Corrigé de l'examen du 22 décembre 2023

Exercice 1 (5 points).— Soit $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. A l'aide de la méthode du pivot, déterminer si A est inversible et, le cas échéant, donner son inverse.

Pour simplifier les calculs, on commence par appliquer l'opération élémentaire $L_1 \longleftarrow L_1 + L_3$ de façon à faire apparaître un pivot égal à 1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_1 \longleftarrow L_1 + L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{lcl} L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_1 \\ L_3 & \longleftarrow & L_3 - 4L_1 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{lcl} L_2 & \longleftarrow & -L_2 \\ L_3 & \longleftarrow & -L_3 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_1 \longleftarrow L_1 - L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

On remarque alors que $A^{-1} = A$.

2. Calculer $A \times A$.

Par le calcul, on obtient $A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

Alternativement, on peut déduire directement ce résultat à partir de l'égalité $A^{-1} = A$ obtenue à la question précédente.

3. Pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$, on note $A^k = A \times A \times \cdots \times A$ où figure k fois la matrice A. Déterminer A^k en fonction de k.

Comme $A^2 = I_3$, on obtient que si k est pair, alors $A^k = I_3$, et si k est impair, alors $A^k = A$.

Exercice 2 (4 points).— On note $I \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ la matrice identité, et $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A \times A$.

   Le calcul montre que $A \times A = A$.

2. Supposons que A soit inversible, d'inverse $B \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$. Déduire de ce qui précède que $B \times A = A$. Que pouvez vous en conclure?

   On a $BA = BA^2 = (BA)A = I_3 \times A = A$. Par ailleurs, on a aussi $BA = I_3$, donc $A = I_3$, ce qui est absurde, donc A n'est pas inversible.

Exercice 3 (8 points).— Soit m un réel, et $f_m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f_m(x, y, z) = (-x, 2x - y + 2z, 2x + my + z)$$

1. Donner une matrice A_m telle que, notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $f_m(x, y, z)$ correspond à la matrice $A_m \times X$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$A_m = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & m & 1 \end{pmatrix}$$

2. Pour quelle(s) valeur(s) de m la matrice A_m est-elle inversible? Dans ce cas, donner son inverse.

   Commençons par échelonner la matrice $\left(\begin{array}{c|c} A_m & I_3 \end{array} \right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & m & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_2 & \longleftarrow & L_2 + 2L_1 \\ L_3 & \longleftarrow & L_3 + 2L_1 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_3 \longleftarrow L_3 + mL_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2m+1 & 2m+2 & m & 1 \end{array}\right)$$

   À ce stade, on peut affirmer que A_m est inversible si et seulement si $2m + 1 \neq 0$, c'est-à-dire $m \neq -\frac{1}{2}$. En supposant $m \neq -\frac{1}{2}$, on peut poursuivre le calcul avec les opérations $L_1 \longleftarrow -L_1$, $L_2 \longleftarrow -L_2$ et $L_3 \longleftarrow \frac{1}{2m+1} L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2m+2}{2m+1} & \frac{m}{2m+1} & \frac{1}{2m+1} \end{array}\right)$$

On effectue enfin l'opération $L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{2m+1} & \frac{-1}{2m+1} & \frac{2}{2m+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2m+2}{2m+1} & \frac{m}{2m+1} & \frac{1}{2m+1} \end{array}\right)$$

On peut conclure que si $m \neq -\frac{1}{2}$, alors :

$$A_m^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{2m+1} & \frac{-1}{2m+1} & \frac{2}{2m+1} \\ \frac{2m+2}{2m+1} & \frac{m}{2m+1} & \frac{1}{2m+1} \end{pmatrix}$$

3. Combien l'équation $f_{-1}(x, y, z) = (-2, 1, 1)$ a-t-elle de solutions? Combien l'équation $f_{-1/2}(x, y, z) = (-2, 1, 1)$ a-t-elle de solutions?

Comme $-1 \neq -\frac{1}{2}$, la matrice A_{-1} est inversible, donc l'équation $f_{-1}(x, y, z) = (-2, 1, 1)$ possède une unique solution.

Il n'est pas possible de déterminer si $f_{-1/2}(x, y, z) = (-2, 1, 1)$ possède ou non des solutions en se basant uniquement sur le fait que $A_{-\frac{1}{2}}$ ne soit pas inversible. Appliquons l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\begin{array}{ll} \left(\begin{array}{rrr|l} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{array}\right) & \\ \sim & \left[\begin{array}{lcl} L_2 & \longleftarrow & L_2 + 2L_1 \\ L_3 & \longleftarrow & L_3 + 2L_1 \end{array}\right] \\ \left(\begin{array}{rrr|l} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -3 \end{array}\right) & \\ \sim & L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2 \\ \left(\begin{array}{rrr|l} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) & \end{array}$$

On constate que ce système n'est pas compatible, donc l'équation $f_{-1/2}(x, y, z) = (-2, 1, 1)$ ne possède pas de solution.

4. Donner ces solutions.

Il reste à déterminer l'unique solution à l'équation $f_{-1}(x, y, z) = (-2, 1, 1)$. Elle est donnée par le vecteur-colonne suivant :

$$A_{-1}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 (7 points).—

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R})$ la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Echelonner et réduire la matrice A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\sim \qquad L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\sim \qquad L_3 \longleftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$\sim \qquad \begin{bmatrix} L_2 & \longleftarrow & \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 & \longleftarrow & 2L_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\sim \qquad \begin{bmatrix} L_1 & \longleftarrow & L_1 + L_3 \\ L_2 & \longleftarrow & L_2 + \frac{1}{2}L_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\sim \qquad L_1 \longleftarrow L_1 - L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. On considère le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

(a) Combien a-t-il d'inconnues principales?

D'après le résultat de la première question, ce système a trois variables principales x_1, x_2 et x_4 (et une variable secondaire x_3).

(b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ de ses solutions.

Le système est équivalent aux équations suivantes :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

On obtient un système équivalent en exprimant les variables principales en fonction de x_3 :

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 1 - 2x_3 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

On a donc $\mathcal{S} = \{(-x_3, 1-2x_3, x_3, 2), x_3 \in \mathbb{R}\}$.

3. On note C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5 les vecteurs colonnes de la matrice A, et E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qu'ils engendrent.

   (a) La famille (C_1, C_2, C_3) est-elle libre?

   On peut ne conserver que les trois premières colonnes dans le calcul de la première question, on a ainsi :

$$\left(\; C_1 \mid C_2 \mid C_3 \; \right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   La matrice obtenue est bien échelonnée (réduite), mais ne possède que deux pivots, donc la famille (C_1, C_2, C_3) n'est pas libre.

   Pour aller plus loin, les solutions du système linéaire *homogène* associé aux deux matrices ci-dessus sont exactement les triplets (x_1, x_2, x_3) de réels tels que $x_1C_1 + x_2C_2 + x_3C_3 = 0$. D'après la matrice échelonnée réduite ci-dessus, ce système est équivalent à $x_1 = -x_3$ et $x_2 = -2x_3$. En faisant $x_3 := -1$, on obtient la solution non triviale $(1, 2, -1)$, autrement dit $C_1+2C_2-C_3 = 0$, ou encore $C_3 = C_1+2C_2$, ce qui montre que la famille est liée.

   (b) Pourquoi peut-on affirmer que $E = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_4)$?

   En procédant de même, on obtient :

$$\left(\; C_1 \mid C_2 \mid C_4 \; \right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   On obtient cette fois-ci que la famille (C_1, C_2, C_4) est libre. Comme elle est formée de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, cette famille est également une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$. En particulier, les vecteurs C_3 et C_5 sont des combinaisons linéaires de C_1, C_2 et C_4. Ceci permet de conclure que $E = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_4) = \mathbb{R}^3$.

   (c) Soit a, b et c trois réels. A quelle condition le vecteur $C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ appartient-il à E?

   On a montré que $E = \mathbb{R}^3$, donc tout vecteur $C \in \mathbb{R}^3$ appartient E.