Ecole Universitaire Paris Saclay — Année 2023–2024
Licence de Mathématiques — MEU102 Géométrie et Algèbre

Examen du 22 décembre 2023

Durée: 2 heures

Documents et dispositifs électroniques interdits

Exercice 1.— Soit $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. A l'aide de la méthode du pivot, déterminer si A est inversible et, le cas échéant, donner son inverse.
2. Calculer $A \times A$.
3. Pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$, on note $A^k = A \times A \times \cdots \times A$ où figure k fois la matrice A. Déterminer A^k en fonction de k.

Exercice 2.— On note $I \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ la matrice identité, et $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A \times A$.
2. Supposons que A soit inversible, d'inverse $B \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$. Déduire de ce qui précède que $B \times A = A$. Que pouvez vous en conclure?

Exercice 3.— Soit m un réel, et $f_m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f_m(x, y, z) = (-x, 2x - y + 2z, 2x + my + z)$$

1. Donner une matrice A_m telle que, notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $f_m(x, y, z)$ correspond à la matrice $A_m \times X$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de m la matrice A_m est-elle inversible? Dans ce cas, donner son inverse.
3. Combien l'équation $f_{-1}(x, y, z) = (-2, 1, 1)$ a-t-elle de solutions? Combien l'équation $f_{-1/2}(x, y, z) = (-2, 1, 1)$ a-t-elle de solutions?
4. Donner ces solutions.

Exercice 4.—

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R})$ la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Echelonner et réduire la matrice A.

2. On considère le système linéaire suivant:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array} \right.$$

   (a) Combien a-t-il d'inconnues principales?

   (b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ de ses solutions.

3. On note C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5 les vecteurs colonnes de la matrice A, et E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qu'ils engendrent.

   (a) La famille (C_1, C_2, C_3) est-elle libre?

   (b) Pourquoi peut-on affirmer que $E = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_4)$?

   (c) Soit a, b et c trois réels. A quelle condition le vecteur $C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ appartient-il à E?