int_{-A}^{A} |f(t) - \varphi(t)|\, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

  Le lemme de Riemann Lebesgue s'applique à φ ; il existe donc un réel positif K tel que

  $$|u| \geqslant K \Rightarrow \left|\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-itu}\, dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

  Alors, pour $u \geqslant K$ on a :

  $$\begin{aligned} \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itu}\, dt\right| &\leqslant \left|\int_{-\infty}^{A} f(t)e^{-itu}\, dt\right| \left|\int_{A}^{+\infty} f(t)e^{-itu}\, dt\right| \left|\int_{-A}^{A} (f(t) - \varphi(t))\, e^{-itu}\, dt\right| + \left|\int_{-A}^{A} \varphi(t)e^{-itu}\, dt\right| \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{-A} |f(t)|\, dt + \int_A^{\infty} |f(t)|\, dt + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

7.4.2 Régularité

THEOREME 7.4.2
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^1 intégrable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée f' intégrable sur $\mathbb{R}$. On a $\mathcal{F}(f')(u) = iu\mathcal{F}(f)(u)$.

preuve
Une intégration par parties donne, pour $X < Y$ réels

$$\int_X^Y f'(t)e^{-iut}\,dt = f(Y)e^{-iuY} - f(X)e^{-iuX} - \int_X^Y -iuf(t)e^{-iut}\,dt$$

Pour prouver le résultat, il suffit de montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$. f étant de classe C^1 on a $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$. Puisque f' est intégrable, $f(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $\pm\infty$. Comme f est intégrable, cette limite ne peut être que 0.$\blacksquare$

THEOREME 7.4.3
Soit $f \in L^1_c(\mathbb{C})$ et g la fonction $g(x) = xf(x)$. Si g est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^1 et $(\mathcal{F}(f))' = -i\mathcal{F}(g)$.

preuve
On va appliquer le théorème de dérivabilité (7.2.1). On a $\hat{f}(u) = \int_R h(u,t)\,dt$ avec $h(u,t) = f(t)\exp(-itu)$; pour tout u, $t \to h(u,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, admet une dérivée partielle par raport à u, $\frac{\partial h}{\partial u}(u,t) = -ig(t)\exp(-itu)$ qui est continue et dominée par la fonction intégrable $|g|$. Donc la fonction $\hat{f}$ est de classe C^1 et $\hat{f}'(u) = \int_{\mathbb{R}} -ig(t)\exp(-itu)\,dt = -i\hat{g}(u)$.$\blacksquare$
Remarque
Compte tenu de la remarque qui suit le théorème (7.2.1), on voit que le résultat subsiste si on supose seulement $f \in L^1(\mathbb{C})$

On désigne par $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel formé des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telles que pour tout couple d'entiers naturels m, n on ait $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^m f^{(n)}(x) = 0$. ($S$ s'appelle l'espace de Schwartz).

COROLLAIRE 7.4.1
♠ *L'application $\mathcal{F}$ induit une application linéaire de $\mathcal{S}$ dans lui même.*

7.4.3 Exemples

1. ♠ Soit $a > 0$ et χ la fonction caractéristique de l'intervalle $[-a, a]$. La transformée de Fourier de χ est $\hat{\chi}(u) = 2\frac{\sin(ua)}{u}$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$. Il est clair que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ ainsi que la fonction $g(x) = xf(x)$. On en déduit que $\hat{f}$ est C^1 et que

$$\hat{f}'(u) = -i\int_{\mathbb{R}} te^{-\frac{t^2}{2}}e^{-itu}\,dt$$

Une intégration par parties évidente donne

$$\hat{f}'(u) = -u\int_R e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-itu}\,dt = -u\hat{f}(u)$$

d'où

$$\hat{f}(u) = \hat{f}(0)e^{-\frac{u^2}{2}}$$

Or

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}$$

d'où finalement

$$\hat{f} = \sqrt{2\pi}f$$