École universitaire Paris-Saclay
Année universitaire 2023/2024

Licence de mathématiques
MEU 102 Algèbre et géométrie

Corrigé de l'examen partiel du 25 octobre 2023

Exercice I

Dans le plan $\mathbf{R}^2$, on considère la droite $\mathscr{D}_1$ donnée par le paramétrage

$$M_1(t) = (-1+5t, 2-2t)$$

pour $t \in \mathbf{R}$, et la droite $\mathscr{D}_2$ donnée par le paramétrage

$$M_2(t) = (3+t, 4+2t)$$

pour $t \in \mathbf{R}$.

(1) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}_1$.

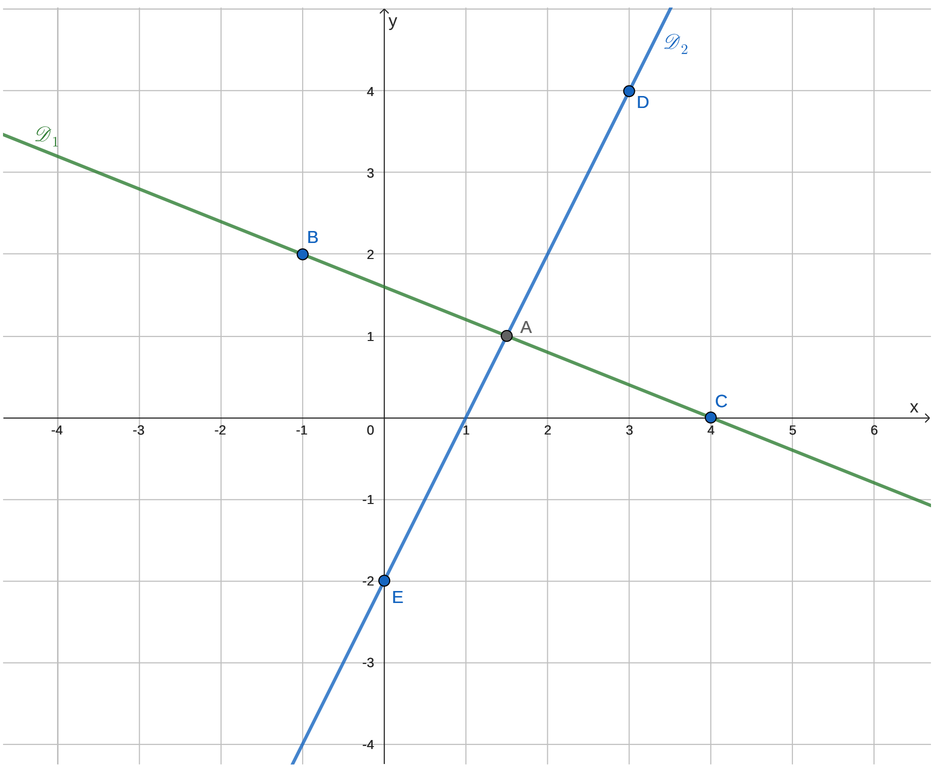
> On remarque que $2(-1+5t)+5(2-2t) = 8$. On en déduit que la droite $\mathscr{D}_1$ admet $2x+5y = 8$ comme équation cartésienne.

(2) Déterminer le point d'intersection A de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

> Soit $t \in \mathbf{R}$. Le point $M_2(t)$ appartient à $\mathscr{D}_1$ si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne déterminée à la question précédente, c'est-à-dire si $2(3+t)+5(4+2t) = 8$. Cette condition est équivalente à l'égalité $26+12t = 8$, dont l'unique solution est $t = -\frac{18}{12} = -\frac{3}{2}$. Le point d'intersection A de $\mathscr{D}_1$ et de $\mathscr{D}_2$ est donc $A = M_2(-\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2}, 1)$.

(3) Sur une figure, représenter les axes, les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et le point A. Expliquer la méthode utilisée pour tracer les deux droites.

> Une manière de construire les deux droites est d'utiliser les paramétrages. La droite $\mathscr{D}_1$ passe par les points $B := M_1(0) = (-1, 2)$ et $C := M_1(1) = (4, 0)$. La droite $\mathscr{D}_2$ passe par les points $D := M_2(0) = (3, 4)$ et $E := M_2(-3) = (0, -2)$.



Exercice II

Dans $\mathbf{R}^3$, on considère le plan $\mathscr{P}_1$ d'équation $3x + y + 5z = 2$ et le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation $x - y + 3z = -2$. Déterminer un paramétrage de la droite $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$.

> Il s'agit de résoudre le système suivant, dans lequel on a échangé l'ordre des deux équations :
>
> $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 3z & = & -2 \\ 3x & + & y & + & 5z & = & 2 \end{array}\right.$$
>
> Si on note (E_1) et (E_2) les équations, on peut effectuer l'opération $E_2 \longleftarrow E_2 - 3E_1$ pour obtenir un système équivalent :
>
> $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 3z & = & -2 \\ & & 4y & - & 4z & = & 8 \end{array}\right.$$
>
> En divisant par 4 la dernière équation, on obtient :
>
> $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 3z & = & -2 \\ & & y & - & z & = & 2 \end{array}\right.$$
>
> Il est clair que pour tout $z \in \mathbf{R}$, il existe d'uniques (x, y) tels que (x, y, z) soit solution :
>
> $$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 2 + z \\ x & = & -2 + y - 3z = z - 3z = -2z \end{array}\right.$$
>
> On en déduit que $M(t) := (-2t, 2+t, t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ est un paramétrage de la droite $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$.

Exercice III

Dans $\mathbf{R}^3$, on note $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x + 2y + 3z = 6$.

(1) Notons $\mathscr{D}_1$ la droite donnée par le paramétrage $M_1(t) = (t, t, t)$. Déterminer l'intersection $\mathscr{P} \cap \mathscr{D}_1$.

> Les points d'intersections éventuels sont les points de la forme $M_1(t)$ pour les éventuels $t \in \mathbf{R}$ tels que $M_1(t) \in \mathscr{P}$, c'est-à-dire vérifiant l'équation $t + 2t + 3t = 6$, qui admet $t = 1$ comme unique solution. On en déduit $\mathscr{P} \cap \mathscr{D}_1 = \{M_1(1)\}$ et on a $M_1(1) = (1, 1, 1)$.

(2) Notons $\mathscr{D}_2$ la droite donnée par le paramétrage $M_2(t) = (t + 2, t + 1, -t)$. Déterminer l'intersection $\mathscr{P} \cap \mathscr{D}_2$.

> En procédant de même, on s'intéresse ici à l'équation $(t + 2) + 2(t + 1) + 3(-t) = 6$, qui est équivalente à $4 = 6$, qui ne fait plus intervenir t et qui est donc toujours fausse. On en déduit que l'intersection $\cap \mathscr{D}_2$ est vide.

(3) Notons $\mathscr{D}_3$ la droite donnée par le paramétrage $M_3(t) = (3t + 1, 1, 1 - t)$. Déterminer l'intersection $\mathscr{P} \cap \mathscr{D}_3$.

> De même, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on cherche à savoir si $M_3(t)$ appartient à $\mathscr{P}$, c'est-à-dire si $(3t + 1) + 2 + 3(1 - t) = 6$. Comme cette équation équivaut à $6 = 6$, elle est toujours vraie, quel que soit t. Ainsi, pour tout $t \in \mathbf{R}$, le point $M_3(t)$ appartient à $\mathscr{P}$, ce qui signifie que la droite $\mathscr{D}_3$ est contenue dans le plan $\mathscr{P}$. Ainsi, $\mathscr{P} \cap \mathscr{D}_3 = \mathscr{D}_3$.

Exercice IV

Résoudre le système d'équations linéaires associé à la matrice complète suivante :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 2 \\ -2 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right)$$

On peut appliquer la méthode du pivot de Gauss pour mettre le système sous forme échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 2 \\ -2 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{lcl} L_2 & \longleftarrow & L_2 - 3L_1 \\ L_3 & \longleftarrow & L_3 + 2L_1 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \color{red}{-1} & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \color{red}{-1} & -3 & -10 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_2 \longleftarrow -L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \color{red}{1} & 3 & 10 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{lcl} L_1 & \longleftarrow & L_1 - 3L_3 \\ L_2 & \longleftarrow & L_2 - 3L_3 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 2 & \color{blue}{0} & -5 \\ 0 & \color{red}{1} & \color{blue}{0} & 1 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & -7 \\ 0 & \color{red}{1} & \color{blue}{0} & 1 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 3 \end{array}\right)$$

Ce résultat montre que l'unique solution du système considéré est $(-7, 1, 3)$.

Exercice V

Supposons que la matrice augmentée (ou complète, c'est la même chose) d'un système d'équations linéaires soit de la forme suivante

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \blacksquare & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \blacksquare & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \star \end{array}\right)$$

où,

- chaque occurrence du symbole $\star$ peut être remplacée par un coefficient arbitraire (qui *peut* être nul) ;
- chaque occurrence du symbole $\blacksquare$ doit être remplacée par un coefficient *non nul* arbitraire.

(1) Quel est le nombre de variables dans ce système d'équations linéaires ?

> Le système possède 4 variables.

(On notera $x_1, \ldots, x_n$ ces variables.)

(2) Peut-on dire si le système possède ou non des solutions (c'est-à-dire s'il est compatible ou non) ? Quelle information supplémentaire serait nécessaire pour le savoir ? Discuter les différents cas.

> On ne dispose pas de suffisamment d'informations pour savoir si le système est compatible. Le système est compatible si et seulement si le dernier coefficient de la dernière ligne est nul.

Dans les questions suivantes, on suppose que M est la matrice suivante :

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(3) En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de M, déterminer une matrice équivalente M' qui soit échelonnée réduite.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \color{red}{1} & 3 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & \color{red}{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_1 & \longleftarrow & L_1 - 5L_3 \\ L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_3 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \color{red}{1} & 3 & \color{blue}{0} & -2 & -5 \\ 0 & \color{red}{1} & \color{blue}{0} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_1 \longleftarrow L_1 - 3L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \color{red}{1} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & 1 & 1 \\ 0 & \color{red}{1} & \color{blue}{0} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

> La dernière matrice M' obtenue est bien échelonnée réduite.

(4) Écrire le système d'équations en les variables $x_1, x_2, \ldots$ correspondant à la matrice M'.

Le système d'équations correspondant à M' est :

$$\begin{cases} x_1 & & & + & x_4 & = & 1 \\ & x_2 & & - & x_4 & = & -2 \\ & & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

(La dernière équation peut bien sûr être omise.)

(5) Quelles sont les variables principales ? Quelles sont les variables secondaires ?

Les variables principales sont x_1, x_2 et x_3. La variable secondaire est x_4.

(6) Décrire les solutions en écrivant les variables principales en fonction des variables secondaires.

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 - x_4 \\ x_2 & = & -2 + x_4 \\ x_3 & = & 3 - 2x_4 \end{cases}$$

(7) Le système possède-t-il une unique solution ou bien une infinité de solutions ?

Le système possède une infinité de solutions puisque pour chaque valeur de $x_4 \in \mathbf{R}$, il existe un unique triplet (x_1, x_2, x_3) tel que (x_1, x_2, x_3, x_4) soit solution.

Exercice VI

(1) Mettre sous forme échelonnée la matrice suivante

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

On notera M' la matrice obtenue.

On remarque qu'il suffit de renverser l'ordre des lignes pour mettre la matrice sous forme échelonnée :

$$M' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(2) Déterminer les solutions du système d'équations correspondant à la matrice complète M.

Le système a été mis sous forme échelonnée. Le système est manifestement compatible. Comme toutes les variables sont principales, le système possède une unique solution (x_1, x_2, x_3, x_4) que l'on peut déterminer :

$$\begin{cases} x_4 & = & 1 \\ x_3 & = & 2 - x_4 = 1 \\ x_2 & = & 3 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 & = & 4 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

L'unique solution est $(1, 1, 1, 1)$.