École universitaire Paris-Saclay — Licence de mathématiques
Année universitaire 2024/2025 — MEU 102 Algèbre et géométrie
MP/MI/STAPS

Feuille d'exercices n°1

Pour tous les exercices de cette feuille, même si ce n'est pas explicitement demandé, il peut être utile de représenter graphiquement les différents objets mathématiques considérés sur une figure.

Exercice I

On note $\mathscr{C}$ le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ défini par l'équation cartésienne $xy = 1$. Parmi les points suivants, quels sont ceux qui appartiennent à $\mathscr{C}$:

- ⋆ $(0,1)$;
- ⋆ $(1,1)$;
- ⋆ $(1,-1)$;
- ⋆ $(-1,-1)$;
- ⋆ $(1,2)$;
- ⋆ $(\frac{1}{2},2)$.

Exercice II

On considère la droite $\mathscr{D}$ dont un paramétrage $(X(t),Y(t))$ pour $t \in \mathbf{R}$ est donné par

$$\begin{cases} X(t) &= 2+3t \\ Y(t) &= -1+2t \end{cases}$$

(1) Parmi les points suivants, quels sont ceux qui appartiennent à $\mathscr{D}$:

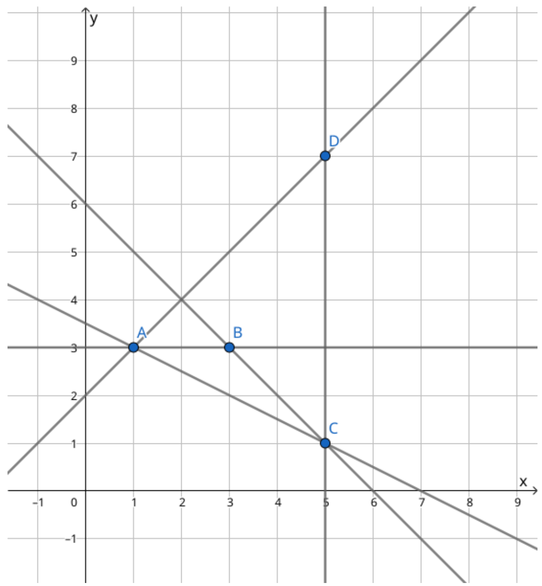
- ⋆ $(0,0)$;
- ⋆ $(2,-1)$;
- ⋆ $(3,3)$;
- ⋆ $(5,1)$;
- ⋆ $(2,2)$;
- ⋆ $(\frac{7}{2},0)$.

(2) Déterminer une équation cartésienne (E) satisfaite par tous les points de $\mathscr{D}$.
(3) D'après le cours, $\mathscr{D}$ est la droite d'équation (E). Redémontrez rigoureusement cette égalité par double inclusion.

Exercice III

(1) Représenter graphiquement dans le plan la droite $\mathscr{D}$ d'équation « $5x-2y = 10$ ».
(2) Déterminer l'équation réduite de $\mathscr{D}$.
(3) Donner les coordonnées de deux points distincts appartenant à $\mathscr{D}$.

Exercice IV



Déterminer un paramétrage des droites (AB), (AC), (BC), (AD), (CD).

Exercice V

Pour chacune des cinq droites considérées dans l'exercice IV, déterminer
- une équation cartésienne ;
- l'équation réduite.

Exercice VI

(1) Avec les notations de l'exercice IV, déterminer les points d'intersections des droites :
- (AB) et (BC) ;
- (AB) et (CD) ;
- (AD) et (BC) ;
- (AC) et (BD).

(2) Si on note E le point d'intersection de (AB) et (CD) et F celui de (AC) et (BD), déterminer une équation de la droite (EF).

Exercice VII

(1) Représenter graphiquement la droite $\mathscr{D}$ d'équation $3x + 4y = 12$.
(2) Déterminer une équation cartésienne de la parallèle $\mathscr{D}'$ à $\mathscr{D}$ passant par le point $A = (1, 2)$.
(3) Déterminer un paramétrage de $\mathscr{D}'$.

Exercice VIII

On note $\mathscr{D}_1$ la droite d'équation $3x + y = -3$ et $\mathscr{D}_2$ celle d'équation $x - y = -5$. Déterminer $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$.

Exercice IX

On note $\mathscr{D}_1$ la droite d'équation $x + 4y = 8$ et $\mathscr{D}_2$ celle d'équation $3x + 2y = 14$. Déterminer $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$.

Exercice X

Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ qui sont solutions du système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x - 3y & = & 10 \\ 3x + 2y & = & -1 \end{array}\right.$$

Exercice XI

Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ qui sont solutions du système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x + 5y & = & 3 \\ 3x + 5y & = & -5 \end{array}\right.$$

Exercice XII

Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ qui sont solutions du système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x + 5y & = & -4 \\ 6x + 7y & = & -5 \end{array}\right.$$

Exercice XIII

(1) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ contenant le point $A = (2, 3)$ et de vecteur directeur $v = (2, 1)$.
(2) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}'$ contenant le point $B = (-1, 6)$ et de vecteur directeur $v = (5, -2)$.
(3) Déterminer $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}'$.

Exercice XIV

Supposons que $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ soient deux droites sécantes d'équations cartésiennes $F_1(x, y) = 0$ et $F_2(x, y) = 0$ respectivement, où $F_1(x, y)$ et $F_2(x, y)$ sont des applications $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de la forme $F_1(x, y) = a_1x + b_1y + c_1$ et $F_2(x, y) = a_2x + b_2y + c_2$. On note A le point d'intersection de $\mathscr{D}_1$ et de $\mathscr{D}_2$.
(1) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$. On pose $F_3(x, y) := \lambda F_1(x, y) + \mu F_2(x, y)$. Montrer que « $F_3(x, y) = 0$ » est l'équation cartésienne d'une droite $\mathscr{D}_3$ passant par A.
(2) Dans le cas particulier où $A = (x_A, y_A)$, $F_1(x, y) = x - x_A$ et $F_2(x, y) = y - y_A$, montrer que réciproquement, si $\mathscr{D}_3$ est une droite passant par A, alors elle admet une équation de la forme $\lambda F_1(x, y) + \mu F_2(x, y) = 0$ comme dans la question précédente.

Exercice XV

On considère la droite $\mathscr{D}_1$ donnée par le paramétrage $M_1(t) = (t + 2, t + 3)$ et la droite $\mathscr{D}_2$ donnée par le paramétrage $M_2(t) = (2t, 2t + 1)$.

Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont-elles égales ?

Exercice XVI

On considère la droite $\mathscr{D}$ donnée par le paramétrage $M(t) = (2 + t, 3 - t)$.

Déterminer un paramétrage de la droite $\mathscr{D}'$ parallèle à $\mathscr{D}$ et passant par le point $(1, 1)$.

Exercice XVII

On fixe deux paramètres $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. On considère le système d'équations, d'inconnues réelles x et y :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x + 3y & = & a \\ 3x + 2y & = & b \end{array}\right.$$

(1) Déterminer un système d'équations équivalent au précédent et qui soit de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x + 3y & = & a \\ y & = & \beta \end{array}\right.$$

où β est un nombre réel à déterminer.
(2) Montrer que le système possède une unique solution (x, y), à exprimer en fonction de a et b.