École universitaire Paris-Saclay
Année universitaire 2024/2025

Licence de mathématiques
MEU 102 Algèbre et géométrie

Corrigé du DM n°1

Exercice I

Dans le plan $\mathbf{R}^2$, on note $\mathscr{D}_1 = (AB)$ où $A = (5,3)$ et $B = (-4,-3)$.

(1) Déterminer un paramétrage de la droite $\mathscr{D}_1$.

> Un point $M(x,y)$ appartient à la droite $\mathscr{D}_1$ si et seulement s'il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire
> $$\exists t \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} x = 5 - 9t \\ y = 3 - 6t \end{cases} \tag{1}$$

(2) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{D}_1$.

> En notant $X(t) := 5 - 9t$ et $Y(t) := 3 - 6t$, on peut éliminer t en calculant $2X(t) - 3Y(t) = 1$. On en déduit qu'une équation cartésienne de $\mathscr{D}_1$ est $2x - 3y = 1$.)

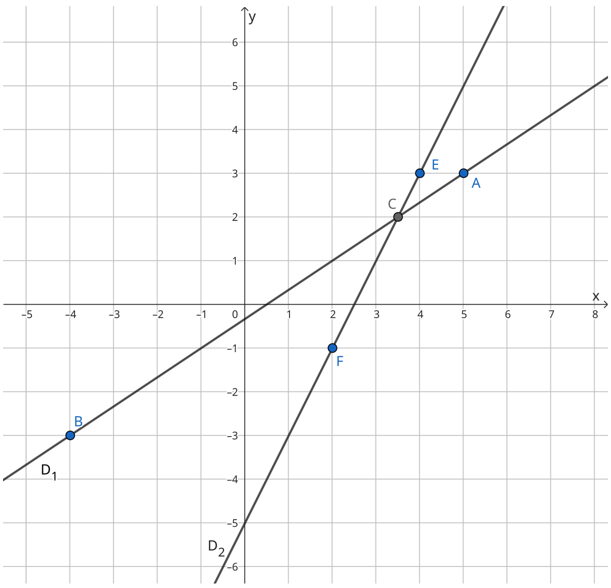
(3) Déterminer l'équation réduite de $\mathscr{D}_1$.

> L'équation réduite de $\mathscr{D}_1$ est $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.

(4) Notons $\mathscr{D}_2$ la droite définie par le paramétrage $(t+4, 2t+3)$ pour t variant dans $\mathbf{R}$. Déterminer le point d'intersection C de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

> Il s'agit de déterminer à quelle condition sur $t \in \mathbf{R}$, le point $M(t) := (t+4, 2t+3)$ appartient à $\mathscr{D}_1$, c'est-à-dire satisfait l'équation $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$, autrement dit vérifie $2t + 3 = \frac{2}{3}(t+4) - \frac{1}{3}$. En multipliant les deux membres de l'égalité par 3, on obtient la condition $6t + 9 = (2t+8) - 1$, qui équivaut à $4t = -2$, c'est-à-dire à $t = -\frac{1}{2}$. Le point d'intersection est donc $C := M(-\frac{1}{2}) = (\frac{7}{2}, 2)$.

(5) Sur une figure, représenter les axes, les points A, B, les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$, le point C. Préciser la méthode utilisée pour tracer $\mathscr{D}_2$.

> 
>
>
> Il suffit de trouver deux points de $\mathscr{D}_2$ pour la tracer. Avec $t = 0$ on obtient le point $E = M(0) = (4,3)$ et pour $t = -2$, le point $F = M(-2) = (2,-1)$.

Exercice II

Dans l'espace $\mathbf{R}^3$, notons $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x-y+z=11$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $2x-y-3z=18$. On note $\mathscr{D}$ l'intersection $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2$.

(1) Déterminer un paramétrage $M(t)=(X(t),Y(t),Z(t))$ pour $t\in\mathbf{R}$ de $\mathscr{D}$. Quelle est la nature géométrique de $\mathscr{D}$?

> Le point $M(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ appartient à $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2$ si et seulement si
>
> $$\begin{cases} x - y + z = 11 \\ 2x - y - 3z = 18 \end{cases}$$
>
> Si on note E_1 et E_2 les deux équations de ce système, on obtient un système en faisant l'opération « $E_2 \longleftarrow E_2-2E_1$ » :
>
> $$\begin{cases} x - y + z = 11 \\ y - 5z = -4 \end{cases}$$
>
> Étant donné $z\in\mathbf{R}$, il existe une unique solution $y=5z-4$ à la deuxième équation, et alors $x=y-z+11=4z+7$ est l'unique possibilité. On en déduit que $M(x,y,z)$ appartient à $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2$ si et seulement si $y=5z-4$ et $x=4z+7$. Ainsi, l'intersection $\mathscr{D}$ de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ est exactement l'ensemble des points de la forme $(4z+7,5z-4,z)$ pour $z\in\mathbf{R}$. On peut faire jouer à z le rôle du paramètre t : on obtient ainsi un paramétrage $M(t)=(X(t),Y(t),Z(t))$ pour $t\in\mathbf{R}$ avec
>
> $$\begin{cases} X(t) = 4t+7 \\ Y(t) = 5t-4 \\ Z(t) = t \end{cases}$$
>
> Bien entendu, $\mathscr{D}$ est une droite.

(2) Donner explicitement les coordonnées de deux points distincts A et B de $\mathscr{D}$.

> On peut choisir par exemple $A:=M(0)=(7,-4,0)$ et $B:=M(1)=(11,1,1)$.

(3) Déterminer l'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan $\mathscr{P}_3$ d'équation $3x-7y-5z=-7$.

> Étant donné $t\in\mathbf{R}$, le point $M(t)$ appartient à $\mathscr{P}_3$ si et seulement si $3X(t)-7Y(y)-5Z(t)=-7$. Le calcul donne $3X(t)-7Y(y)-5Z(t)=3(4t+7)-7(5t-4)-5t=-28t+49$. La condition cherchée sur t est $-28t+49=-7$, c'est-à-dire $28t=56$, autrement dit $t=2$. L'unique point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{P}_3$ est donc $M(2)=(15,6,2)$.

(4) *En utilisant les résultats précédents*, déterminer l'ensemble des solutions (x,y,z) du système linéaire

$$\begin{cases} x - y + z = 11 \\ 2x - y - 3z = 18 \\ 3x - 7y - 5z = -7 \end{cases}$$

> Il s'agit de déterminer l'intersection des trois plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$. Comme $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2=\mathscr{D}$, cela revient à déterminer l'intersection $\mathscr{D}\cap\mathscr{P}_3$, qui est le singleton $(15,6,2)$ d'après la question précédente.

(5) Déterminer l'intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec le plan $\mathscr{P}_4$ d'équation $x+y-9z=5$.

> En procédant comme à la question (3), on calcule $X(t)+Y(t)-9Z(t)=3\neq 5$. L'intersection de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{P}_3$ est donc vide.

(6) Déterminer l'intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec le plan $\mathscr{P}_5$ d'équation $x+y-9z=3$.

D'après le calcul de la question précédente, on a $X(t) + Y(t) - 9Z(t) = 3$, dont $M(t) \in \mathscr{P}_5$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, autrement dit la droite $\mathscr{D}$ est contenue dans le plan $\mathscr{P}_5$. On obtient donc $\mathscr{D} \cap \mathscr{P}_5 = \mathscr{D}$.