École universitaire Paris-Saclay
Année universitaire 2024/2025

Licence de mathématiques
MEU 102 Algèbre et géométrie
MP/MI/STAPS

Feuille d'exercices n°3

Cette feuille d'exercices est consacrée à l'algorithme du pivot de Gauss pour résoudre des systèmes d'équations linéaires. Jusque maintenant, la résolution des systèmes a été faite en utilisant des manipulations sur les équations. Il est très important de pouvoir maintenant raisonner directement sur la matrice contenant les coefficients du système.

Il est important de savoir identifier les variables principales et les variables secondaires. Par exemple, pour la matrice augmentée $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$ qui est échelonnée (réduite), avec le pivot 1, et qui correspond à l'équation unique $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$, la résolution par la méthode du pivot de Gauss consiste à exprimer $x_1 = 4 - 2x_2 - 4x_3$: x_1 est la seule variable principale, tandis que x_2 et x_3 sont les variables secondaires.

Exercice I

On considère le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & 8 \end{array}\right.$$

(1) Reformuler ce système sous la forme d'une équation matricielle $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

> On définit les matrices $A \in M_{2,3}(\mathbf{R})$ et $B \in M_{2,1}(\mathbf{R})$ suivantes :
>
> $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$
>
> Le système d'équation est alors équivalent à $AX = B$.

(2) Déterminer la matrice augmentée M associée à ce système d'équations.

> La matrice augmentée associée à ce système est
>
> $$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \end{array}\right) \in M_{2,4}(\mathbf{R})$$
>
> La question n'était pas posée, mais si on souhaitait résoudre le système d'équations linéaires, on pourrait appliquer l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice augmentée M. En effectuant l'opération élémentaire $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$ sur les lignes, on obtient :
>
> $$M \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -3 & 2 & -6 \end{array}\right)$$
>
> Le système associé à cette matrice augmentée est échelonné :
>
> $$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ & & -3x_2 & + & 2x_3 & = & -6 \end{array}\right.$$
>
> Ce système est compatible, les variables principales sont x_1 et x_2 tandis que x_3 est variable secondaire. Pour toute valeur de $x_3 \in \mathbf{R}$, il existe d'uniques réels x_1 et x_2 tels ques (x_1, x_2, x_3) soit solution. On détermine x_2 et x_1 en fonction de x_3 en « remontant les équations » :
>
> $$\left\{\begin{array}{lcl} x_2 & = & 2 + \frac{2}{3}x_3 \\ x_1 & = & 7 - 2x_2 + x_3 = 7 - 2\left(2 + \frac{2}{3}x_3\right) + x_3 = 3 - \frac{1}{3}x_3 \end{array}\right.$$

(3) Mettre M sous forme échelonnée et résoudre le système.

Exercice II

Parmi les matrices suivantes, quelles sont celles qui sont échelonnées ou échelonnées réduites ? Pour les matrices qui sont échelonnées, mettre en valeur les pivots, déterminer si le système associé est compatible et si c'est le cas indiquer les variables principales et les variables secondaires.

$$M_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \end{array}\right) \qquad M_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

> $$M_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

M_1 est échelonnée, mais pas échelonnée réduite. Le système est compatible : x_1 et x_2 sont les variables principales et x_3 est la variable secondaire.

M_2 n'est pas échelonnée.

$$M_3 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \qquad M_4 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$M_3 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \qquad M_4 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

M_3 est échelonnée, mais pas échelonnée réduite. Le système associé est compatible : x_1, x_2 et x_3 sont les variables principales, et x_4 est la variable secondaire.

M_4 est échelonnée (mais pas échelonnée réduite), mais le système est incompatible. (En effet, la dernière ligne correspond à l'équation $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$, c'est-à-dire $0 = 1$ qui est toujours fausse.) (On note par ailleurs que si on note $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice obtenue en enlevant la dernière colonne de M_4, alors A_4 est échelonnée réduite.)

$$M_5 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -2 & -1 & -4 \end{array}\right) \qquad M_6 = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 12 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \end{array}\right)$$

Ni M_5 ni M_6 ne sont échelonnées.

Exercice III

Résoudre tous les systèmes linéaires associés aux matrices augmentées données dans l'exercice II en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

Par résolution d'un système linéaire en utilisant la méthode du pivot de Gauss, on veut dire que par des opérations élémentaires sur les lignes, la partie gauche de la matrice augmentée (i.e. *la partie obtenue en enlevant la dernière colonne) doit être mise sous forme échelonnée, ou éventuellement échelonnée réduite, qu'alors on peut constater que le système est compatible ou incompatible, et qu'enfin, si le système est compatible, on peut résoudre le système d'équations en écrivant les variables principales en fonction des variables secondaires.*

Étude du système associé à la matrice augmentée M_1

La matrice M_1 correspond au système échelonné suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & = & -6 \end{array}\right.$$

Ce système est compatible. Les variables principales sont x_1 et x_2, tandis que x_3 est la variable secondaire. Pour tout $x_3 \in \mathbf{R}$, il existe d'uniques réels x_1 et x_2 tels que (x_1, x_2, x_3) soit solution. On calcule d'abord x_2, puis x_1 :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_2 & = & -3 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_1 & = & 1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 = \frac{5}{2} - \frac{5}{4}x_3 \end{array}\right.$$

Finalement, on a obtenu :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{5}{2} - \frac{5}{4}x_3 \\ x_2 & = & -3 - \frac{1}{2}x_3 \end{array}\right.$$

Alternativement, on aurait pu faire des opérations élémentaires sur les lignes de M_1, en commençant par $L_1 \longleftarrow \frac{1}{2}L_1$ et $L_2 \longleftarrow \frac{1}{2}L_2$:

$$M_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -3 \end{array}\right)$$

En faisant $L_1 \longleftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2$, on obtient :

$$M_1 \sim M_1' := \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -3 \end{array}\right)$$

La matrice M_1' est échelonnée réduite (et de façon à vrai dire plus importante, la matrice obtenue en retirant la dernière colonne est échelonnée réduite). Le système d'équations associé à la matrice augmentée M_1' est :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & \frac{5}{4}x_3 & = & \frac{5}{2} \\ & & x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & -3 \end{array}\right.$$

Ce système se reformule en :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{5}{2} - \frac{5}{4}x_3 \\ x_2 & = & -3 - \frac{1}{2}x_3 \end{array}\right.$$

Et ceci est bien le résultat qui avait été obtenu par la première méthode.

Étude du système associé à la matrice augmentée M_2

En échangeant les deux lignes de M_2, on obtient une matrice augmentée équivalente qui est échelonnée :

$$M_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Le système associé est compatible, les variables principales sont x_1 et x_2 tandis que la variable secondaire est x_3.

Pour tout $x_3 \in \mathbf{R}$, on détermine les uniques x_2 et x_1 tels que (x_1, x_2, x_3) soient solutions. La deuxième équation s'écrit $x_2 + x_3 = 3$, donc $x_2 = 3 - x_3$. La première équation s'écrit $x_1 + 2x_2 = 8$, donc $x_1 = 8 - 2x_2 = 8 - 2(3 - x_3) = 2 + 2x_3$. Finalement, on a bien exprimé les variables principales en fonction de la variable secondaire x_3 :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 2 + 2x_3 \\ x_2 & = & 3 - x_3 \end{array}\right.$$

Alternativement, on pourrait obtenir ce résultat en mettant M_2 sous forme échelonnée réduite :

$$M_2 \sim M_2' = \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Étude du système associé à la matrice augmentée M_3

$$M_3 = \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Le système associé à M_3 est déjà échelonné, et compatible :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 7 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\ & & & & x_3 & & & = & 2 \end{array}\right.$$

On a remarqué que x_1, x_2 et x_3 sont les variables principales tandis que x_4 est la variable secondaire. Il s'agit d'exprimer x_3, x_2 et x_1 en fonction de x_4, en partant de la dernière équation :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_3 & = & 2 \\ x_2 & = & 6 - \frac{1}{2}x_3 - x_4 = 6 - 1 - x_4 = 5 - x_4 \\ x_1 & = & 7 - x_2 - 3x_3 = 7 - 5 + x_4 - 6 = -4 + x_4 \end{array}\right.$$

(Ainsi, pour tout $x_4 \in \mathbf{R}$, il existe un unique triplet $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ (calculé ci-dessus) tel que (x_1, x_2, x_3, x_4) soit solution du système original.)

Alternativement, en faisant des opérations élémentaires sur les lignes, on aurait pu obtenir une matrice augmentée M_3' équivalente à M_3 :

$$M_3' = \left(\begin{array}{cccr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

En récrivant le système associé à cette matrice, et en faisant passer la variable secondaire x_4 de l'autre côté du signe $=$, on aurait obtenu le même résultat.

Étude du système associé à la matrice augmentée M_4

On a déjà montré que le système associé à M_4 était incompatible. Il ne possède donc pas de solution.

Étude du système associé à la matrice augmentée M_5

On applique l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\begin{array}{rcl} M_5 & = & \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -2 & -1 & -4 \end{array}\right) \\ & \underset{\left[\begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 5L_1 \end{array}\right]}{\sim} & \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & -6 & -2 & -16 & -14 \end{array}\right) \\ & \underset{\left[\, L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2 \,\right]}{\sim} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Le système correspondant à cette matrice est échelonné et compatible. Les variables principales sont x_1 et x_2, tandis que les variables secondaires sont x_3 et x_4. On peut continuer l'algorithme du pivot de Gauss pour mettre la matrice sous forme échelonnée réduite, en commençant par l'opération $L_2 \longleftarrow \frac{1}{3}L_2$:

$$\begin{array}{rcl} M_5 & \sim & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ & \underset{L_1 \longleftarrow L_1 - L_2}{\sim} & \left(\begin{array}{ccrc|r} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

La dernière matrice ci-dessus est échelonnée réduite, le système est donc équivalent à :

$$\begin{cases} x_1 \qquad - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = -\frac{1}{3} \\ \qquad x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{8}{3}x_4 = \frac{7}{3} \end{cases}$$

On peut donc exprimer x_1 et x_2 en fonction de x_3 et x_4 :

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}x_3 - \frac{8}{3}x_4 \end{cases}$$

Étude du système associé à la matrice augmentée M_6

On applique l'algorithme du pivot de Gauss :

$$M_6 = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 12 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 15 \end{array}\right) \underset{\left[\begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}\right]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 7 & 10 & 44 \\ 0 & 6 & 9 & 39 \end{array}\right)$$

Arrivé ici, de façon à obtenir un petit pivot sur la deuxième colonne, il peut sembler pertinent de diviser par 3 la troisième ligne, puis d'échanger L_2 et L_3 :

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 7 & 10 & 44 \end{array}\right) \underset{L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{7}{2}L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

À ce stade, le système a été mis sous forme échelonnée. Il est bien entendu compatible, x_1, x_2 et x_3 sont variables principales, mais il n'y a pas de variable secondaire. Le système possède une unique solution. Pour déterminer cette solution, on peut par exemple continuer l'algorithme du pivot de Gauss pour mettre la matrice sous forme échelonnée réduite. On peut commencer par faire $L_3 \longleftarrow -2L_3$:

$$M_6 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{\left[\begin{array}{l} L_1 \longleftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_3 \end{array}\right]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{L_1 \longleftarrow L_1 - L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{\left[\begin{array}{l} L_1 \longleftarrow -L_1 \\ L_2 \longleftarrow \frac{1}{2}L_2 \end{array}\right]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Cette matrice est bien échelonnée réduite. (Note : on pouvait sans doute obtenir ce résultat en faisant moins d'opérations élémentaires, mais j'ai utilisé ci-dessus une méthode voisine de celle vue en cours. J'ai ici commencé par mettre des zéros au-dessus des pivots, puis divisé les lignes par des coefficients bien choisis pour que les pivots vaillent 1.)

On en déduit aussitôt que l'unique solution est $(1, 2, 3)$.

Exercice IV

Résoudre avec la méthode du pivot de Gauss le système suivant en quatre variables :

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 2x_3 \qquad = -1 \\ \qquad x_2 \qquad - x_4 = 2 \\ \qquad - 3x_2 + 2x_3 \qquad = 0 \\ -4x_1 \qquad\qquad + 7x_4 = -5 \end{cases}$$

En faisant $L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_2$ et $L_4 \longleftarrow L_4 + 4L_1$, on obtient la matrice augmentée suivante :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 7 & -9 \end{array}\right)$$

On applique $L_4 \longleftarrow L_4 + 4L_3$, ce qui donne

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 15 \end{array}\right)$$

On obtient finalement une unique solution (x_1, x_2, x_3, x_4), avec $x_4 = -3$, $x_3 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = -1$ et $x_1 = -4$.

Exercice V

(1) Pour chaque $t \in \mathbf{R}$, on considère la matrice augmentée

$$M_t = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & t \\ -3 & -15 & 10 \end{array}\right)$$

Pour quelles valeurs de t est-ce que le système d'équations associé à M_t possède (au moins) une solution (c'est-à-dire est compatible) ? Déterminer les solutions éventuelles dans le(s) cas où il en existe.

En faisant $L_2 \longleftarrow L_2 + 3L_1$, on obtient une matrice augmentée équivalente :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & t \\ 0 & 0 & 10 + 3t \end{array}\right)$$

Le système est donc compatible si et seulement si $10+3t = 0$, c'est-à-dire $t = -\frac{10}{3}$. Dans le cas où $t = -\frac{10}{3}$, x_1 est variable principale et x_2 variable secondaire, donc on peut exprimer les solutions en fonction de x_2 (qui peut prendre une valeur arbitraire) : $x_1 = t - 5x_2 = -\frac{10}{3} - 5x_2$.

(2) Mêmes questions pour la matrice augmentée suivante :

$$N_t = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & t \\ 3 & 7 & 3 \end{array}\right)$$

En faisant $L_2 \longleftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_1$, on obtient :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & t \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 - \frac{3}{2}t \end{array}\right)$$

La partie gauche de la matrice est échelonnée (x_1 et x_2 sont variables principales, pas de variable secondaire), donc on a une unique solution (x_1, x_2), avec $x_2 = -6 + 3t$ et $x_1 = \frac{t-5x_2}{2} = \frac{t+30-15t}{2} = -7t + 15$.

Exercice VI

Pour chaque $t \in \mathbf{R}$ fixé, on considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 3y & = & 1 \\ 2x & - & ty & = & 2 \end{array}\right.$$

Discuter du nombre de solutions de ce système suivant les valeurs de t.

En faisant $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$, on obtient une nouvelle matrice augmentée :

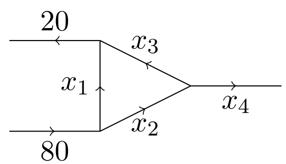
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -t-6 & 0 \end{array}\right)$$

Si $-t - 6 \neq 0$ (c'est-à-dire $t \neq -6$), la matrice 2×2 obtenue en enlevant la dernière colonne est échelonnée, compatible et telle que x et y sont deux variables principales, donc il existe une unique solution au système.

Si $t = -6$, la matrice est aussi échelonnée et compatible, et il existe une infinité de solutions au système puisque x est variable principale et y variable secondaire.

Exercice VII

(1) En supposant que dans le circuit électrique ci-dessous, les nombres indiqués donnent l'intensité du courant, appliquer la loi des nœuds (qui en régime stationnaire traduit la conservation de la charge électrique) aux trois nœuds du circuit pour obtenir des équations linéaires en les variables x_1, x_2, x_3 et x_4 :



On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 &= 20 \\ x_1 + x_2 &= 80 \\ x_3 + x_4 &= x_2 \end{cases}$$

(2) En supposant que x_1, x_2, x_3 et x_4 sont positifs ou nuls, quelle est la plus grande valeur possible pour x_3 ?

On remarque que le système est équivalent à trois équations qui expriment x_1, x_2 et x_4 en fonction de x_3 :

$$\begin{cases} x_1 &= 20 - x_3 \\ x_2 &= 80 - x_1 = 60 + x_3 \\ x_4 &= x_2 - x_3 = 60 \end{cases}$$

La condition $x_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, se traduit par les inégalités $20 - x_3 \geq 0$, $60 + x_3 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ et $60 \geq 0$, ce qui donne la condition $x_3 \in [0, 20]$.

Exercice VIII

Notons $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(1) Existe-t-il $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x_1 C_1 + x_2 C_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$?

On considère la matrice augmentée

$$M = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

L'égalité $x_1 C_1 + x_2 C_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ équivaut au fait que (x_1, x_2) soit solution du système associé à la matrice augmentée M. On applique donc l'algorithme du pivot de Gauss, on commence par les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1$ pour obtenir une matrice équivalente à M :

$$M \quad \sim \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & -8 \end{array}\right)$$

En faisant $L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2$, on obtient une matrice augmentée associée à un système échelonné :

$$M \quad \sim \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système associé est compatible, x_1 et x_2 sont les variables principales et il n'y a pas de variables secondaires, donc il existe une unique solution $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Cette solution vérifie $-4x_2 = -4$, donc $x_2 = 1$, par ailleurs $x_1 + 3x_2 = 5$, donc $x_1 = 5 - 3x_2 = 5 - 3 = 2$.

Finalement, l'unique couple qui convienne est $(2, 1)$.

(2) Existe-t-il $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x_1 C_1 + x_2 C_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$?

Il s'agit ici de considérer le système associé à la matrice :

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

En faisant les mêmes opérations élémentaires sur les lignes que précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned} M \quad &\sim \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -8 & 3 \end{array}\right) \\ &\sim \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -9 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Le système associé est incompatible (la troisième équation signifie « $0 = -9$ » qui est toujours faux). Il n'existe donc pas $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x_1 C_1 + x_2 C_2 =$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(3) Posons $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ où $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbf{R}^3$ est arbitraire. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbf{R}^3$ pour qu'il existe $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x_1C_1 + x_2C_2 = B$? *Indication : appliquer l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice augmentée suivante*

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & b_1 \\ 2 & 2 & b_2 \\ 3 & 1 & b_3 \end{array}\right)$$

En faisant les mêmes opérations élémentaires que dans les questions précédentes, on obtient successivement les matrices augmentées suivantes :

$$\left(\begin{array}{cc|l} 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -4 & -2b_1 + b_2 \\ 0 & -8 & b_3 - 3b_1 \end{array}\right)$$

puis

$$\left(\begin{array}{cc|l} 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -4 & -2b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & b_1 - 2b_2 + b_3 \end{array}\right)$$

Le système est compatible si et seulement si $b_1 - 2b_2 + b_3 = 0$. S'il l'est, la solution (x_1, x_2) sera unique.

Exercice IX

Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $B_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de $t \in \mathbf{R}$ le vecteur B_t est combinaison linéaire des vecteurs-colonnes de A. (Déterminer aussi les coefficients de cette combinaison linéaire si elle existe.)

De façon similaire à l'exercice précédent, la matrice augmentée associée à ce problème est :

$$M_t = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & t \end{array}\right)$$

En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - 5L_1$ et sur les lignes, on obtient une matrice équivalente :

$$M_t \sim \left(\begin{array}{cc|r} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & t-5 \end{array}\right)$$

En faisant $L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2$, on obtient :

$$M_t \sim \left(\begin{array}{cc|r} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & t+1 \end{array}\right)$$

Finalement, en faisant $L_2 \longleftarrow -\frac{1}{2}L_2$, on obtient :

$$M_t \sim \left(\begin{array}{cc|l} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & t+1 \end{array}\right)$$

Le système associé est compatible si et seulement si $t = -1$ auquel cas l'unique solution est $x_1 = 1$ et $x_2 = -\frac{3}{2}$.

Finalement, si on note C_1 et C_2 les vecteurs-colonnes de la matrice A, alors B_t est combinaison linéaire de C_1 et C_2 si et seulement si $t = -1$, et on a effectivement $B_{-1} = C_1 - \frac{3}{2}C_2$.

Exercice X

Supposons qu'une matrice augmentée de système linéaire soit de la forme suivante, où $\star$ peut être remplacé par un coefficient arbitraire et $\blacksquare$ par un coefficient non nul arbitraire :

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \blacksquare & \star & \star \end{array}\right)$$

Le système associé est-il compatible ? Oui. Quelles sont les variables principales ? x_1, x_3 Quelles sont les variables secondaires ? x_2, x_4

Exercice XI

Supposons que des points $P_1, \dots, P_k$ de l'espace $\mathbf{R}^3$ (identifié à $M_{3,1}(\mathbf{R})$ soient affectés de masses $m_1, \dots, m_k$ strictement positives. Le centre d'inertie G est défini par $G = \frac{1}{M}(m_1 P_1 + \cdots + m_k P_k)$ où $M := m_1 + \cdots + m_k$ est la masse totale.

Si $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$, $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, où le point P_3 doit-il être pour que le centre d'inertie G soit l'origine de $\mathbf{R}^3$?

> On cherche P_3 tel que l'on ait l'identité $\frac{1}{6}(P_1 + 2P_2 + 3P_3) = 0$, c'est-à-dire $3P_3 = -P_1 - 2P_2$, c'est-à-dire $P_3 = \frac{1}{3}\left(-P_1 - 2P_2\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.