Feuille d'exercices n°4

Exercice I

(1) Les vecteurs-colonnes V_1, V_2, V_3 suivants forment-ils une famille libre de $M_{3,1}(\mathbf{R})$? (Ne pas faire de calculs trop compliqués.)

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2) En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice augmentée suivante, où b_1, b_2, b_3 sont des réels arbitraires, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le système correspondant soit compatible :

$$\left(\begin{array}{rr|l} 2 & 3 & b_1 \\ 7 & 2 & b_2 \\ 5 & -3 & b_3 \end{array}\right)$$

(3) Soit $X := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur x, y et z pour que $X \in \mathrm{Vect}(V_1, V_2, V_3)$.

Exercice II

Pour quelle(s) valeur(s) éventuelles(s) du paramètre $a \in \mathbf{R}$ est-ce que les vecteurs suivants V_1 et V_2 forment une famille libre de $M_{2,1}(\mathbf{R})$:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} a \\ -6 \end{pmatrix}$$

Exercice III

Déterminer deux équations linéaires homogènes en les variables x_1, x_2, x_3, x_4 définissant $\mathrm{Vect}(V_1, V_2)$ avec :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Exercice IV

Les vecteurs suivants forment-ils une famille libre dans $M_{3,1}(\mathbf{R})$:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice V

Pour quelle(s) valeur(s) éventuelles(s) du paramètre $a \in \mathbf{R}$ est-ce que les vecteurs suivants V_1, V_2, V_3 forment une famille libre de $M_{3,1}(\mathbf{R})$:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -a \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice VI

Pour quelle(s) valeur(s) éventuelles(s) du paramètre $a \in \mathbf{R}$ est-ce que les vecteurs suivants V_1, V_2, V_3 forment une famille libre de $M_{3,1}(\mathbf{R})$:

$$V_1 = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} a \\ 3-a \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice VII

Dans $M_{3,1}(\mathbf{R})$, on note F l'ensemble des vecteurs-colonnes vérifiant dont les coordonnées vérifient la relation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Déterminer une base de F. Quelle est la dimension de F ?

(Une base de F est une famille libre $(V_1, \ldots, V_d)$ d'éléments de F de cardinal maximum. On a alors $\operatorname{Vect}(V_1, \ldots, V_d) = F$ *et* $\dim F = d$.*)*

Exercice VIII

Dans $M_{3,1}(\mathbf{R})$, on considère les vecteurs suivants :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad V_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

(1) Les vecteurs (V_1, V_2, V_3, V_4) forment-ils une famille génératrice de $M_{3,1}(\mathbf{R})$?
(2) Quelle est la dimension d de $\operatorname{Vect}(V_1, V_2, V_3, V_4)$?
(3) Parmi les quatre vecteurs V_1, V_2, V_3, V_4, déterminer une sous-famille de d vecteurs qui soit libre.

Exercice IX

(1) Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel F de $M_{4,1}(\mathbf{R})$ formé des vecteurs-colonnes X tels que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = 0$?
(2) Déterminer une base de F.

Exercice X

On considère $\mathscr{P}$ l'ensemble des $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbf{R})$ tels que $2x + 3y + 5z = 8$.

Déterminer des vecteurs-colonnes $X_0, V_1, \ldots, V_d$ dans $M_{3,1}(\mathbf{R})$ tels que les éléments de $\mathscr{P}$ sont exactement les vecteurs de la forme $X_0 + t_1 V_1 + \cdots + t_d V_d$ (pour un unique d-uplet $(t_1, \ldots, t_d)$).

Exercice XI

On considère $\mathscr{P}_0$ l'ensemble des $X = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbf{R})$ tels que les équations suivantes soient vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} w & + & 2x & + & 3y & + & 5z & = & 0 \\ w & - & 2x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

(1) Déterminer des vecteurs-colonnes V_1 et V_2 dans $M_{4,1}(\mathbf{R})$ tels que $\mathscr{P}_0 = \operatorname{Vect}(V_1, V_2)$. Quelle est la dimension de $\mathscr{P}_0$?

(2) On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des $X = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbf{R})$ tels que $w + 2x + 3y + 5z = 1$ et $w - 2x - y + z = 1$. Déterminer un vecteur-colonne X_0 tel que tout élément de $\mathscr{P}$ s'écrive de façon unique $X_0 + t_1 V_1 + t_2 V_2$.

Exercice XII

Considérons les vecteurs suivants, où b_1, b_2, b_3 sont des réels arbitraires :

$$V_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad V_2 := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad V_3 := \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

(1) Mettre sous forme échelonnée réduite la matrice $M = \left(\begin{array}{ccc|c} V_1 & V_2 & V_3 & B \end{array} \right)$.
(2) Montrer que la famille (V_1, V_2, V_3) est génératrice de $M_{3,1}(\mathbf{R})$.
(3) Écrire explicitement les vecteurs suivants comme combinaisons linéaires de V_1, V_2 et V_3 :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4) La famille (V_1, V_2, V_3) est-elle libre ?
(5) Quelle est la dimension de $\operatorname{Vect}(V_1, V_2)$?