École universitaire Paris-Saclay
Année universitaire 2024/2025

Licence de mathématiques
MEU 102 Algèbre et géométrie
MP/MI/STAPS

Feuille d'exercices n°4

Exercice I

(1) Les vecteurs-colonnes V_1, V_2, V_3 suivants forment-ils une famille libre de $M_{3,1}(\mathbf{R})$? (Ne pas faire de calculs trop compliqués.)

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

> Non, car on remarque que $V_1 + V_2 = V_3$, ce qui donne une relation linéaire non triviale entre les trois vecteurs.

(2) En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice augmentée suivante, où b_1, b_2, b_3 sont des réels arbitraires, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le système correspondant soit compatible :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & b_1 \\ 7 & 2 & b_2 \\ 5 & -3 & b_3 \end{array}\right)$$

> $$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & b_1 \\ 7 & 2 & b_2 \\ 5 & -3 & b_3 \end{array}\right)$$
> $$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_2 & \longleftarrow & L_2 - \frac{7}{2}L_1 \\ L_3 & \longleftarrow & L_3 - \frac{5}{2}L_1 \end{array}\right]$$
> $$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -\frac{17}{2} & -\frac{7}{2}b_1 + b_2 \\ 0 & -\frac{21}{2} & -\frac{5}{2}b_1 + b_3 \end{array}\right)$$
> $$\sim \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{21}{17}L_2$$
> $$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -\frac{17}{2} & -\frac{7}{2}b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & \frac{31}{17}b_1 - \frac{21}{17}b_2 + b_3 \end{array}\right)$$
>
> Le système correspondant est compatible si et seulement si $\frac{31}{17}b_1 - \frac{21}{17}b_2 + b_3 = 0$, c'est-à-dire si $31b_1 - 21b_2 + 17b_3 = 0$.

(3) Soit $X := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur x, y et z pour que $X \in \mathrm{Vect}(V_1, V_2, V_3)$.

> Si on fait les substitutions $b_1 := x$, $b_2 := y$ et $b_3 := z$ dans la question précédente, le système considéré est compatible si et seulement si $X \in \mathrm{Vect}(V_1, V_2)$ (puisqu'une solution est précisément un couple $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x_1V_1 + x_2V_2 = X$). Comme $V_3 \in \mathrm{Vect}(V_1, V_2)$, on a $\mathrm{Vect}(V_1, V_2, V_3) = \mathrm{Vect}(V_1, V_2)$. Finalement, $X \in \mathrm{Vect}(V_1, V_2, V_3)$ si et seulement si $31x - 21y + 17z = 0$.

Exercice II

Pour quelle(s) valeur(s) éventuelles(s) du paramètre $a \in \mathbf{R}$ est-ce que les vecteurs suivants V_1 et V_2 forment une famille libre de $M_{2,1}(\mathbf{R})$:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} a \\ -6 \end{pmatrix}$$

> Cette famille est libre si et seulement si le déterminant $\det(V_1, V_2)$ est non nul. On calcule :
> $$\det(V_1, V_2) = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -6 - 2a.$$
> Ainsi :
> $$(V_1, V_2) \text{ génératrice} \Leftrightarrow \det(V_1, V_2) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -3.$$

Exercice III

Déterminer deux équations linéaires homogènes en les variables x_1, x_2, x_3, x_4 définissant $\mathrm{Vect}(V_1, V_2)$ avec :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Un vecteur colonne $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{Vect}(V_1, V_2)$ si et seulement si le système associé à la matrice augmentée suivante est compatible. On peut donc appliquer l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 2 & 3 & b_2 \\ 3 & 4 & b_3 \\ 4 & 5 & b_4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -2b_1 + b_2 \\ 0 & -2 & -3b_1 + b_3 \\ 0 & -3 & -4b_1 + b_4 \end{array}\right) \quad \begin{bmatrix} L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_1 \\ L_3 & \longleftarrow & L_3 - 3L_1 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 - 4L_1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -2b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & b_1 - 2b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & 2b_1 - 3b_2 + b_4 \end{array}\right) \quad \begin{bmatrix} L_3 & \longleftarrow & L_3 - 2L_2 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 - 3L_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & b_1 - 2b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & 2b_1 - 3b_2 + b_4 \end{array}\right) \quad L_2 \longleftarrow -L_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3b_1 + 2b_2 \\ 0 & 1 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & b_1 - 2b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & 2b_1 - 3b_2 + b_4 \end{array}\right) \quad L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2$$

On peut par exemple prendre comme équations :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Exercice IV

Les vecteurs suivants forment-ils une famille libre dans $M_{3,1}(\mathbf{R})$:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Introduisons la matrice dont les colonnes sont données par (V_1, V_2, V_3) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbf{R}).$$

Le cours assure que la famille est libre si et seulement si la matrice A est linéairement équivalente à une matrice échelonnée contenant un pivot dans chaque colonne. On applique donc l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice A :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{smallmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{smallmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2.$$

La dernière matrice est échelonnée, et la troisième colonne n'admet pas de pivot. On conclut donc que la famille (V_1, V_2, V_3) n'est pas libre.

Remarquer que puisque la matrice est carrée, conformément au résultat du cours la famille (V_1, V_2, V_3) n'est pas non plus génératrice de $M_{3,1}(\mathbf{R})$ (il y a une ligne nulle dans la matrice échelonnée obtenue).

Exercice V

Pour quelle(s) valeur(s) éventuelles(s) du paramètre $a \in \mathbf{R}$ est-ce que les vecteurs suivants V_1, V_2, V_3 forment une famille libre de $M_{3,1}(\mathbf{R})$:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -a \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit $a \in \mathbf{R}$. Pour savoir si la famille est libre, on met sous forme échelonnée la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ a & 2 & 1 \\ -a & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbf{R}).$$

On commence par supprimer le paramètre a de la dernière ligne (afin de simplifier les calculs), puis on applique l'algorithme du pivot de Gauss :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ a & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 + L_2}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2+3a & 1-a \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - aL_1}.$$

À ce stade pour poursuivre l'algorithme il faut distinguer selon que le coefficient $2+3a$ est nul ou pas. Cependant échanger les lignes L_2 et L_3 donne une matrice équivalente, qui a un pivot en position $(2,2)$ indépendamment de la valeur de a.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 2+3a & 1-a \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_2 \leftrightarrow L_3}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2-12a \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow 6L_3 - (2+3a)L_2}.$$

Finalement on voit que A est linéairement équivalente à une matrice ayant un pivot par colonne si et seulement si $2 - 12a \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $a \neq \frac{1}{6}$.

On peut vérifier que pour $a = \frac{1}{6}$ on a la relation linéaire suivante :

$$6V_1 = 3V_3 - V_2.$$

Exercice VI

Pour quelle(s) valeur(s) éventuelles(s) du paramètre $a \in \mathbf{R}$ est-ce que les vecteurs suivants V_1, V_2, V_3 forment une famille libre de $M_{3,1}(\mathbf{R})$:

$$V_1 = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} a \\ 3-a \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme pour l'exercice précédent, on introduit la matrice A dont les colonnes sont données par les vecteus (V_1, V_2, V_3) :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 2a & 2 & 3-a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbf{R}).$$

On va lui appliquer l'algorithme du pivot de Gauss afin de voir si A est linéairement équivalente à une matrice avec un pivot par colonne. On remarque d'emblée que si $a = 0$ la première colonne de A est nulle et donc n'admet pas de pivot, contrairement au cas $a \neq 0$: on traite donc ces cas séparément.

- Premier cas : $a = 0$. Dans ce cas l'algorithme du pivot de Gauss indique que le premier pivot à considérer est le premier coefficient non nul de la première colonne non nulle de A. Ici c'est le coefficient en position $(1,2)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{smallmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{smallmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2}.$$

On constate que A est linéairement équivalente à une matrice qui possède une ligne nulle, on en déduit que dans le cas $a = 0$ la famille (V_1, V_2, V_3) n'est pas libre.

- Deuxième cas : $a \neq 0$, dans ce cas on utilise le coefficient a en position $(1,1)$

comme pivot.

$$A \sim \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 0 & 0 & 3(1-a) \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$
$$\sim \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3(1-a) \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3.$$

On obtient une matrice échelonnée, qui admet une ligne nulle si et seulement si $a = 1$.

Pour conclure, on constate que la famille (V_1, V_2, V_3) est libre si et seulement si $a \notin \{0, 1\}$.

Exercice VII

Dans $M_{3,1}(\mathbf{R})$, on note F l'ensemble des vecteurs-colonnes vérifiant dont les coordonnées vérifient la relation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Déterminer une base de F. Quelle est la dimension de F ?

(Une base de F est une famille libre $(V_1, \dots, V_d)$ d'éléments de F de cardinal maximum. On a alors $\mathrm{Vect}(V_1, \dots, V_d) = F$ *et* $\dim F = d$*.)*

Les éléments de F sont ceux de la forme suivante pour $(x_2, x_3) \in \mathbf{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On peut poser

$$V_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a montré que $F = \mathrm{Vect}(V_1, V_2)$ et il est évident que ces deux vecteurs forment une famille libre, donc (V_1, V_2) est une base de F, qui est donc de dimension 2.

Exercice VIII

Dans $M_{3,1}(\mathbf{R})$, on considère les vecteurs suivants :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad V_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

(1) Les vecteurs (V_1, V_2, V_3, V_4) forment-ils une famille génératrice de $M_{3,1}(\mathbf{R})$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$
$$\sim \quad \begin{bmatrix} L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_1 \\ L_3 & \longleftarrow & L_3 - 3L_1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$
$$\sim \quad L_2 \longleftrightarrow L_3$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$
$$\sim \quad L_3 \longleftarrow -\tfrac{1}{7} L_3$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \quad \begin{bmatrix} L_1 & \longleftarrow & L_1 - 6L_3 \\ L_2 & \longleftarrow & L_2 + 6L_3 \end{bmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \quad L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme on obtient un pivot sur chaque ligne, on peut conclure que (V_1, V_2, V_3, V_4) est une famille génératrice de $M_{3,1}(\mathbf{R})$.

(2) Quelle est la dimension d de $\mathrm{Vect}(V_1, V_2, V_3, V_4)$?

Comme $M_{3,1}(\mathbf{R})$ est de dimension 3, la question précédente permet d'affirmer que $d = 3$.

(3) Parmi les quatre vecteurs V_1, V_2, V_3, V_4, déterminer une sous-famille de d vecteurs qui soit libre.

Dans la première question, si on refaisait les calculs en ignorant la troisième colonne, c'est-à-dire en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice dont les trois colonnes sont respectivement V_1, V_2, V_4, on obtiendrait finalement la matrice identité :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut donc conclure que (V_1, V_2, V_4) est libre.

Alternativement, d'après le calcul de la première question, l'identité $x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3 + x_4V_4 = 0$ est vraie si et seulement si $x_1 = x_3$, $x_2 = -x_3$ et $x_4 = 0$. Avec $x_3 = 1$, on a en particulier la relation de liaison $V_1 - V_2 + V_3 = 0$. Cependant, si on exige de plus $x_3 = 0$, c'est-à-dire que l'on considère l'équation $x_1V_1 + x_2V_2 + x_4V_4 = 0$, la seule solution devient $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, c'est-à-dire que (V_1, V_2, V_4) est une famille libre.

Exercice IX

(1) Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel F de $M_{4,1}(\mathbf{R})$ formé des vecteurs-colonnes X tels que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = 0$?

La matrice considérée $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est déjà échelonnée réduite. Elle possède un pivot. Dans le système homogène associé, il y a donc trois variables secondaires. On en déduit que F est de dimension 3.

(2) Déterminer une base de F.

Les solutions du système considéré précédemment sont données par l'équation $x_1 = -x_2 + x_3 + x_4$. En faisant $x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$, on obtient un premier vecteur $V_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et en faisant de même avec les autres variables secondaires, on obtient d'autres vecteurs :

$$V_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, (V_1, V_2, V_3) est une base de F.

Exercice X

On considère $\mathscr{P}$ l'ensemble des $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbf{R})$ tels que $2x + 3y + 5z = 8$.

Déterminer des vecteurs-colonnes $X_0, V_1, \ldots, V_d$ dans $M_{3,1}(\mathbf{R})$ tels que les éléments de $\mathscr{P}$ sont exactement les vecteurs de la forme $X_0 + t_1V_1 + \cdots + t_dV_d$ (pour un unique d-uplet $(t_1, \ldots, t_d)$).

Le « système » contenant l'unique équation $2x + 3y + 5z = 8$ est déjà échelonné et compatible. (x est variable principale, y et z variables secondaires.) Pour tout $(y, z) \in \mathbf{R}^2$, il existe un unique $x \in \mathbf{R}$ tel que (x, y, z) soit solution, et bien sûr $x = 4 - \frac{3}{2}y - \frac{5}{2}z$.

Les solutions (c'est-à-dire les éléments de $\mathscr{P}$), vus comme vecteurs-colonnes, sont exactement ceux de la forme suivante

$$\begin{pmatrix} 4 - \frac{3}{2}y - \frac{5}{2}z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il est évident que chaque solution s'écrit de façon unique sous cette forme.

On introduit plusieurs vecteurs-colonnes :

$$X_0 := \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; V_1 := \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; V_2 := \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les éléments de $\mathscr{P}$ sont les éléments de la forme $X_0 + t_1V_1 + t_2V_2$ pour $(t_1, t_2) \in \mathbf{R}^2$ (et l'écriture est unique).

Exercice XI

On considère $\mathscr{P}_0$ l'ensemble des $X = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbf{R})$ tels que les équations suivantes soient vérifiées :

$$\begin{cases} w + 2x + 3y + 5z = 0 \\ w - 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

(1) Déterminer des vecteurs-colonnes V_1 et V_2 dans $M_{4,1}(\mathbf{R})$ tels que $\mathscr{P}_0 = \mathrm{Vect}(V_1, V_2)$. Quelle est la dimension de $\mathscr{P}_0$?

> On utilise la méthode du cours qui consiste à appliquer l'algorithme du pivot de Gauss et à interpréter les solutions sous forme vectorielle. On considère la matrice associée au système homogène :
>
> $$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
>
> L'algorithme du pivot de mise sous forme échelonnée réduite donne :
>
> $$\begin{aligned} B &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} && {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} && {\scriptstyle L_2 \leftarrow -\frac{1}{4} L_2} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} && {\scriptstyle L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \end{aligned}$$
>
> Ainsi (w, x) sont des variables principales et (y, z) des variables secondaires. L'ensemble de solutions $\mathscr{P}_0$ du système considéré s'écrit :
>
> $$\begin{aligned} \mathscr{P}_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} -y-3z \\ -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbf{R} \right\} \\ &= \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbf{R} \right\}. \end{aligned}$$
>
> On pose donc $V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et l'égalité précédente indique précisément :
>
> $$\mathscr{P}_0 = \mathrm{Vect}(V_1, V_2).$$
>
> (Et la famille (V_1, V_2) est libre.)

(2) On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des $X = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbf{R})$ tels que $w + 2x + 3y + 5z = 1$ et $w - 2x - y + z = 1$. Déterminer un vecteur-colonne X_0 tel que tout élément de $\mathscr{P}$ s'écrive de façon unique $X_0 + t_1 V_1 + t_2 V_2$.

> Compte tenu du résultat à la question précédente, il suffit de trouver une solution particulière $X_0 \in \mathscr{P}$.
>
> Sans faire de calculs, on remarque que $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{P}$.
>
> D'après la méthode vue en cours, on peut conclure que :
>
> $$\mathscr{P} = \{X_0 + t_1 V_1 + t_2 V_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbf{R}\}.$$

Exercice XII

Considérons les vecteurs suivants, où b_1, b_2, b_3 sont des réels arbitraires :

$$V_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad V_2 := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad V_3 := \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

(1) Mettre sous forme échelonnée réduite la matrice $M = \left(\begin{array}{ccc|c} V_1 & V_2 & V_3 & B \end{array} \right)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & b_1 \\ 2 & 5 & 8 & b_2 \\ 3 & 6 & 10 & b_3 \end{array} \right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_1 \\ L_3 & \longleftarrow & L_3 - 3L_1 \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & b_1 \\ 0 & -3 & -6 & -2b_1 + b_2 \\ 0 & -6 & -11 & -3b_1 + b_3 \end{array} \right)$$

$$\sim \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & b_1 \\ 0 & -3 & -6 & -2b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_1 - 2b_2 + b_3 \end{array} \right)$$

$$\sim \qquad L_2 \longleftarrow -\tfrac{1}{3}L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3}b_1 - \frac{1}{3}b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_1 - 2b_2 + b_3 \end{array} \right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_1 & \longleftarrow & L_1 - 7L_3 \\ L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_3 \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & -6b_1 + 14b_2 - 7b_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3}b_1 + \frac{11}{3}b_2 - 2b_3 \\ 0 & 0 & 1 & b_1 - 2b_2 + b_3 \end{array} \right)$$

$$\sim \qquad L_1 \longleftarrow L_1 - 4L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}b_1 - \frac{2}{3}b_2 + b_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3}b_1 + \frac{11}{3}b_2 - 2b_3 \\ 0 & 0 & 1 & b_1 - 2b_2 + b_3 \end{array} \right)$$

(2) Montrer que la famille (V_1, V_2, V_3) est génératrice de $M_{3,1}(\mathbf{R})$.

D'après la question précédente, quels que soient b_1, b_2 et b_3, le système correspondant à la matrice augmentée M est compatible, ce qui signifie que $B \in \mathrm{Vect}(V_1, V_2, V_3)$, donc (V_1, V_2, V_3) est une famille génératrice de $M_{3,1}(\mathbf{R})$.

(3) Écrire explicitement les vecteurs suivants comme combinaisons linéaires de V_1, V_2 et V_3 :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La dernière colonne de la matrice échelonnée réduite obtenue avant donne l'unique triplet (x_1, x_2, x_3) tel que $B = x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3$. On obtient ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3}V_1 - \frac{4}{3}V_2 + V_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3}V_1 + \frac{11}{3}V_2 - 2V_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = V_1 - 2V_2 - 2V_3$$

(4) La famille (V_1, V_2, V_3) est-elle libre ?

(5) Quelle est la dimension de $\mathrm{Vect}(V_1, V_2)$?