École universitaire Paris-Saclay
Année universitaire 2024/2025

Licence de mathématiques
MEU 102 Algèbre et géométrie
MP/MI/STAPS

Feuille d'exercices n°3

Cette feuille d'exercices est consacrée à l'algorithme du pivot de Gauss pour résoudre des systèmes d'équations linéaires. Jusque maintenant, la résolution des systèmes a été faite en utilisant des manipulations sur les équations. Il est très important de pouvoir maintenant raisonner directement sur la matrice contenant les coefficients du système.

Il est important de savoir identifier les variables principales et les variables secondaires. Par exemple, pour la matrice augmentée $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$ qui est échelonnée (réduite), avec le pivot 1, et qui correspond à l'équation unique $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$, la résolution par la méthode du pivot de Gauss consiste à exprimer $x_1 = 4 - 2x_2 - 4x_3$: x_1 est la seule variable principale, tandis que x_2 et x_3 sont les variables secondaires.

Exercice I

On considère le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & 8 \end{array}\right.$$

(1) Reformuler ce système sous la forme d'une équation matricielle $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

(2) Déterminer la matrice augmentée M associée à ce système d'équations.

(3) Mettre M sous forme échelonnée et résoudre le système.

Exercice II

Parmi les matrices suivantes, quelles sont celles qui sont échelonnées ou échelonnées réduites ? Pour les matrices qui sont échelonnées, mettre en valeur les pivots, déterminer si le système associé est compatible et si c'est le cas indiquer les variables principales et les variables secondaires.

$$M_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \end{array}\right) \qquad M_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

$$M_3 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \qquad M_4 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$M_5 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -2 & -1 & -4 \end{array}\right) \qquad M_6 = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 12 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \end{array}\right)$$

Exercice III

Résoudre tous les systèmes linéaires associés aux matrices augmentées données dans l'exercice II en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

Par résolution d'un système linéaire en utilisant la méthode du pivot de Gauss, on veut dire que par des opérations élémentaires sur les lignes, la partie gauche de la matrice augmentée (i.e. *la partie obtenue en enlevant la dernière colonne) doit être mise sous forme échelonnée, ou éventuellement échelonnée réduite, qu'alors on peut constater que le système est compatible ou incompatible, et qu'enfin, si le système est compatible, on peut résoudre le système d'équations en écrivant les variables principales en fonction des variables secondaires.*

Exercice IV

Résoudre avec la méthode du pivot de Gauss le système suivant en quatre variables :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & - & 2x_3 & & & = & -1 \\ & & x_2 & & & - & x_4 & = & 2 \\ & - & 3x_2 & + & 2x_3 & & & = & 0 \\ -4x_1 & & & & & + & 7x_4 & = & -5 \end{array}\right.$$

Exercice V

(1) Pour chaque $t \in \mathbf{R}$, on considère la matrice augmentée

$$M_t = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & t \\ -3 & -15 & 10 \end{array}\right)$$

Pour quelles valeurs de t est-ce que le système d'équations associé à M_t possède (au moins) une solution (c'est-à-dire est compatible) ? Déterminer les solutions éventuelles dans le(s) cas où il en existe.

(2) Mêmes questions pour la matrice augmentée suivante :

$$N_t = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & t \\ 3 & 7 & 3 \end{array}\right)$$

Exercice VI

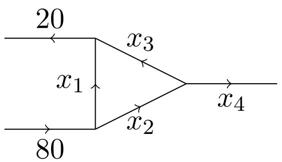
Pour chaque $t \in \mathbf{R}$ fixé, on considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - ty = 2 \end{cases}$$

Discuter du nombre de solutions de ce système suivant les valeurs de t.

Exercice VII

(1) En supposant que dans le circuit électrique ci-dessous, les nombres indiqués donnent l'intensité du courant, appliquer la loi des nœuds (qui en régime stationnaire traduit la conservation de la charge électrique) aux trois nœuds du circuit pour obtenir des équations linéaires en les variables x_1, x_2, x_3 et x_4 :



(2) En supposant que x_1, x_2, x_3 et x_4 sont positifs ou nuls, quelle est la plus grande valeur possible pour x_3 ?

Exercice VIII

Notons $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(1) Existe-t-il $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x_1C_1 + x_2C_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$?

(2) Existe-t-il $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x_1C_1 + x_2C_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$?

(3) Posons $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ où $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbf{R}^3$ est arbitraire. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbf{R}^3$ pour qu'il existe $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x_1C_1 + x_2C_2 = B$? *Indication : appliquer l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice augmentée suivante*

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & b_1 \\ 2 & 2 & b_2 \\ 3 & 1 & b_3 \end{array}\right)$$

Exercice IX

Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $B_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de $t \in \mathbf{R}$ le vecteur B_t est combinaison linéaire des vecteurs-colonnes de A. (Déterminer aussi les coefficients de cette combinaison linéaire si elle existe.)

Exercice X

Supposons qu'une matrice augmentée de système linéaire soit de la forme suivante, où $\star$ peut être remplacé par un coefficient arbitraire et $\blacksquare$ par un coefficient non nul arbitraire :

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \blacksquare & \star & \star \end{array}\right)$$

Le système associé est-il compatible ? Quelles sont les variables principales ? Quelles sont les variables secondaires ?

Exercice XI

Supposons que des points $P_1, \ldots, P_k$ de l'espace $\mathbf{R}^3$ (identifié à $M_{3,1}(\mathbf{R})$) soient affectés de masses $m_1, \ldots, m_k$ strictement positives. Le centre d'inertie G est défini par $G = \frac{1}{M}(m_1P_1 + \cdots + m_kP_k)$ où $M := m_1 + \cdots + m_k$ est la masse totale.

Si $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$, $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, où le point P_3 doit-il être pour que le centre d'inertie G soit l'origine de $\mathbf{R}^3$?