École universitaire Paris-Saclay
Année universitaire 2024/2025

Licence de mathématiques
MEU 102 Algèbre et géométrie
MP/MI/STAPS

Feuille d'exercices n°5

Exercice I

Déterminer la matrice de l'application linéaire $f\colon M_{3,1}(\mathbf{R}) \to M_{2,1}(\mathbf{R})$ définie par la formule suivante pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x - z \end{pmatrix}$$

Si on note $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a :

$$AX = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x - z \end{pmatrix} = f(X)$$

donc A est la matrice de f.

Exercice II

Calculer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 20 & 19 \end{pmatrix}$$

Exercice III

Notons $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer AB.

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 27 \\ 1 & -8 & 18 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

(2) Calculer BA.

$$BA = \begin{pmatrix} -12 & -3 \\ 13 & 10 \end{pmatrix}$$

Exercice IV

Déterminer la matrice de l'application linéaire $f\colon M_{3,1}(\mathbf{R}) \to M_{1,1}(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}$ définie par la formule suivante pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3x + 4y + 5z$$

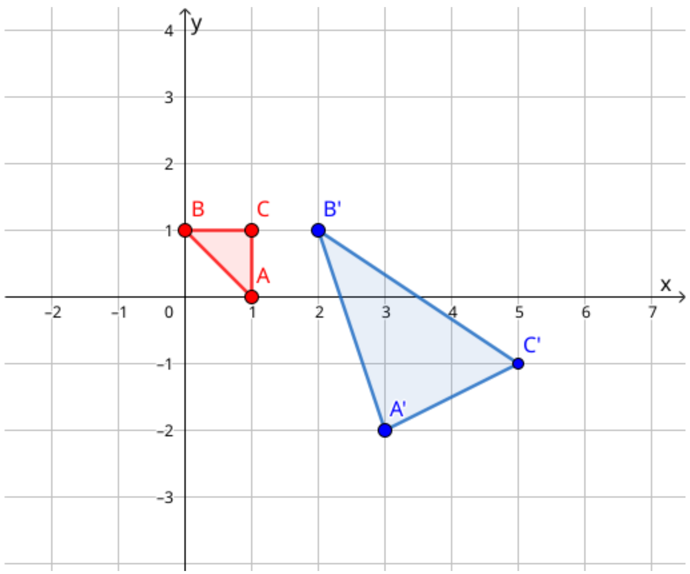
Notons $L = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a :

$$LX = (3x + 4y + 5z) \in M_{1,1}(\mathbf{R})$$

En identifiant une matrice de taille 1×1 à $\mathbf{R}$, on a bien $f(X) = LX$, donc L est la matrice de f.

Exercice V

Dans cet exercice, on identifie les points du plan à des vecteurs-colonnes appartenant à $M_{2,1}(\mathbf{R})$.



(1a) Déterminer, si elle existe, la matrice M d'une application linéaire $f\colon M_{2,1}(\mathbf{R}) \to M_{2,1}(\mathbf{R})$ telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

> Si f (et M) existent, la première colonne de M doit être $f(E_1) = f(A) = A'$ et la deuxième colonne de M doit être $f(E_2) = f(B) = B'$. On doit donc nécessairement avoir $M := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Si on note f l'application linéaire de matrice M, on a bien $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$. Comme $C = A + B$, on a $f(C) = f(A)+f(B) = A'+B'$. On remarque que $A'+B' = C'$, donc $f(C) = C'$. L'application linéaire f existe bien et sa matrice est M.

(1b) Calculer $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

> On calcule le produit matriciel suivant pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$:
>
> $$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+2y \\ -2x+y \end{pmatrix}$$

Dans les questions qui suivent, plusieurs méthodes de calcul sont envisageables.

(2) Notons $D \in M_{2,1}(\mathbf{R})$ défini par $D = C + (B - A)$. Calculer $D' := f(D)$.

> La définition de D signifie que $D - C = B - A$, autrement dit que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, c'est-à-dire que $ABDC$ est un parallélogramme.
>
> Par linéarité de f, on a $D' = f(C) + (f(B) - f(A)) = C' + (B' - A')$, on a donc $D' - C' = B' - A'$, donc comme précédemment $A'B'D'C'$ est un parallélogramme.
>
> Par ailleurs, on a remarqué précédemmenet que $C = B + A$, donc $D = (B + A) + (B - A) = 2B$ et que $C' = B' + A'$, donc $D' = (B' + A') + (B' - A') = 2B' = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(3) Notons I le milieu du segment $[BC]$. Déterminer $I' := f(I)$.

> On a $I = \frac{1}{2}(B + C)$, donc $I' = f\left(\frac{1}{2}(B+C)\right) = \frac{1}{2}(f(B) + f(C)) = \frac{1}{2}(B' + C')$, donc I' est le milieu du segment $[B'C']$. Comme $B' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C' = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, on a : $I' = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

(4a) Déterminer un paramétrage de la droite (AD).

> D'après les formules du cours (reformulées sous formes vectorielles), on peut considérer le paramétrage $M(t)$ donné pour tout $t \in \mathbf{R}$ par :
>
> $$M(t) = tD + (1 - t)A$$
>
> Comme $D = 2B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a :
>
> $$M(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 2t \end{pmatrix}$$
>
> (Ce paramétrage vérifie bien $M(0) = A$ et $M(1) = D$.)

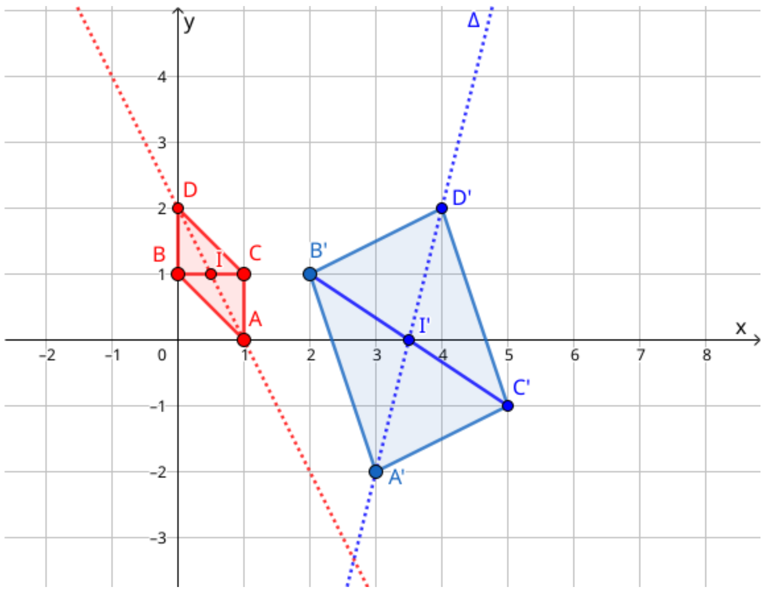
(4b) En déduire un paramétrage de l'ensemble Δ des points de la forme $f(P)$ avec $P \in (AD)$.

Les éléments de Δ sont ceux de la forme $M'(t) := f(M(t))$ pour $t \in \mathbf{R}$. On a donc :

$$M'(t) = f(tD + (1-t)A) = tf(D) + (1-t)f(A) = tD' + (1-t)A'$$

On reconnaît alors que $M'(t)$ est un paramétrage de la droite $(A'D')$. Ainsi, $\Delta = (A'D')$.

(5) Faire une figure.



Exercice VI

On fixe $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$. On note D la matrice

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$$

On note $d\colon M_{2,1}(\mathbf{R}) \to M_{2,1}(\mathbf{R})$ l'application linéaire associée à D.

(1) Si $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, calculer $d\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$d\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda x \\ \mu y \end{pmatrix}$$

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$.

(2) Déterminer l'application linéaire $f\colon M_{2,1}(\mathbf{R}) \to M_{2,1}(\mathbf{R})$ associée à M.

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+4y \end{pmatrix}$$

(3) Déterminer $d \circ f$. En déduire le résultat du produit DM.

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} (d \circ f)(X) &= d(f(X)) \\ &= d\begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+4y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(x+2y) \\ \mu(3x+4y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x + 2\lambda y \\ 3\mu x + 4\mu y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc :

$$DM = \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda \\ 3\mu & 4\mu \end{pmatrix}$$

(4) Déterminer $f \circ d$. En déduire le résultat du produit MD.

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned}(f\circ d)(X) &= d(f(X))\\ &= f\begin{pmatrix}\lambda x\\ \mu y\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(\lambda x)+2(\mu y)\\ 3(\lambda x)+4(\mu y)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\lambda x+2\mu y\\ 3\lambda x+4\mu y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

On a donc :

$$MD = \begin{pmatrix}\lambda & 2\mu\\ 3\lambda & 4\mu\end{pmatrix}$$

On remarque que si on choisit deux nombres réels distincts $\lambda \neq \mu$, on a montré $DM \neq MD$.

Exercice VII

Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont inversibles ? Déterminer l'inverse de celles qui le sont.

$$M_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 6\end{pmatrix}$$

La matrice M_1 n'est pas carrée, donc n'est pas inversible.
Le déterminant de M_2 est $-6 \neq 0$, donc M_2 est inversible.
Le déterminant de M_3 est 0, donc M_3 n'est pas inversible.
Il reste à déterminer l'inverse de M_2. On remarque que si on pose $M_2' := \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, alors

$$M_2 M_2' = \mathbf{I}_2$$

Comme M_2 est une matrice carrée, ceci est en soi suffisant pour conclure que M_2 est une matrice inversible d'inverse M_2'.

Exercice VIII

(1) En utilisant la formule directe d'inversion (particulière aux matrices carrées de taille 2), déterminer les inverses des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix}5 & 6\\ 6 & 7\end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix}-9 & -17\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

On rappelle que si $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$, alors A est inversible si et seulement si $\det A = ad - bc \neq 0$, et alors l'inverse est la matrice

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

On obtient ainsi :

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$
$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix}-7 & 6\\ 6 & -5\end{pmatrix}$$
$$A_3^{-1} = \begin{pmatrix}-2 & -17\\ 1 & 9\end{pmatrix}$$

(2) Pour chaque $i \in \{1,2,3\}$, déterminer les solutions éventuelles à l'équation matricielle $A_i X = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in M_{2,1}(\mathbf{R})$.

Comme A_i est inversible, la solution est unique : $X = A_i^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$. On obtient ainsi la solution X est faisant la somme des deux vecteurs-colonnes de A_i^{-1}.
Pour $i = 1$, l'unique solution est $X = \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$.
Pour $i = 2$, l'unique solution est $X = \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$.
Pour $i = 3$, l'unique solution est $X = \begin{pmatrix}-19\\ 10\end{pmatrix}$.

Exercice IX

(1) Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice suivante pour la mettre

sous forme échelonnée réduite :

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 17 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 17 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Effectuons les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 + 3L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1$.

$$M \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 11 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Effectuons les opérations $L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{5}{2}L_2$ et

$$M \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{19}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right)$$

Effectuons les opérations $L_2 \longleftarrow \frac{1}{2}L_2$ et $L_3 \longleftarrow -\frac{2}{3}L_3$:

$$M \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Effectuons les opérations $L_1 \longleftarrow L_1 - 3L_3$ et $L_2 \longleftarrow L_2 - \frac{5}{2}L_3$:

$$M \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -18 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{43}{3} & -\frac{11}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Effectuons l'opération $L_1 \longleftarrow L_1 + 2L_2$:

$$M \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{140}{3} & -\frac{37}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{43}{3} & -\frac{11}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

(2) En déduire les solutions éventuelles au système d'équation suivant :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -1 \\ -3x + 8y - 4z = 4 \\ 2x + y + 17z = 2 \end{cases}$$

Notons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 8 & -4 \\ 2 & 1 & 17 \end{pmatrix}$$

Le calcul de la question précédente montre que

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -140 & -37 & 16 \\ -43 & -11 & 5 \\ 19 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

On en déduit que l'unique solution au système considéré est :

$$A^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -140 & -37 & 16 \\ -43 & -11 & 5 \\ 19 & 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 24 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercice X

Déterminer l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 \\ -5 & 26 & -42 \\ 2 & -7 & 9 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$$

On applique l'algorithme du pivot de Gauss pour mettre sous forme échelonnée réduite la matrice suivante :

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 26 & -42 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \in M_{3,6}(\mathbf{R})$$

Effectuons les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 + 5L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1$:

$$M \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Effectuons l'opération $L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_2$:

$$M \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -17 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

À ce stade, on sait que A est bien inversible. Effectuons l'opération $L_3 \longleftarrow -L_3$:

$$M \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 17 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Effectuons les opérations $L_1 \longleftarrow L_1 - 8L_3$ et $L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_3$:

$$M \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & -135 & -24 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 39 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 17 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Effectuons les opérations $L_1 \longleftarrow L_1 + 5L_2$:

$$M \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 60 & 11 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 39 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 17 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

On obtient donc :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 60 & 11 & -2 \\ 39 & 7 & -2 \\ 17 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice XI

(1) On fixe $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbf{R}^3$. Déterminer les solutions du système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 4z & = & b_1 \\ & & y & + & 3z & = & b_2 \\ & & & & z & = & b_3 \end{array}\right.$$

Le système étant échelonné, on détermine facilement l'unique solution (x, y, z) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & b_3 \\ y & = & b_2 - 3z = b_2 - 3b_3 \\ x & = & b_1 - 2y - 4z = b_1 - 2(b_2 - 3b_3) - 4b_3 = b_1 - 2b_2 + 2b_3 \end{array}\right.$$

(2) Déterminer l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La réponse à la question précédente peut se reformuler ainsi :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Déterminer l'inverse de la matrice suivante :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que $A' = {}^tA$, donc A' est inversible et

$$A'^{-1} = {}^t(A^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$