

**Examen partiel du 25 octobre 2023 – durée : deux heures**

*Documents et calculatrices interdits.*

Il sera tenu compte dans la notation de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. En particulier, lorsque vous effectuez des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice, ou sur les équations d'un système linéaire, **vous devez impérativement préciser ces opérations sur votre copie.**

**Exercice I**

Dans le plan  $\mathbf{R}^2$ , on considère la droite  $\mathcal{D}_1$  donnée par le paramétrage

$$M_1(t) = (-1 + 5t, 2 - 2t)$$

pour  $t \in \mathbf{R}$ , et la droite  $\mathcal{D}_2$  donnée par le paramétrage

$$M_2(t) = (3 + t, 4 + 2t)$$

pour  $t \in \mathbf{R}$ .

- (1) Déterminer une équation cartésienne de la droite  $\mathcal{D}_1$ .
- (2) Déterminer le point d'intersection  $A$  de  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .
- (3) Sur une figure, représenter les axes, les droites  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  et le point  $A$ . Expliquer la méthode utilisée pour tracer les deux droites.

**Exercice II**

Dans  $\mathbf{R}^3$ , on considère le plan  $\mathcal{P}_1$  d'équation  $3x + y + 5z = 2$  et le plan  $\mathcal{P}_2$  d'équation  $x - y + 3z = -2$ . Déterminer un paramétrage de la droite  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ .

**Exercice III**

Dans  $\mathbf{R}^3$ , on note  $\mathcal{P}$  le plan d'équation  $x + 2y + 3z = 6$ .

- (1) Notons  $\mathcal{D}_1$  la droite donnée par le paramétrage  $M_1(t) = (t, t, t)$ . Déterminer l'intersection  $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}_1$ .
- (2) Notons  $\mathcal{D}_2$  la droite donnée par le paramétrage  $M_2(t) = (t + 2, t + 1, -t)$ . Déterminer l'intersection  $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}_2$ .
- (3) Notons  $\mathcal{D}_3$  la droite donnée par le paramétrage  $M_3(t) = (3t + 1, 1, 1 - t)$ . Déterminer l'intersection  $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}_3$ .

**Exercice IV**

Résoudre le système d'équations linéaires associé à la matrice complète suivante :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 2 \\ -2 & -3 & -2 & 5 \end{array} \right)$$

### Exercice V

Supposons que la matrice augmentée (ou complète, c'est la même chose) d'un système d'équations linéaires soit de la forme suivante

$$M = \left( \begin{array}{cccc|c} \blacksquare & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \blacksquare & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \blacksquare & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \star \end{array} \right)$$

où,

- chaque occurrence du symbole  $\star$  peut être remplacée par un coefficient arbitraire (qui *peut* être nul);
- chaque occurrence du symbole  $\blacksquare$  doit être remplacée par un coefficient *non nul* arbitraire.

(1) Quel est le nombre de variables dans ce système d'équations linéaires?

(On notera  $x_1, \dots, x_n$  ces variables.)

(2) Peut-on dire si le système possède ou non des solutions (c'est-à-dire s'il est compatible ou non)? Quelle information supplémentaire serait nécessaire pour le savoir? Discuter les différents cas.

Dans les questions suivantes, on suppose que  $M$  est la matrice suivante :

$$M = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

(3) En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de  $M$ , déterminer une matrice équivalente  $M'$  qui soit échelonnée réduite.

(4) Écrire le système d'équations en les variables  $x_1, x_2, \dots$  correspondant à la matrice  $M'$ .

(5) Quelles sont les variables principales? Quelles sont les variables secondaires?

(6) Décrire les solutions en écrivant les variables principales en fonction des variables secondaires.

(7) Le système possède-t-il une unique solution ou bien une infinité de solutions?

### Exercice VI

(1) Mettre sous forme échelonnée la matrice suivante

$$M = \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

On notera  $M'$  la matrice obtenue.

(2) Déterminer les solutions du système d'équations correspondant à la matrice complète  $M$ .