École universitaire Paris-Saclay
Année universitaire 2024/2025

Licence de mathématiques
MEU 102 Algèbre et géométrie

Corrigé de l'examen partiel du 21 octobre 2024

Exercice I

Dans le plan $\mathbf{R}^2$, on considère la droite $\mathscr{D}_1$ donnée par le paramétrage

$$M_1(t) = (-5 + 3t, 6 - 2t)$$

pour $t \in \mathbf{R}$, et la droite $\mathscr{D}_2$ donnée par le paramétrage

$$M_2(t) = (-3 + 8t, 1 + 2t)$$

pour $t \in \mathbf{R}$.

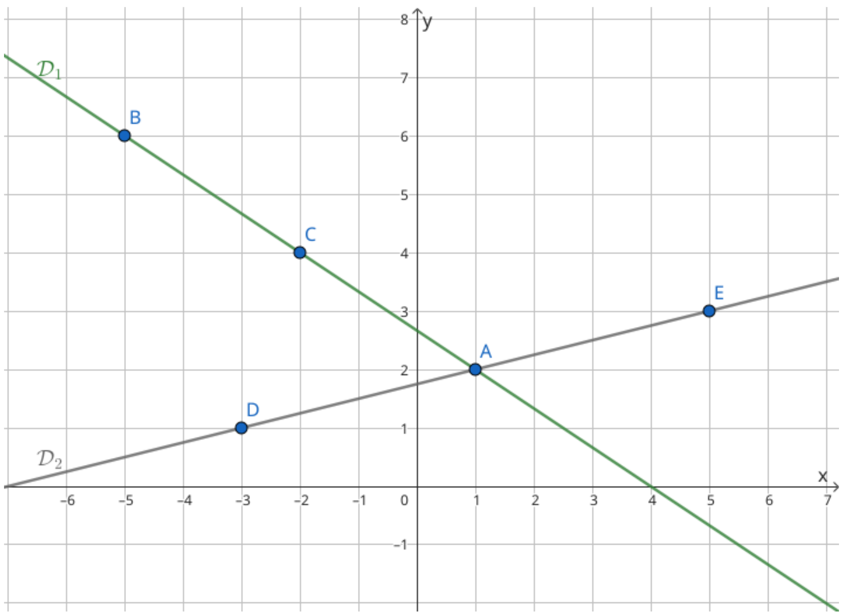
(1) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}_2$.

> On remarque que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $(-3 + 8t) - 4(1 + 2t) = -7$, donc $x - 4y = -7$ est une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}_2$.

(2) Déterminer le point d'intersection A de $\mathscr{D}_1$ et de $\mathscr{D}_2$.

> Soit $t \in \mathbf{R}$. Le point $M_1(t)$ appartient à $\mathscr{D}_2$ si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne déterminée à la question précédente, c'est-à-dire si $(-5 + 3t) - 4(6 - 2t) = -7$. Après calcul, cette condition se reformule en l'égalité $11t - 29 = -7$, qui équivaut à $11t = 22$ ou encore à $t = 2$. Le point d'intersection A de $\mathscr{D}_1$ et de $\mathscr{D}_2$ est donc $A = M_1(2) = (1, 2)$.

(3) Sur une figure, représenter les axes, les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et le point A. Expliquer la méthode utilisée pour tracer les deux droites.

> Une manière de construire les deux droites est d'utiliser les paramétrages. La droite $\mathscr{D}_1$ passe par les points $B := M_1(0) = (-5, 6)$ et $C := M_1(1) = (-2, 4)$. La droite $\mathscr{D}_2$ passe par les points $D := M_2(0) = (-3, 1)$ et $E := M_2(1) = (5, 3)$. (Dans le cas de $\mathscr{D}_2$, comme on dispose déjà d'une équation cartésienne, il serait également possible d'en déduire une équation cartésienne réduite pour tracer la droite.)
>
> 
>

Exercice II

Résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + 4z = 16 \\ 3x + 5y + 8z = 27 \end{cases}$$

Avec l'algorithme du pivot de Gauss, on peut mettre sous forme échelonnée réduite la matrice augmentée associée à ce système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 16 \\ 3 & 5 & 8 & 27 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{lcl} L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_1 \\ L_3 & \longleftarrow & L_3 - 3L_1 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 1 & 1 & 6 \\ 0 & \color{red}{1} & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 1 & 1 & 6 \\ 0 & \color{red}{1} & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{lcl} L_1 & \longleftarrow & L_1 - L_3 \\ L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_3 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 1 & \color{blue}{0} & 5 \\ 0 & \color{red}{1} & \color{blue}{0} & 2 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_1 \longleftarrow L_1 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & 3 \\ 0 & \color{red}{1} & \color{blue}{0} & 2 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 1 \end{array}\right)$$

L'unique solution du système est donc $(3, 2, 1)$.

Exercice III

On considère la matrice augmentée suivante

$$\widehat{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 9 & 2 & 3 & 3 & 8 \end{array}\right)$$

(1) Combien d'équations et combien de variables possède le système d'équations linéaires associé à $\widehat{A}$?

Le système possède trois équations et cinq variables.

(2) En notant les variables x_1, x_2, etc, écrire le système d'équations linéaires associé à $\widehat{A}$.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 4 \\ 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 8 \end{cases}$$

(3) Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice $\widehat{A}$ afin d'obtenir une matrice *échelonnée*.

$$
\begin{array}{ll}
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 9 & 2 & 3 & 3 & 8 \end{array}\right) & \\
\sim & \left[\begin{array}{ccc} L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_1 \\ L_3 & \longleftarrow & L_3 - 3L_1 \end{array}\right] \\
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 9 & -1 \end{array}\right) & \\
\sim & L_3 \longleftarrow L_3 - L_2 \\
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) &
\end{array}
$$

(4) Que peut-on dire de l'ensemble des solutions du système ?

La dernière ligne de la matrice obtenue s'interprète comme l'équation « $0 = 1$ » qui est bien sûr toujours fausse, donc le système ne possède pas de solutions, autrement dit l'ensemble des solutions est vide.

Exercice IV

Dans l'espace $\mathbf{R}^3$, on considère trois plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ donnés par les équations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{P}_1 & = & \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ x+5y+2z=3\} \\ \mathscr{P}_2 & = & \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ -2x-9y+2z=5\} \\ \mathscr{P}_3 & = & \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ x+3y+5z=11\} \end{array}$$

(1) Déterminer un paramétrage $M(t)$ pour $t \in \mathbf{R}$ de la droite $\mathscr{D} := \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$.

> Il s'agit de résoudre le système d'équations donné par les équations de $\mathscr{P}_1$ et de $\mathscr{P}_2$:
>
> $$\begin{array}{ll} \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & -9 & 2 & 5 \end{array}\right) & \\ \sim & L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_1 \\ \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \end{array}\right) & \\ \sim & L_1 \longleftarrow L_1 - 5L_2 \\ \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & -28 & -52 \\ 0 & 1 & 6 & 11 \end{array}\right) & \end{array}$$
>
> Le système est donc équivalent aux deux équations
>
> $$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -52+28z \\ y & = & 11-6z \end{array}\right.$$
>
> La mise sous forme échelonnée nous a permis d'exprimer x et y en fonction de z. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on peut noter $M(t)$ l'unique solution dont la coordonnée z est t, et on obtient ainsi un paramétrage :
>
> $$M(t) = (-52+28t, 11-6t, t)$$

(2) Déterminer l'intersection $\mathscr{D} \cap \mathscr{P}_3$.

> Il s'agit de déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbf{R}$ le point $M(t)$ (de $\mathscr{D}$) appartient à $\mathscr{P}_3$, c'est-à-dire satisfait l'équation $x+3y+5z=11$. On obtient :
>
> $$(-52+28t) + 3(11-6t) + 5t = 15t - 19$$
>
> On doit résoudre l'équation $15t - 19 = 11$, dont $t = 2$ est l'unique solution. Le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan $\mathscr{P}_3$ est donc $M(2) = (4, -1, 2)$.

(3) Quelles sont les solutions du système suivant ? *(Indication : ne pas faire de calculs.)*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 5y & + & 2z & = & 3 \\ -2x & - & 9y & + & 2z & = & 5 \\ x & + & 3y & + & 5z & = & 11 \end{array}\right.$$

> L'ensemble des solution s'interprète comme l'intersection des trois plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$, qui est aussi égale à $\mathscr{D} \cap \mathscr{P}_3$ qui a été déterminé à la question précédente. L'unique solution est donc $(4, -1, 2)$.

Exercice V

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & + & x_6 & = & 3 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & + & 7x_6 & = & -2 \\ & & & & & & & & x_5 & - & 3x_6 & = & 8 \end{array}\right.$$

(1) Quelle est la matrice augmentée de ce système ? Le système est-il compatible, autrement dit admet-il au moins une solution ?

La matrice augmentée est :

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \color{red}{1} & 5 & 2 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 2 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & -3 & 8 \end{array}\right)$$

Le système considéré étant déjà échelonné (la matrice à gauche de la barre verticale est échelonnée), il suffit d'observer qu'il n'y a pas de ligne s'interprétant comme une équation $0 = a$ avec $a \neq 0$ pour pouvoir conclure que le système est compatible.

(2) Quelles sont les variables principales ? Quelles sont les variables secondaires ?

Les variables principales (correspondant aux colonnes où se trouvent les pivots) sont x_1, x_3 et x_5. Les variables secondaires sont x_2, x_4 et x_6.

(3) Résoudre ce système en exprimant les variables principales en fonction des variables secondaires.

Mettons la matrice sous forme échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \color{red}{1} & 5 & 2 & -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 2 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & -3 & 8 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_1 & \longleftarrow & L_1 - 2L_3 \\ L_2 & \longleftarrow & L_2 - 3L_3 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \color{red}{1} & 5 & 2 & -4 & \color{blue}{0} & 7 & -13 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 2 & \color{blue}{0} & 16 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & -3 & 8 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \color{red}{1} & 5 & \color{blue}{0} & -8 & \color{blue}{0} & -25 & 39 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 2 & \color{blue}{0} & 16 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & -3 & 8 \end{array}\right)$$

On peut alors exprimer les solutions :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 39 - 5x_2 + 8x_4 + 25x_6 \\ x_3 & = & -26 - 2x_4 - 16x_6 \\ x_5 & = & 8 + 3x_6 \end{array}\right.$$

(Les variables secondaires x_2, x_4 et x_6 peuvent prendre des valeurs arbitraires.)