École universitaire Paris-Saclay
Année universitaire 2024/2025

Licence de mathématiques
MEU 102 Algèbre et géométrie

DM n°3

Ce devoir à la maison doit être préparé individuellement par chaque étudiant. Suivant les groupes, il doit être remis à votre chargé de TD au cours de la semaine du 9 décembre.

La précision des raisonnements et la qualité de la rédaction compteront de façon significative dans la notation. Il est bien sûr important d'obtenir des résultats et calculs corrects, mais il est au moins aussi important que les justifications essentielles soient données et que les symboles mathématiques soient utilisés correctement.

Exercice I

On considère le système d'équations suivant en les variables x_1, x_2, x_3, x_4, et x_5 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_4 & + & x_5 & = & 11 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 7 \end{array}\right.$$

(1) Résoudre ce système.

(2) Décrire les vecteurs-colonnes $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ correspondant aux solutions de ce système sous forme vectorielle : $X_0 + t_1 V_1 + \cdots + t_d V_d$ avec $(t_1, \ldots, t_d) \in \mathbf{R}^d$ pour un entier d à déterminer. (On souhaite en outre que chaque solution s'écrive de cette façon pour un *unique* $(t_1, \ldots, t_d) \in \mathbf{R}^d$, c'est-à-dire que la famille $(V_1, \ldots, V_d)$ doit être libre.)

Exercice II

On considère l'application $f\colon M_{2,1}(\mathbf{R}) \to M_{2,1}(\mathbf{R})$ définie par la formule suivante pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 \\ 5x_1 + 8x_2 \end{pmatrix}$$

(1) Déterminer la matrice $A \in M_2(\mathbf{R})$ de l'application linéaire f.
(2) On fixe $(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$. Montrer qu'il existe une unique solution $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ au système d'équations linéaires suivant dont les variables (ou inconnues) sont x_1 et x_2 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & 5x_2 & = & y_1 \\ 5x_1 & + & 8x_2 & = & y_2 \end{array}\right.$$

et déterminer une expression de ces x_1 et x_2 en fonction de y_1 et y_2. On note alors $g\colon M_{2,1}(\mathbf{R}) \to M_{2,1}(\mathbf{R})$ l'application définie par $g\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
(3) Déterminer la matrice $B \in M_2(\mathbf{R})$ de l'application linéaire g.
(4) Déterminer la matrice AB.
(5) Déterminer la matrice BA.

Exercice III

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note $f : M_{3,1}(\mathbf{R}) \to M_{3,1}(\mathbf{R})$ l'application linéaire associée à A.

(1) On utilise la notation $X := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pour $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Déterminer l'expression de $f(X)$.
(2) Avec les mêmes notations, calculer $f(f(X))$, puis $f(f(f(X)))$.
(3) Montrer que $A^3 = I_3$ (où $A^3 = A \cdot A \cdot A$).