Feuille d'exercices n°6

Exercice I

(1) En utilisant la formule directe d'inversion (particulière aux matrices carrées de taille 2), déterminer les inverses des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} -9 & -17 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) Pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, déterminer les solutions éventuelles à l'équation matricielle $A_i X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in M_{2,1}(\mathbf{R})$.

Exercice II

On considère la matrice suivante

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer A^2.
(2) Déterminer A^{-1}.
(3) Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on note $A_\lambda := A + \lambda \mathbf{I}_3$. Montrer que si $\lambda \neq \pm 1$, alors A_λ est une matrice inversible. (Indication : chercher l'inverse de A_λ sous la forme $\alpha A + \beta \mathbf{I}_3$.)

Exercice III

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le paramètre $t \in \mathbf{R}$ pour que le système d'équations suivant possède une unique solution :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & tx_3 & = & 3 \\ tx_1 & - & 2tx_2 & - & x_3 & = & -t \end{array} \right.$$

Exercice IV

Soit $P \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice telle que $P^2 = P$. On note $S := \mathbf{I}_n - 2P$.

(1) Dans cette question, on suppose que $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(1a) Vérifier que $P^2 = P$.
(1b) Calculer S.
(1c) Calculer S^{-1}.
(2) Dans le cas général, montrer que S est inversible et déterminer S^{-1}.
(3) Notons $Q := \mathbf{I}_n - P$.
(3a) Montrer que $Q^2 = Q$.
(3b) Montrer que $PQ = QP = \mathbf{0}$.
(4) Soit $X \in M_{n,1}(\mathbf{R})$.
(4a) Montrer qu'il existe d'uniques vecteurs-colonnes X_1 et X_2 tels que $X = X_1 + X_2$, $PX_1 = X_1$ et $QX_2 = X_2$.
(4b) Expliciter cette décomposition dans le cas où P est la matrice considérée à la question (1).

Exercice V

Déterminer l'inverse de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice VI

Déterminer l'inverse de la matrice suivante

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice VII

(1) Déterminer la matrice A de l'application $f\colon M_{5,1}(\mathbf{R}) \to M_{5,1}(\mathbf{R})$ définie par

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

(2) Pour tout $Y \in M_{5,1}(\mathbf{R})$ (on notera $y_1, \ldots, y_5$ les coefficients de Y), déterminer explicitement un $X \in M_{5,1}$ tel que $f(X) = Y$. On notera $g\colon M_{5,1}(\mathbf{R}) \to M_{5,1}(\mathbf{R})$ l'application qui à Y associe un tel X.
(3) Calculer la matrice B de g.
(4) Est-il vrai que $B = A^{-1}$?
(5) Montrer que $A^5 = \mathbf{I}_5$.

Exercice VIII

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ une matrice inversible. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbf{R})$.

On considère le système d'équations formulé matriciellement sous la forme $AX = Y$ avec $X \in M_{2,1}(\mathbf{R})$. On cherche à déterminer une formule explicite pour l'unique solution X à cette équation.

On introduit les deux matrices A' et A'' :

$$A' = \begin{pmatrix} y_1 & b \\ y_2 & d \end{pmatrix} \qquad A'' = \begin{pmatrix} a & y_1 \\ c & y_2 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, A' est la matrice obtenue en partant de la matrice A et en remplaçant la première colonne par Y, tandis que A'' est celle obtenue en remplaçant la deuxième colonne de A par Y.

Montrer l'identité suivante :

$$X = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A' \\ \det A'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\det A'}{\det A} \\ \frac{\det A''}{\det A} \end{pmatrix}$$

(Il s'agit de la formule de Cramer, dont vous verrez au deuxième semestre une généralisation pour des matrices carrées de taille arbitraire. Il n'est pas forcément recommandé de l'apprendre par cœur.)

Exercice IX

(1) Déterminer l'inverse de la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -5 \\ 3 & -15 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) Déterminer explicitement un vecteur colonne $X \in M_{3,1}(\mathbf{R})$ tel que $MX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
(3) En calculant coefficient par coefficient le produit matriciel MX, *vérifier* que le vecteur X trouvé à la question précédente satisfait bien la condition demandée.
(4) Déterminer des coefficients réels a, b et c tels que :

$$a\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -15 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercice X

Fixons $\lambda \in \mathbf{R}$. Considérons un vecteur-colonne quelconque $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Notons $f(X) = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer la matrice A de l'application linéaire f.
(2) Soit $M \in M_{n,m}(\mathbf{R})$ une matrice. Décrire les lignes de la matrice AM.
(3) Plus généralement, déterminer une matrice $B \in M_n(\mathbf{R})$ telle que pour toute matrice $M \in M_{n,m}(\mathbf{R})$, le produit BM soit obtenu en effectuant l'opération élémentaire $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$ sur la matrice M.