Feuille d'exercices n°5

Exercice I

Déterminer la matrice de l'application linéaire $f\colon M_{3,1}(\mathbf{R}) \to M_{2,1}(\mathbf{R})$ définie par la formule suivante pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x - z \end{pmatrix}$$

Exercice II

Calculer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice III

Notons $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer AB.
(2) Calculer BA.

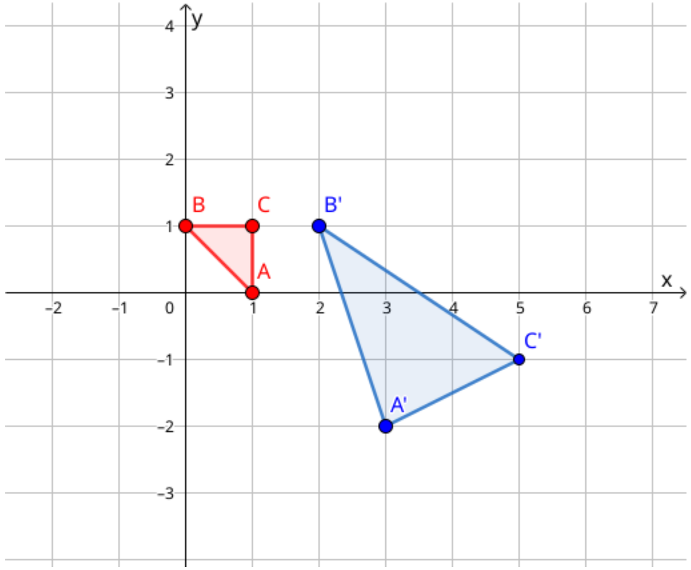
Exercice IV

Déterminer la matrice de l'application linéaire $f\colon M_{3,1}(\mathbf{R}) \to M_{1,1}(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}$ définie par la formule suivante pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3x + 4y + 5z$$

Exercice V

Dans cet exercice, on identifie les points du plan à des vecteurs-colonnes appartenant à $M_{2,1}(\mathbf{R})$.



(1a) Déterminer, si elle existe, la matrice M d'une application linéaire $f\colon M_{2,1}(\mathbf{R}) \to M_{2,1}(\mathbf{R})$ telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.
(1b) Calculer $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Dans les questions qui suivent, plusieurs méthodes de calcul sont envisageables.
(2) Notons $D \in M_{2,1}(\mathbf{R})$ défini par $D = C + (B - A)$. Calculer $D' := f(D)$.
(3) Notons I le milieu du segment $[BC]$. Déterminer $I' := f(I)$.
(4a) Déterminer un paramétrage de la droite (AD).
(4b) En déduire un paramétrage de l'ensemble Δ des points de la forme $f(P)$ avec $P \in (AD)$.
(5) Faire une figure.

Exercice VI

On fixe $(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2$. On note D la matrice

$$D=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})$$

On note $d\colon M_{2,1}(\mathbf{R})\to M_{2,1}(\mathbf{R})$ l'application linéaire associée à D.

(1) Si $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, calculer $d\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

Soit $M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\in M_2(\mathbf{R})$.

(2) Déterminer l'application linéaire $f\colon M_{2,1}(\mathbf{R})\to M_{2,1}(\mathbf{R})$ associée à M.

(3) Déterminer $d\circ f$. En déduire le résultat du produit DM.

(4) Déterminer $f\circ d$. En déduire le résultat du produit MD.

Exercice VII

Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont inversibles ? Déterminer l'inverse de celles qui le sont.

$$M_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\qquad M_2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}\qquad M_3=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 6\end{pmatrix}$$

Exercice VIII

(1) En utilisant la formule directe d'inversion (particulière aux matrices carrées de taille 2), déterminer les inverses des matrices suivantes :

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\qquad A_2=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 6 & 7\end{pmatrix}\qquad A_3=\begin{pmatrix}-9 & -17\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

(2) Pour chaque $i\in\{1,2,3\}$, déterminer les solutions éventuelles à l'équation matricielle $A_iX=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ d'inconnue $X\in M_{2,1}(\mathbf{R})$.

Exercice IX

(1) Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice suivante pour la mettre sous forme échelonnée réduite :

$$M=\left(\begin{array}{rrr|rrr}1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ -3 & 8 & -4 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 17 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

(2) En déduire les solutions éventuelles au système d'équation suivant :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -1\\ -3x + 8y - 4z = 4\\ 2x + y + 17z = 2\end{cases}$$

Exercice X

Déterminer l'inverse de la matrice suivante :

$$A=\begin{pmatrix}1 & -5 & 8\\ -5 & 26 & -42\\ 2 & -7 & 9\end{pmatrix}\in M_3(\mathbf{R})$$

Exercice XI

(1) On fixe $(b_1,b_2,b_3)\in\mathbf{R}^3$. Déterminer les solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = b_1\\ y + 3z = b_2\\ z = b_3\end{cases}$$

(2) Déterminer l'inverse de la matrice suivante :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(3) Déterminer l'inverse de la matrice suivante :

$$A'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$$