École universitaire Paris-Saclay
Année universitaire 2024/2025

Licence de mathématiques
MEU 102 Algèbre et géométrie

Corrigé du DM n°2

Exercice I

On considère dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \\ 4x + 11y = 37 \end{cases}$$

(1) Écrire la matrice augmentée correspondant à ce système.

La matrice augmentée est

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & -4 & 13 \\ 4 & 11 & 0 & 37 \end{array}\right)$$

(2) Résoudre le système en appliquant l'algorithme de Gauss.

Avec l'algorithme du pivot de Gauss, on peut mettre sous forme échelonnée réduite la matrice augmentée associée à ce système :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & -4 & 13 \\ 4 & 11 & 0 & 37 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_2 & \longleftarrow & L_2 - L_1 \\ L_3 & \longleftarrow & L_3 - 2L_1 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 - 4L_1 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 12 & 21 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_3 & \longleftarrow & L_3 - L_2 \\ L_4 & \longleftarrow & L_4 - 3L_2 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_3 & \longleftarrow & \frac{-1}{2} L_3 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En revenant au système on en déduit donc que le système est équivalent à

$$\begin{cases} z = & & 1 \\ y = & 7 - 4z & = 3 \\ x = & 4 + 3z - 2y & = 1 \end{cases}$$

(3) Interpréter géométriquement dans $\mathbb{R}^3$ ce qui précède en terme d'intersection de plans dans $\mathbb{R}^3$.

> Chaque équation du système de départ est l'équation d'un plan affine dans $\mathbb{R}^3$. Nous venons de prouver que l'intersection des 4 plans ainsi considérés est réduite au singleton $\{(1,3,1)\}$.

Exercice II

On se donne $n \geq 1$ un entier. Et on considère dans $\mathbb{R}^n$ le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & & & & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & = & 2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & & = & \vdots \\ x_1 & + & x_2 & + & \cdots & + & x_n & = & n \end{array}\right.$$

(1) Écrire la matrice augmentée et résoudre le système en appliquant l'algorithme de Gauss et en explicitant les opérations effectuées. (Indication : commencer si nécessaire par le cas $n = 4$.)

> La matrice augmentée du système est
>
> $$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & & & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & n \end{array}\right).$$
>
> En effectuant les opérations $L_i \longleftarrow L_i - L_1$ pour i entre 2 et n on obtient :
>
> $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & 1 \\ 0 & 1 & & & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & n-1 \end{array}\right).$$
>
> On peut donc recommencer en utilisant le pivot en deuxieme ligne/deuxième colonne, et en effectuant les opérations $L_i \longleftarrow L_i - L_1$ pour i entre 3 et n on obtient :
>
> $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & & & & & 1 \\ 0 & 1 & & & & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & n-2 \end{array}\right).$$
>
> En itérant ce procédé on obtient à la $n-1$-eme itération la matrice :
>
> $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & 1 \\ 0 & 1 & & & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$
>
> On en déduit donc que le système est équivalent à : $x_i = 1$ pour tout i entre 1 et n, donc le n-uplet $(1, \ldots, 1)$ est l'unique solution.

(2) En raisonnant par récurrence donner une méthode permettant d'aboutir plus simplement à la résolution du système sans passer par l'algorithme de Gauss.

On voit sur la première ligne que $x_1 = 1$. Par ailleurs si on se donne k un entier compris entre 2 et n, on voit en écrivant les lignes $k-1$ et k que l'on a :

$$x_1 + \cdots + x_{k-1} = k-1 \text{ et } x_1 + \cdots + x_k = k.$$

Ainsi en soustrayant la ligne $k-1$ à la ligne k on obtient

$$x_k = k - (k-1) = 1.$$

On a donc bien montré que pour tout entier k entre 1 et n on doit avoir $x_k = 1$. Réciproquement le n-uplet $(1, \ldots, 1)$ est clairement solution.

Exercice III

Les matrices A, B, C, D suivantes sont-elles échelonnées (on justifiera les réponses données)? On pourra discuter en fonction de la valeur du paramètre réel a.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Pour la matrice A : si $a \neq 0$ alors la matrice A a 3 pivots en colonnes $1, 2, 3$ et elle est donc échelonnée. Si $a = 0$ elle a deux pivots en colonnes $1, 2$ et la dernière ligne est nulle. Elle est donc là encore échelonnée.
Pour la matrice B : Si $a = 0$ la matrice est échelonnée avec deux pivots en colonnes $1, 2$ (et deux lignes de zéros en lignes $3, 4$). Si $a \neq 0$ alors la matrice n'est pas échelonnée car la ligne 3 est nulle et pas la ligne 4.
Pour la matrice C : Si $a = 0$ la matrice est échelonnée avec trois pivots en colonnes $1, 2, 3$. Si $a \neq 0$ alors ce coefficient a se trouve sous le pivot de la ligne 2 et est non nul donc la matrice n'est pas échelonnée.
Pour la matrice D : Si $a = 0$ la matrice n'est pas échelonnée car la ligne 2 est nulle et pas la ligne 3. Si $a \neq 0$ alors la matrice est échelonnée avec des pivots en colonnes $1, 3, 4$.

Exercice IV

On considère dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & + & 4z & = & 6 \end{array} \right.$$

(1) Donner l'ensemble des solutions de ce système.

La matrice augmentée correspondant à ce système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 6 \end{array} \right)$$

On applique la pivot de Gauss en effectuant $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$. On obtient la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

En multipliant la seconde ligne par $\frac{-1}{3}$ on voit donc que le système est équivalent ̀a

$$\left\{ \begin{array}{lll} y & & = -1 + z \\ x & = 3 - z - 2y & = 5 - 3z \end{array} \right.$$

Il y a donc une infinité de solutions, paramétrées par le $z \in \mathbb{R}$. On reconnait la forme paramétrique d'une droite dans $\mathbb{R}^3$.

(2) Justifier qu'il s'agit d'une droite que l'on explicitera sous forme paramétrique. On notera D_1 cette droite.

> cf. réponse précédente.

(3) On considère par ailleurs la droite D_2 paramétrée par l'ensemble

$$M(t) = (t, 2t - 11, -3t + 15), \quad \text{pour } t \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Déterminer l'intersection $D_1 \cap D_2$.

> Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour que le point $M(t)$ de la droite D_2 soit sur D_1 il faut et il suffit que ses coordonnées soient solutions du système de la première question. On doit donc avoir
>
> $$y(t) = -1 + z(t) \;\text{ et }\; x(t) = 5 - 3z(t).$$
>
> En remplaçant par leurs valeurs on obtient le système en l'inconnue t :
>
> $$2t - 11 = -1 + (-3t + 15) \;\text{ et }\; t = 5 - 3(-3t + 15).$$
>
> Ce système est équivalent à $8t = 40$ et $5t = 25$ dont l'unique solution est $t = 5$. Finalement l'intersection de D_1 et D_2 est un singleton ; c'est le point $(x(5), y(5), z(5)) = (5, -1, 0)$.