École universitaire Paris-Saclay
Année universitaire 2022/2023

Licence de mathématiques
MEU 102 Algèbre et géométrie

Examen du 4 janvier 2023 – durée : deux heures

Documents et calculatrices interdits.

Lorsque vous effectuez des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice, ou sur les équations d'un système linéaire, **vous devez impérativement préciser ces opérations sur votre copie**.

Exercice I

Pour chacune des matrices suivantes, indiquez si elle est inversible ou non. Dans chacun des cas, donnez une brève justification.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice II

(1) Déterminer l'inverse de la matrice suivante :

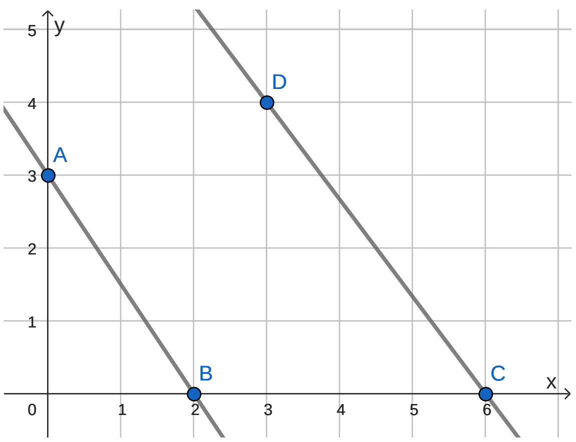
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

(2) Déterminer explicitement un vecteur-colonne $X \in M_{3,1}(\mathbf{R})$ tel que $MX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(3) En calculant coefficient par coefficient le produit matriciel MX, *vérifier* que le vecteur X trouvé à la question précédente satisfait bien la condition demandée. (Si vous obtenez un résultat incohérent, revenez à la première question.)
(4) Déterminer des coefficients réels a, b et c tels que :

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice III



(1) Déterminer les coordonnées (entières) des points A, B, C, D.
(2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
(3) Déterminer un paramétrage de la droite (CD).
(4) Déterminer le point d'intersection E des droites (AB) et (CD).
(5) Déterminer le point d'intersection F des droites (AD) et (BC).

Exercice IV

Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & + & 2x_5 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & = & -4 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & + & 5x_5 & = & 9 \end{array}\right.$$

Exercice V

Dans l'espace, on considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $3x - y + 2z = 7$. Pour tout $u \in \mathbf{R}$, on note $\mathscr{P}'_u$ le plan d'équation $x + 2y + 3z = u$. Pour tout $u \in \mathbf{R}$, on note $\mathscr{D}_u := \mathscr{P} \cap \mathscr{P}'_u$.

(1) Pour tout $u \in \mathbf{R}$, déterminer un paramétrage $M_u(t) = (X_u(t), Y_u(t), Z_u(t))$ de la droite $\mathscr{D}_u$.

(2) Pour tout $u \in \mathbf{R}$, déterminer un vecteur directeur de $\mathscr{D}_u$.

(3) Déterminer explicitement deux points A et B de $\mathbf{R}^3$ tels que $\mathscr{D}_5 = (AB)$.

(4) Déterminer l'intersection $\mathscr{D}_5 \cap \mathscr{D}_{2023}$.

(5) Déterminer l'intersection de $\mathscr{D}_5$ avec le plan d'équation $z = 0$.

Exercice VI

Soit M une matrice carrée de taille $n \geq 1$. On suppose que M satisfait l'égalité $M^2 = 2M - \mathbf{I}_n$.

(1) On note $N := 2\mathbf{I}_n - M$. Montrer que M est inversible et que N est son inverse.

(2) Considérons la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2a) Calculer A^2 et $2A - \mathbf{I}_3$.

(2b) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.