$$
\left(\begin{array}{rrr|l} 3 & -2 & 2 & 15 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 8 \end{array}\right)
$$

$$
\sim \qquad \left[\begin{array}{lcl} L_2 & \longleftarrow & L_2 - \frac{2}{3}L_1 \\ L_3 & \longleftarrow & L_3 - \frac{1}{3}L_1 \end{array}\right]
$$

$$
\left(\begin{array}{rrr|l} 3 & -2 & 2 & 15 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{13}{3} & -11 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 3 \end{array}\right)
$$

$$
\sim \qquad L_3 \longleftarrow L_3 + \frac{1}{7}L_2
$$

$$
\left(\begin{array}{rrr|l} 3 & -2 & 2 & 15 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{13}{3} & -11 \\ 0 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{10}{7} \end{array}\right)
$$

$$
\sim \qquad \left[\begin{array}{lcl} L_1 & \longleftarrow & \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 & \longleftarrow & \frac{3}{7}L_2 \\ L_3 & \longleftarrow & \frac{7}{5}L_3 \end{array}\right]
$$

$$
\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{7} & -\frac{33}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)
$$

$$
\sim \qquad \left[\begin{array}{lcl} L_1 & \longleftarrow & L_1 - \frac{2}{3}L_3 \\ L_2 & \longleftarrow & L_2 + \frac{13}{7}L_3 \end{array}\right]
$$

$$
\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)
$$

$$
\sim \qquad L_1 \longleftarrow L_1 + \frac{2}{3}L_2
$$

$$
\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)
$$

Le système correspondant est compatible, les variables principales sont x_1, x_2 et x_3. Pas de variable secondaire. L'unique solution est $(3, -1, 2)$.

Les calculs sont un peu compliqués à cause des divisions par 3. Sur la page suivante, une résolution alternative est proposée en choisissant un autre pivot.

$$
\left(\begin{array}{rrr|l} 3 & -2 & 2 & 15 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ \color{red}{1} & -1 & 2 & 8 \end{array}\right)
$$

$$
\sim \qquad L_1 \longleftrightarrow L_3
$$

$$
\left(\begin{array}{rrr|l} \color{red}{1} & -1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 15 \end{array}\right)
$$

$$
\sim \qquad \left[\begin{array}{lcl} L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_1 \\ L_3 & \longleftarrow & L_3 - 3L_1 \end{array}\right]
$$

$$
\left(\begin{array}{rrr|l} \color{red}{1} & -1 & 2 & 8 \\ 0 & \color{red}{3} & -7 & -17 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \end{array}\right)
$$

$$
\sim \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - \tfrac{1}{3}L_2
$$

$$
\left(\begin{array}{rrr|l} \color{red}{1} & -1 & 2 & 8 \\ 0 & \color{red}{3} & -7 & -17 \\ 0 & 0 & \color{red}{-\frac{5}{3}} & -\frac{10}{3} \end{array}\right)
$$

$$
\sim \qquad \left[\begin{array}{lcl} L_2 & \longleftarrow & \frac{1}{3}L_2 \\ L_3 & \longleftarrow & -\frac{3}{5}L_3 \end{array}\right]
$$

$$
\left(\begin{array}{rrr|l} \color{red}{1} & -1 & 2 & 8 \\ 0 & \color{red}{1} & -\frac{7}{3} & -\frac{17}{3} \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 2 \end{array}\right)
$$

$$
\sim \qquad \left[\begin{array}{lcl} L_1 & \longleftarrow & L_1 - 2L_3 \\ L_2 & \longleftarrow & L_2 + \frac{7}{3}L_3 \end{array}\right]
$$

$$
\left(\begin{array}{rrr|l} \color{red}{1} & -1 & \color{blue}{0} & 4 \\ 0 & \color{red}{1} & \color{blue}{0} & -1 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 2 \end{array}\right)
$$

$$
\sim \qquad L_1 \longleftarrow L_1 + L_2
$$

$$
\left(\begin{array}{rrr|l} \color{red}{1} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & 3 \\ 0 & \color{red}{1} & \color{blue}{0} & -1 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 2 \end{array}\right)
$$

Le système correspondant est compatible, les variables principales sont x_1, x_2 et x_3. Pas de variable secondaire. L'unique solution est $(3, -1, 2)$.

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\
2 & 4 & 7 & 9 & -3 \\
-1 & -2 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\sim \qquad \left[\begin{array}{lcl}
L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_1 \\
L_3 & \longleftarrow & L_3 + L_1
\end{array}\right]
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 4 & 5 & -1
\end{array}\right)
$$

$$
\sim \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - 4L_2
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 3
\end{array}\right)
$$

$$
\sim \qquad \left[\begin{array}{lcl}
L_1 & \longleftarrow & L_1 - 4L_3 \\
L_2 & \longleftarrow & L_2 - L_3
\end{array}\right]
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 3 & 0 & -13 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 3
\end{array}\right)
$$

$$
\sim \qquad L_1 \longleftarrow L_1 - 3L_2
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 3
\end{array}\right)
$$

Le système est compatible. Les variables principales sont x_1, x_3 et x_4. La variable secondaire est x_2. Pour tout $x_2 \in \mathbf{R}$, il existe d'uniques x_1, x_3 et x_4 tels que (x_1, x_2, x_3, x_4) soit solution :

$$
\left\{\begin{array}{lcl}
x_1 & = & -1 - 2x_2 \\
x_3 & = & -4 \\
x_4 & = & 3
\end{array}\right.
$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{lcl} L_2 & \longleftarrow & L_2 - 3L_1 \\ L_3 & \longleftarrow & L_3 - 5L_1 \end{array} \right]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \qquad L_2 \longleftarrow -\tfrac{1}{2}L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \qquad L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$