École universitaire Paris-Saclay
Année universitaire 2024/2025

Licence de mathématiques
MEU 102 Algèbre et géométrie
MP/MI/STAPS

Feuille d'exercices n°1

Pour tous les exercices de cette feuille, même si ce n'est pas explicitement demandé, il peut être utile de représenter graphiquement les différents objets mathématiques considérés sur une figure.

Exercice I

On note $\mathscr{C}$ le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ défini par l'équation cartésienne $xy = 1$. Parmi les points suivants, quels sont ceux qui appartiennent à $\mathscr{C}$:

- ⋆ $(0,1)$; non
- ⋆ $(1,1)$; oui
- ⋆ $(1,-1)$; non
- ⋆ $(-1,-1)$; oui
- ⋆ $(1,2)$; non
- ⋆ $(\frac{1}{2},2)$. oui

Exercice II

On considère la droite $\mathscr{D}$ dont un paramétrage $(X(t), Y(t))$ pour $t \in \mathbf{R}$ est donné par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X(t) & = & 2+3t \\ Y(t) & = & -1+2t \end{array} \right.$$

(1) Parmi les points suivants, quels sont ceux qui appartiennent à $\mathscr{D}$:

- ⋆ $(0,0)$; non
- ⋆ $(2,-1)$; oui : $t=0$
- ⋆ $(3,3)$; non
- ⋆ $(5,1)$; oui : $t=1$
- ⋆ $(2,2)$; non
- ⋆ $(\frac{7}{2},0)$. oui : $t=\frac{1}{2}$

(2) Déterminer une équation cartésienne (E) satisfaite par tous les points de $\mathscr{D}$.

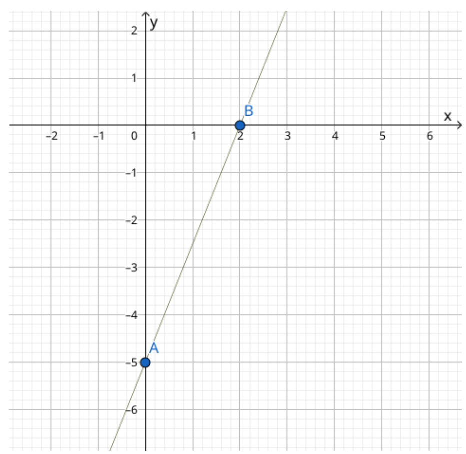
> On remarque que pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $2X(t) - 3Y(t) = 7$, donc donc les points de $\mathscr{D}$ appartiennent à la droite d'équation $2x - 3y = 7$.

(3) D'après le cours, $\mathscr{D}$ est la droite d'équation (E). Redémontrez rigoureusement cette égalité par double inclusion.

> Si $(x,y) \in \mathscr{D}$, alors il existe $t \in \mathbf{R}$, tel que $(x,y) = (X(t), Y(t))$, et on vient de montrer que $2x - 3y = 7$.
>
> Réciproquement, si $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ est tel que $2x - 3y = 7$, on cherche à montrer l'existence de $t \in \mathbf{R}$ tel que $(x,y) = (X(t), Y(t))$. Si c'est le cas, on doit avoir $2 + 3t = x$, c'est-à-dire $t = \frac{x-2}{3}$. Posons $t := \frac{x-2}{3}$ et calculons $X(t)$ et $Y(t)$. Bien sûr, $X(t) = x$. Par ailleurs, $Y(t) = -1 + \frac{2(x-2)}{3} = \frac{2x-7}{3}$. En utilisant la relation $2x - 3y = 7$, on obtient $Y(t) = \frac{3y}{3} = y$. On a bien montré $(x,y) = (X(t), Y(t))$, donc $(x,y) \in \mathscr{D}$.

Exercice III

(1) Représenter graphiquement dans le plan la droite $\mathscr{D}$ d'équation « $5x - 2y = 10$ ».



> Pour faire la construction, il convient de s'aider des réponses à l'une ou à l'autre des questions suivantes.

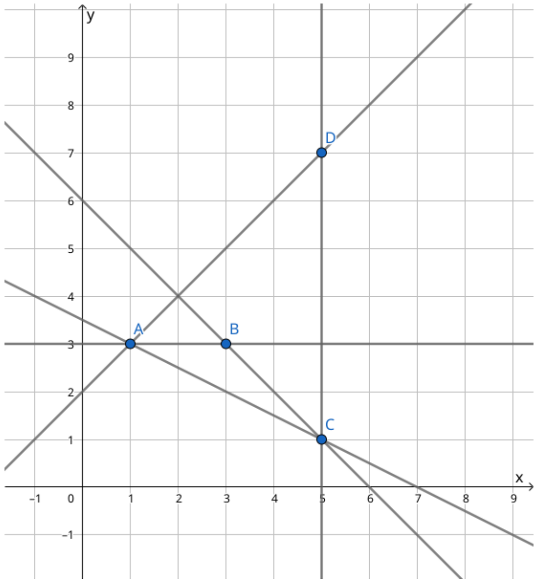
(2) Déterminer l'équation réduite de $\mathscr{D}$.

> L'équation réduite de $\mathscr{D}$ est $y = \frac{5}{2}x - 5$. L'ordonnée à l'origine est -5, ce qui donne l'appartenance à $\mathscr{D}$ du point $(0,-5)$. Le coefficient directeur $\frac{5}{2}$ permet de tracer la droite (par exemple parce que $(5,2)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.).

(3) Donner les coordonnées de deux points distincts appartenant à $\mathscr{D}$.

> À l'équation $5x - 2y = 10$, on peut chercher une solution qui vérifie de plus $x = 0$: $A = (0, -5)$. En faisant $y = 0$, on obtient aussi $B = (2, 0)$. La droite $\mathscr{D}$ est donc la droite (AB).

Exercice IV



Déterminer un paramétrage des droites (AB), (AC), (BC), (AD), (CD).

> Parmi les réponses possibles, il y a celles-ci, pour lesquelles on obtient les deux points définissant la droite avec les paramètres $t = 0$ et $t = 1$. Pour (AB), $X(t) = 1 + 2t$, $Y(t) = 3$.
> Pour (AC), $X(t) = 1 + 4t$, $Y(t) = 3 - 2t$.
> Pour (BC), $X(t) = 3 + 2t$, $Y(t) = 3 - 2t$.
> Pour (AD), $X(t) = 1 + 4t$, $Y(t) = 3 + 4t$.
> Pour (CD), $X(t) = 5$, $Y(t) = 1 + 6t$.

Exercice V

Pour chacune des cinq droites considérées dans l'exercice IV, déterminer

- une équation cartésienne ;

> (AB) est définie par $y = 3$.
> (AC) est définie par $x + 2y = 7$.
> (BC) est définie par $x + y = 6$.
> (AD) est définie par $x - y = -2$.
> (CD) est définie par $x = 5$.
>
> (Par exemple pour (BC), en utilisant la paramétrage $X(t) = 3 + 2t$ et $Y(t) = 3 - 2t$, on constate que $X(t) + Y(t) = 6$: on a éliminé t de l'expression. Ainsi, tous les points de (BC) appartiennent à la droite d'équation cartésienne $x+y = 6$. Le cours permet de conclure que (BC) est exactement la droite d'équation $x + y = 6$.)

- l'équation réduite.

> (AB) est définie par $y = 3$.
> (AC) est définie par $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.
> (BC) est définie par $y = -x + 6$.
> (AD) est définie par $y = x + 2$.
> (CD) est définie par $x = 5$.

Exercice VI

(1) Avec les notations de l'exercice IV, déterminer les points d'intersections des droites :

- (AB) et (BC) ;

> Il est évident que $(AB) \cap (BC) = \{B\}$.

- (AB) et (CD) ;

> En utilisant les équations cartésiennes des deux droites, on obtient que si $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, alors $(x, y) \in (AB) \cap (CD)$ si et seulement si $y = 3$ et $x = 5$. Autrement dit, $(AB) \cap (CD) = \{E\}$ où $E = (5, 3)$.

- (AD) et (BC) ; $\{(2, 4)\}$

> On cherche $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ vérifiant les deux équations $y = x + 2$ et $y = -x+6$. Il suffit pour cela de déterminer x tel que $x+2 = -x+6$, c'est-à-dire $2x = 4$, ou encore $x = 2$. Le point d'intersection est donc $(2, 4)$.

- (AC) et (BD).

> On connaît l'équation cartésienne $x + 2y = 7$ de (AC). Un paramétrage de (BD) est donné par les formules $X(t) = 3 + 2t$ et $Y(t) = 3 + 4t$. Les points éventuels appartenant à $(AC) \cap (BD)$ sont les $M(t)$ pour $t \in \mathbf{R}$ tel

que $X(t)+2Y(t)=7$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on calcule $X(t)+2Y(t)=9+10t$. On doit donc résoudre l'équation $9+10t = 7$, c'est-à-dire $t = -\frac{1}{5}$. On en déduit que le point d'intersection F de (AC) et (BD) est $M(-\frac{1}{5}) = (\frac{13}{5}, \frac{11}{5})$.

(2) Si on note E le point d'intersection de (AB) et (CD) et F celui de (AC) et (BD), déterminer une équation de la droite (EF).

Parmi les méthodes possibles, on peut commencer par déterminer un vecteur directeur de (EF) : $\overrightarrow{FE} = (5-\frac{13}{5}, 3-\frac{11}{5}) = (\frac{12}{5}, \frac{4}{5})$. On en déduit que le coefficient directeur de (EF) est $\frac{1}{3}$. L'équation cartésienne réduite de (EF) est donc de la forme $y = \frac{1}{3}x + q$ avec $q \in \mathbf{R}$ un coefficient à déterminer. Pour calculer q, on utilise que $E = (5,3) \in (EF)$, c'est-à-dire que $3 = \frac{5}{3} + q$, autrement dit $q = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$. L'équation réduite de (EF) est donc $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$. De façon équivalente, une équation cartésienne de (EF) est $-x+3y-4=0$.

Exercice VII

(1) Représenter graphiquement la droite $\mathscr{D}$ d'équation $3x+4y=12$.

(2) Déterminer une équation cartésienne de la parallèle $\mathscr{D}'$ à $\mathscr{D}$ passant par le point $A=(1,2)$.

Les parallèles à $\mathscr{D}$ ont une équation cartésienne de la forme $3x+4y=c$ pour $c \in \mathbf{R}$. En exigeant que $A=(1,2)$ appartienne à $\mathscr{D}'$, on obtient $c = 11$, donc $\mathscr{D}'$ admet pour équation cartésienne $3x+4y=11$.

(3) Déterminer un paramétrage de $\mathscr{D}'$. $X(t) = 1+4t$, $Y(t) = 2-3t$

Exercice VIII

On note $\mathscr{D}_1$ la droite d'équation $3x+y=-3$ et $\mathscr{D}_2$ celle d'équation $x-y=-5$. Déterminer $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$.

Les équations réduites de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont respectivement $y=-3x-3$ et $y=x+5$. Il s'agit de déterminer d'abord les solutions éventuelles à l'équation d'une variable $-3x-3=x+5$, c'est-à-dire $4x=-8$, autrement dit $x=-2$. Pour conclure, on calcule par exemple $y=-3\cdot(-2)-3=3$. Le point d'intersection de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ est $(-2,3)$.

Exercice IX

On note $\mathscr{D}_1$ la droite d'équation $x+4y=8$ et $\mathscr{D}_2$ celle d'équation $3x+2y=14$. Déterminer $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$. $\{(4,1)\}$

On pourrait appliquer la même méthode que dans l'exercice précédent. Une nouvelle méthode consiste à faire des manipulation sur les équations du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 4y & = & 8 \\ 3x & + & 2y & = & 14 \end{array}\right.$$

Si on note E_1 la première équation et E_2 la deuxième, on peut faire disparaître la variable x de la deuxième équation en faisant l'opération $E_2 \longleftarrow E_2 - 3E_1$, c'est-à-dire quand on retranche aux membres de gauche et de droite de E_2 les membres correspondant de E_1 multipliés par 3. Ici, $(3x+2y)-3(x+4y) = -10y$ et $14-3\cdot 8 = -10$. On obtient ainsi un système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 4y & = & 8 \\ & & -10y & = & -10 \end{array}\right.$$

Manifestement, $y=1$ est l'unique solution à la deuxième équation, et on peut alors substituer cette valeur dans la première équation :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 4 & = & 8 \\ & & y & = & 1 \end{array}\right.$$

On peut conclure que $(4,1)$ est l'unique solution, donc le point d'intersection de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ est $(4,1)$.

Exercice X

Déterminer l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ qui sont solutions du système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x-3y & = & 10 \\ 3x+2y & = & -1 \end{array}\right.$$

$\{(1,-2)\}$

Exercice XI

Déterminer l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ qui sont solutions du système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+5y & = & 3 \\ 3x+5y & = & -5 \end{array}\right.$$

C'est l'ensemble vide.

Exercice XII

Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ qui sont solutions du système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{lll} 4x+5y & = & -4 \\ 6x+7y & = & -5 \end{array}\right.$$

$\{(\frac{3}{2}, -2)\}$

Exercice XIII

(1) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ contenant le point $A = (2, 3)$ et de vecteur directeur $v = (2, 1)$. $x - 2y = -4$. (Méthode : déterminer l'équation $x - 2y = 0$ de la droite vectorielle contenant v, puis remarquer que l'on cherche l'équation d'une parallèle à cette droite, donc il n'y a qu'à ajuster la valeur du coefficient constant pour déterminer l'équation de $\mathscr{D}$.)
(2) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}'$ contenant le point $B = (-1, 6)$ et de vecteur directeur $v = (5, -2)$. $2x + 5y = 28$
(3) Déterminer $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}'$.

{(4,4)}

Exercice XIV

Supposons que $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ soient deux droites sécantes d'équations cartésiennes $F_1(x, y) = 0$ et $F_2(x, y) = 0$ respectivement, où $F_1(x, y)$ et $F_2(x, y)$ sont des applications $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de la forme $F_1(x, y) = a_1x + b_1y + c_1$ et $F_2(x, y) = a_2x + b_2y + c_2$. On note A le point d'intersection de $\mathscr{D}_1$ et de $\mathscr{D}_2$.
(1) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$. On pose $F_3(x, y) := \lambda F_1(x, y) + \mu F_2(x, y)$. Montrer que « $F_3(x, y) = 0$ » est l'équation cartésienne d'une droite $\mathscr{D}_3$ passant par A.
(2) Dans le cas particulier où $A = (x_A, y_A)$, $F_1(x, y) = x - x_A$ et $F_2(x, y) = y - y_A$, montrer que réciproquement, si $\mathscr{D}_3$ est une droite passant par A, alors elle admet une équation de la forme $\lambda F_1(x, y) + \mu F_2(x, y) = 0$ comme dans la question précédente.

Exercice XV

On considère la droite $\mathscr{D}_1$ donnée par le paramétrage $M_1(t) = (t + 2, t + 3)$ et la droite $\mathscr{D}_2$ donnée par le paramétrage $M_2(t) = (2t, 2t + 1)$.
Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont-elles égales ?

Oui, parce qu'elles ont toutes les deux pour équation cartésienne $y = x + 1$.

Exercice XVI

On considère la droite $\mathscr{D}$ donnée par le paramétrage $M(t) = (2 + t, 3 - t)$.
Déterminer un paramétrage de la droite $\mathscr{D}'$ parallèle à $\mathscr{D}$ et passant par le point $(1, 1)$.

Les droites ayant un paramétrage de la forme $M'(t) = (t + a, -t + b)$ avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ sont parallèles à $\mathscr{D}$. Pour $t := 0$, on obtient $M'(0) = (a, b)$, donc en posant $a = b = 1$, on obtient un paramétrage $(t + 1, 1 - t)$ de la droite $\mathscr{D}'$.

Exercice XVII

On fixe deux paramètres $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. On considère le système d'équations, d'inconnues réelles x et y :

$$\left\{\begin{array}{lll} 4x+3y & = & a \\ 3x+2y & = & b \end{array}\right.$$

(1) Déterminer un système d'équations équivalent au précédent et qui soit de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rll} 4x+3y & = & a \\ y & = & \beta \end{array}\right.$$

où β est un nombre réel à déterminer. $\beta = 3a - 4b$
(2) Montrer que le système possède une unique solution (x, y), à exprimer en fonction de a et b. $x = -2a + 3b$, $y = 3a - 4b$