Considérons le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

Considérons le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

Sa matrice augmentée est :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$
\left(\begin{array}{rrr|r}
0 & 1 & 2 & 3 \\
1 & 2 & 3 & 4 \\
-2 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$\sim \qquad L_1 \longleftrightarrow L_2$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 2 & 3 \\ {\color{red}1} & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad\qquad L_1 \longleftrightarrow L_2$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} {\color{red}1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_1 \longleftrightarrow L_2$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_3 & \longleftarrow & L_3 + 2L_1 \\ & & \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \bigm| & 3 \\ \color{red}{1} & 2 & 3 & \bigm| & 4 \\ -2 & 1 & 2 & \bigm| & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \bigm| & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \qquad L_1 \longleftrightarrow L_2$$

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 & 3 & \bigm| & 4 \\ 0 & 1 & 2 & \bigm| & 3 \\ -2 & 1 & 2 & \bigm| & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \bigm| & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \qquad \left[L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1 \right]$$

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 & 3 & \bigm| & 4 \\ 0 & 1 & 2 & \bigm| & 3 \\ 0 & 5 & 8 & \bigm| & 9 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \vert & 3 \\ \color{red}{1} & 2 & 3 & \vert & 4 \\ -2 & 1 & 2 & \vert & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vert & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \qquad L_1 \longleftrightarrow L_2$$

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 & 3 & \vert & 4 \\ 0 & 1 & 2 & \vert & 3 \\ -2 & 1 & 2 & \vert & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vert & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \qquad \begin{bmatrix} L_3 & \longleftarrow & L_3 + 2L_1 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 - L_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 & 3 & \vert & 4 \\ 0 & 1 & 2 & \vert & 3 \\ 0 & 5 & 8 & \vert & 9 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_1 \longleftrightarrow L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_3 & \longleftarrow & L_3 + 2L_1 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 - L_1 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ \color{red}{1} & 2 & 3 & | & 4 \\ -2 & 1 & 2 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \qquad L_1 \longleftrightarrow L_2$$

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ -2 & 1 & 2 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \qquad \begin{bmatrix} L_3 & \longleftarrow & L_3 + 2L_1 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 - L_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & \color{red}{1} & 2 & | & 3 \\ 0 & 5 & 8 & | & 9 \\ 0 & -1 & -2 & | & -3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \color{red}{1} & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_3 & \longleftarrow & L_3 - 5L_2 \\ & & \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_3 & \longleftarrow & L_3 - 5L_2 \\ & & \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ & & & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_3 & \longleftarrow & L_3 - 5L_2 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 + L_2 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ & & & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \color{red}{1} & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_3 & \longleftarrow & L_3 - 5L_2 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 + L_2 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \color{red}{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_3 & \longleftarrow & L_3 - 5L_2 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 + L_2 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \quad \left[\begin{array}{lcl} L_3 & \longleftarrow & L_3 - 5L_2 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 + L_2 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left[\begin{array}{ccc} L_3 & \longleftarrow & L_3 - 5L_2 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 + L_2 \end{array}\right]$$

Le système est compatible.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \quad \left[\begin{array}{lcl} L_3 & \longleftarrow & L_3 - 5L_2 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 + L_2 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système est compatible. Les variables principales sont x_1, x_2, x_3.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{lcl} L_3 & \longleftarrow & L_3 - 5L_2 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 + L_2 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système est compatible. Les variables principales sont x_1, x_2, x_3. Pas de variable secondaire.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{lcl} L_3 & \longleftarrow & L_3 - 5L_2 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 + L_2 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système est compatible. Les variables principales sont x_1, x_2, x_3. Pas de variable secondaire. Le système possède une unique solution.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{lcl} L_3 & \longleftarrow & L_3 - 5L_2 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 + L_2 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système est compatible. Les variables principales sont x_1, x_2, x_3. Pas de variable secondaire. Le système possède une unique solution.

$$\sim \qquad L_3 \longleftarrow -\frac{1}{2}L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$\sim$ $\left[\begin{array}{ccc} L_3 & \longleftarrow & L_3 - 5L_2 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 + L_2 \end{array}\right]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système est compatible. Les variables principales sont x_1, x_2, x_3. Pas de variable secondaire. Le système possède une unique solution.

$\sim$ $L_3 \longleftarrow -\frac{1}{2}L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_3 & \longleftarrow & L_3 - 5L_2 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 + L_2 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système est compatible. Les variables principales sont x_1, x_2, x_3. Pas de variable secondaire. Le système possède une unique solution.

$$\sim \qquad L_3 \longleftarrow -\frac{1}{2}L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Les pivots sont maintenant égaux à 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim$$

$$\left[\begin{array}{lcl} L_3 & \longleftarrow & L_3 - 5L_2 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 + L_2 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système est compatible. Les variables principales sont x_1, x_2, x_3. Pas de variable secondaire. Le système possède une unique solution.

$$\sim$$

$$L_3 \longleftarrow -\frac{1}{2}L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Les pivots sont maintenant égaux à 1. Il reste à annuler les coefficients placés au-dessus des pivots.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \color{red}{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 \\
0 & 1 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc}
L_1 & \longleftarrow & L_1 - 3L_3 \\
 & &
\end{array}\right]
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
 & & & \\
 & & & \\
0 & 0 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_1 & \longleftarrow & L_1 - 3L_3 \\ & & \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ & & & \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_1 & \longleftarrow & L_1 - 3L_3 \\ L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_3 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ & & & \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_1 & \longleftarrow & L_1 - 3L_3 \\ L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_3 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 \\
0 & 1 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc}
L_1 & \longleftarrow & L_1 - 3L_3 \\
L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_3
\end{array}\right]
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 2 & 0 & -5 \\
0 & 1 & 0 & -3 \\
0 & 0 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\sim \qquad L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
 & & & \\
0 & 1 & 0 & -3 \\
0 & 0 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_1 & \longleftarrow & L_1 - 3L_3 \\ L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_3 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_1 & \longleftarrow & L_1 - 3L_3 \\ L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_3 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

L'unique solution du système est $(1, -3, 3)$.