École universitaire Paris-Saclay
Année universitaire 2024/2025

Licence de mathématiques
MEU 102 Algèbre et géométrie
MP/MI/STAPS

Feuille d'exercices n°2

D'après le cours, l'ensemble des solutions à un système d'équations linéaires en trois variables réelles est soit $\mathbf{R}^3$ tout entier, soit un plan, soit une droite, soit un singleton (solution unique), soit vide. Pour le moment, résoudre un tel système reviendra à identifier dans quel cas on se trouve, et suivant les cas, à caractériser d'une manière ou d'une autre ce plan, cette droite ou l'unique solution…

Exercice I

(1) Déterminer les solutions (éventuelles) $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ au système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \\ & & y & - & 2z & = & 3 \\ & & & & z & = & 5 \end{array}\right.$$

> $\{(-39, 13, 5)\}$

(2) Déterminer les solutions (éventuelles) $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ au système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 3y & + & 5z & = & 1 \\ & & y & + & 5z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

> $\{(4, 1, 0)\}$

(3) Un des deux systèmes d'équations ci-dessus était-il un peu plus facile à résoudre ? Si oui, quelle est la propriété qui rend sa résolution plus facile ?

Exercice II

Déterminer les solutions (éventuelles) $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ au système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & + & 5z & = & 10 \\ x & - & y & - & 2z & = & 6 \end{array}\right.$$

> $$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & \frac{1}{5}z + \frac{28}{5} \\ y & = & -\frac{9}{5}z - \frac{2}{5} \end{array}\right.$$

Exercice III

On considère la droite $\mathscr{D}$ de $\mathbf{R}^3$ donnée par le paramétrage $M(t) = (2t + 1, -t + 2, 3t)$ pour $t \in \mathbf{R}$.

(1) Déterminer $\mathscr{D} \cap \mathscr{P}_1$ où $\mathscr{P}_1$ est le plan d'équation $x + y + z = 2$.

> $\mathscr{D} \cap \mathscr{P}_1 = \{M(-\frac{1}{4}\} = \{(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}, -\frac{3}{4})\}$.

(2) Donner les équations cartésiennes de deux plans $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ tels que $\mathscr{D} = \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3$.

> Par exemple, $\mathscr{P}_2$ d'équation $x = \frac{2}{3}z + 1$ et $\mathscr{P}_3$ d'équation $y = -\frac{1}{3}z + 2$.

(3) Est-il vrai que $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}_4$ où $\mathscr{P}_4$ est le plan d'équation $x - y - z = -1$?

> $(2t + 1) - (-t + 2) - (3t) = -1$, donc $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}_4$.

(4) Est-il vrai que $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}_5$ où $\mathscr{P}_5$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$?

> $(2t + 1) + (-t + 2) + (3t) = 3 + 4t$, donc à moins que $t = -\frac{3}{4}$, le point $M(t)$ n'appartient pas à $\mathscr{P}_5$, donc $\mathscr{D} \not\subset \mathscr{P}_5$.

Exercice IV

(1) Déterminer un paramétrage $M(t)$ pour $t \in \mathbf{R}$ de la droite $\mathscr{D}$ dans $\mathbf{R}^3$ passant par les points $A = (1, 1, 1)$ et $B = (2, 3, 4)$.

> $M(t) = (1 + t, 1 + 2t, 1 + 3t)$.

(2) On note $\mathscr{P}$ le plan dans l'espace défini par l'équation $x + y + z = 15$. Déterminer $\mathscr{D} \cap \mathscr{P}$.

> $\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \{M(2)\} = \{(3, 5, 7)\}$.

(3) On note $\mathscr{P}'$ le plan dans l'espace défini par l'équation $x + y = z$. Déterminer $\mathscr{D} \cap \mathscr{P}'$.

$\mathscr{D} \cap \mathscr{P}'$ est vide.

(4) On note $\mathscr{P}''$ le plan dans l'espace défini par l'équation $4x + y - 2z = 3$. Déterminer $\mathscr{D} \cap \mathscr{P}''$.

$\mathscr{D} \cap \mathscr{P}'' = \mathscr{D}$.

Exercice V

On considère la droite $\mathscr{D}$ de $\mathbf{R}^3$ donnée par le paramétrage $M(t) = (3t+1, 2t+2, t+3)$ pour $t \in \mathbf{R}$, ainsi que la droite $\mathscr{D}'$ de $\mathbf{R}^3$ donnée par le paramétrage $N(t) = (t, 2t+3, t+2)$ pour $t \in \mathbf{R}$.

(1) Si $(t, u) \in \mathbf{R}^2$, reformuler l'assertion « $M(t) = N(u)$ » sous la forme d'un système d'équations faisant intervenir les variables t et u.

$$\begin{cases} 3t+1 = u \\ 2t+2 = 2u+3 \\ t+3 = u+2 \end{cases}$$

(2) Résoudre le système. Décrire $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}'$.

L'intersection est vide.

(3) Plus généralement, si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droites quelconques dans l'espace $\mathbf{R}^3$, quelles sont les possibilités pour l'intersection $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}'$?

Une droite, un singleton ou l'ensemble vide.

Exercice VI

Soit $\mathscr{P}$ un plan d'équation $ax + by + cy = d$ dans $\mathbf{R}^3$ où $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ sont des coefficients fixés tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Supposons que $A = (x_A, y_A, z_A)$ et $B = (x_B, y_B, z_B)$ sont des points distincts de $\mathscr{P}$.

(1) Rappeler une formule donnant un paramétrage $M(t)$ de la droite (AB).

(2) Montrer que $(AB) \subset \mathscr{P}$.

Exercice VII

Déterminer les solutions (éventuelles) $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ au système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x + 3y - z = -2 \\ 3x + 10y - z = -3 \\ x + 5y + 4z = 6 \end{cases}$$

Faisons disparaître x de la deuxième et la troisième équation. Pour cela, retranchons 3 fois la première équation à la deuxième, et retranchons la première équation à la troisième. Si on note L_1, L_2, L_3 les trois équations, cela revient à faire des opérations que nous noterons $L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$, on obtient alors un système équivalent :

$$\begin{cases} x + 3y - z = -2 \\ y + 2z = 3 \\ 2y + 5z = 8 \end{cases}$$

Faisons $L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2$:

$$\begin{cases} x + 3y - z = -2 \\ y + 2z = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

Le système est triangulaire, donc admet une unique solution $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, dont on détermine successivement les coordonnées z, y et x : $z = 2$, $y = 3 - 2z = -1$, $x = -2 - 3y + z = 3$. L'unique solution est donc $\{(3, -1, 2)\}$.

Exercice VIII

On note $A = (0, 0, 2)$, $B = (1, -1, 1)$, $C = (2, 1, 2)$. On cherche à déterminer une équation $ax + by + cz = d$ d'un plan $\mathscr{P}$ qui contienne les trois points A, B et C.

(1) Reformuler l'appartenance $A \in \mathscr{P}$ sous la forme d'une formule exprimant d en fonction de a, b et c. $d = 2c$.

À partir de maintenant, on remplace d par l'expression obtenue ci-dessus.

(2) Reformuler l'appartenance $B \in \mathscr{P}$ sous la forme d'une formule exprimant c en fonction de a et b. $c = a - b$.

À partir de maintenant, on remplace c par l'expression obtenue ci-dessus.

(3) Reformuler l'appartenance $C \in \mathscr{P}$ sous la forme d'une formule exprimant b en fonction de a. $b = -2a$

(4) Montrer qu'il existe un unique plan $\mathscr{P}$ contenant les points A, B et C. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

> Finalement, $b = -2a$, $c = a - b = 3a$, $d = 2c = 6a$. Avec $a := 1$, on obtient l'équation $x - 2y + 3z = 6$.

Exercice IX

Si $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, on considère l'application $P\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $P(t) = xt^2 + yt + z$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

(1) Reformuler sous la forme d'un système d'équations linéaires en les variables x, y et z le système suivant :

$$\begin{cases} P(1) &= 2 \\ P(2) &= 4 \\ P(3) &= 8 \end{cases}$$

> $$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 4x + 2y + z = 4 \\ 9x + 3y + z = 8 \end{cases}$$

(2) Montrer que le système obtenu précédemment possède une unique solution, et déterminer l'expression $P(t)$ associée.

$P(t) = t^2 - t + 2$

Exercice X

Dans $\mathbf{R}^3$, on considère la surface S d'équation $x^2 - (y+z)^2 = 0$. Décrire S.

Exercice XI

Dans $\mathbf{R}^3$, on considère la surface S' d'équation $z^2 = x^2 + y^2$. Existe-t-il une application $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ telle que S' soit la surface d'équation $z = f(x, y)$?

Exercice XII

Supposons que $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ est fixé. Introduisons l'application $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(t) = xe^t + ye^{-t}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

On chercher à trouver $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ qui soient tels que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ (où f' est la dérivée de f).

(1) Exprimer $f(0)$ et $f'(0)$ en fonction de x et y. $f(0) = x + y$, $f'(0) = x - y$.

(2) Reformuler les égalités $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ sous la forme d'un système d'équations en les variables x et y.

(3) Résoudre le système précédent, et conclure. $f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.

Exercice XIII

Introduisons les matrices réelles suivantes :

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1) Pour chacune des matrices A, B, C, X et Y, indiquer le couple d'entiers (m, n) tel que la matrice appartienne à $M_{m,n}(\mathbf{R})$.

(2) Parmi les expressions suivantes AX, AY, BX, BY, CX, CY, quelles sont les produits qui ont un sens (c'est-à-dire sont définis) ? Calculer ceux qui ont un sens.