École universitaire Paris-Saclay
Année universitaire 2022/2023

Licence de mathématiques
MEU 102 Algèbre et géométrie

Corrigé de l'examen du 4 janvier 2023

Exercice I

Pour chacune des matrices suivantes, indiquez si elle est inversible ou non. Dans chacun des cas, donnez une brève justification.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- On a $\det A = 4 \cdot 5 + 2 \cdot 10 = 40 \neq 0$, donc A est inversible.
- Comme $\det B = 0$, la matrice B n'est pas inversible.
- La troisième colonne de C est nulle, donc C n'est pas inversible. (Pour plus de détails, si C admettait une inverse C^{-1}, alors $C^{-1}C = \mathbf{I}_3$, ce qui n'est pas possible parce que la troisième colonne de $C^{-1}C$ devrait aussi être nulle.)
- La matrice D est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux tous non nuls, donc D est inversible.

Exercice II

(1) Déterminer l'inverse de la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

On applique l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice suivante :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \color{red}{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \begin{bmatrix} L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_1 \\ L_3 & \longleftarrow & L_3 - 3L_1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \color{red}{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{-1} & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \color{red}{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{-1} & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_2 \longleftarrow -L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \color{red}{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \begin{bmatrix} L_1 & \longleftarrow & L_1 - 3L_3 \\ L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_3 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \color{red}{1} & 2 & \color{blue}{0} & -2 & 6 & -3 \\ 0 & \color{red}{1} & \color{blue}{0} & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vline & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vline & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \vline & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2$$

L'inverse est donc $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) Déterminer explicitement un vecteur-colonne $X \in M_{3,1}(\mathbf{R})$ tel que $MX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

L'unique possibilité est $X := M^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(3) En calculant coefficient par coefficient le produit matriciel MX, *vérifier* que le vecteur X trouvé à la question précédente satisfait bien la condition demandée. (Si vous obtenez un résultat incohérent, revenez à la première question.)
(4) Déterminer des coefficients réels a, b et c tels que :

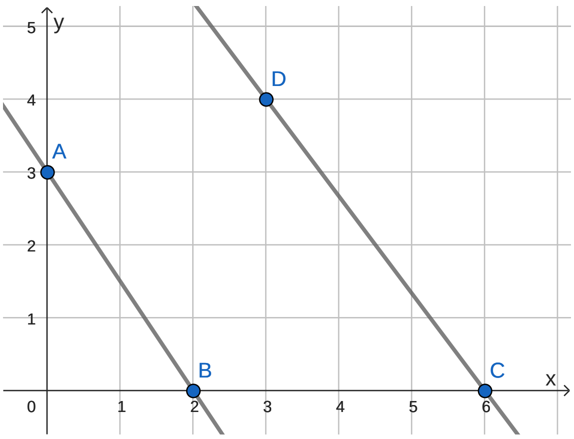
$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il suffit de calculer

$$M^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'unique possibilité est $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$.

Exercice III



(1) Déterminer les coordonnées (entières) des points A, B, C, D.

$A = (0, 3)$, $B = (2, 0)$, $C = (6, 0)$, $D = (3, 4)$.

(2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

> En considérant l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur de la droite (AB), on obtient que $y = 3 - \frac{3}{2}x$ est l'équation cartésienne réduite de (AB).

(3) Déterminer un paramétrage de la droite (CD).

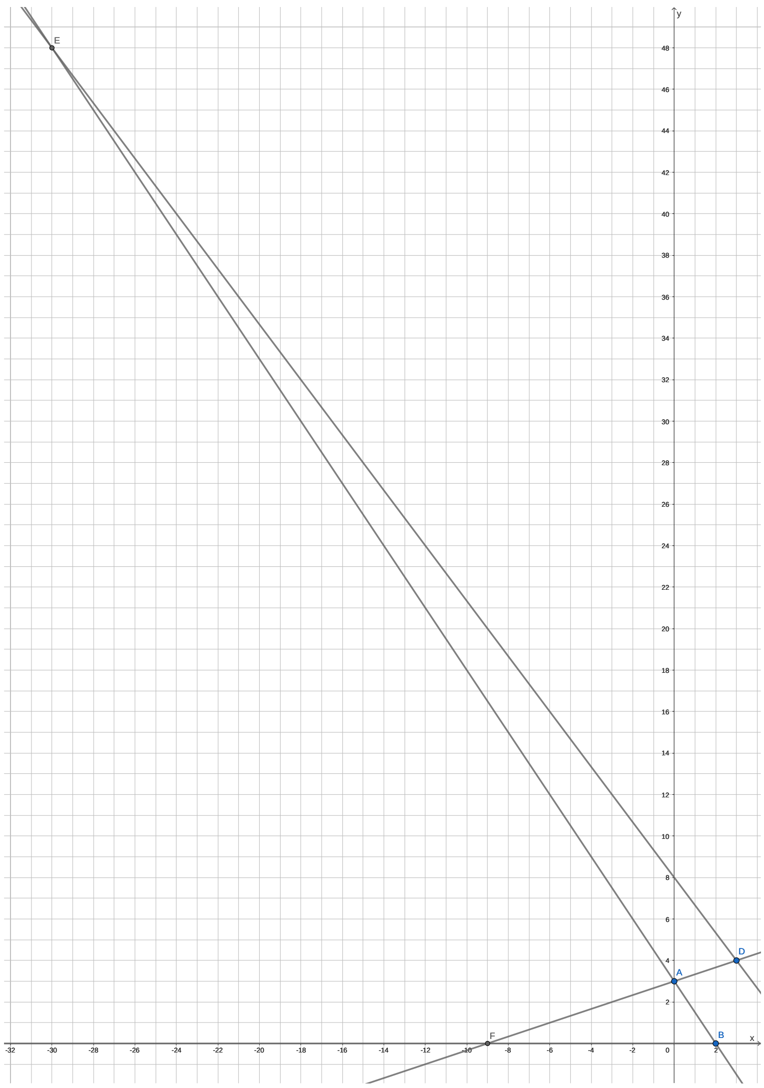
> Pour tout $t \in \mathbf{R}$, notons $M(t)$ le point défini par $\overrightarrow{CM(t)} = t\overrightarrow{CD}$. On en déduit le paramétrage $M(t) = (6 - 3t, 4t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ de la droite (CD).

(4) Déterminer le point d'intersection E des droites (AB) et (CD).

> Le point d'intersection E, s'il existe, est l'unique point $M(t)$ tel que les coordonnées de $M(t)$ satisfont l'équation cartésienne de (AB) qui a été déterminée plus haut. La condition sur t est donc $4t = 3 - \frac{3}{2} \cdot (6 - 3t)$, c'est-à-dire $4t = -6 + \frac{9}{2}t$, autrement dit $6 = \frac{t}{2}$. L'unique solution est $t = 12$. Le point d'intersection E est donc $E = M(12) = (-30, 48)$.

(5) Déterminer le point d'intersection F des droites (AD) et (BC).

> L'équation cartésienne réduite de la droite (AD) est $y = 3 + \frac{1}{3}x$, tandis que celle de (BC) est $y = 0$. On en déduit immédiatement que le point d'intersection F est $(-9, 0)$.



Exercice IV

Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & + & 2x_5 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & = & -4 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & + & 5x_5 & = & 9 \end{array}\right.$$

On applique l'algorithme du pivot de Gauss pour mettre sous forme échelonnée réduite la matrice suivante :

$$\left(\begin{array}{ccccr|l} 1 & 3 & 2 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 9 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_2 & \longleftarrow & L_2 - 2L_1 \\ L_3 & \longleftarrow & L_3 - L_1 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{cccrr|l} 1 & 3 & 2 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_2 \longleftrightarrow L_3$$

$$\left(\begin{array}{cccrr|l} 1 & 3 & 2 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -7 & -14 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_3 \longleftarrow -\tfrac{1}{7}L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|l} 1 & 3 & 2 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \left[\begin{array}{ccc} L_1 & \longleftarrow & L_1 - 4L_3 \\ L_2 & \longleftarrow & L_2 - L_3 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccccr|l} 1 & 3 & 2 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccccr|l} 1 & 3 & 0 & 0 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Le système est compatible, les variables principales sont x_1, x_3 et x_4. Les variables secondaires sont x_2 et x_5. On peut donner les solutions en exprimant les variables principales en fonction des variables secondaires :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & -7 - 3x_2 + 6x_5 \\ x_3 & = & 2 - 2x_5 \\ x_4 & = & 2 - x_5 \end{array}\right.$$

Exercice V

Dans l'espace, on considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $3x - y + 2z = 7$. Pour tout $u \in \mathbf{R}$, on note $\mathscr{P}'_u$ le plan d'équation $x + 2y + 3z = u$. Pour tout $u \in \mathbf{R}$, on note $\mathscr{D}_u := \mathscr{P} \cap \mathscr{P}'_u$.

(1) Pour tout $u \in \mathbf{R}$, déterminer un paramétrage $M_u(t) = (X_u(t), Y_u(t), Z_u(t))$ de la droite $\mathscr{D}_u$.

> Déterminer $\mathscr{D}_u$ revient à résoudre le système d'équations suivant d'inconnues x, y et z :
>
> $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & u \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \end{array}\right.$$
>
> En faisant $L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1$, on obtient le système équivalent :
>
> $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & u \\ & - & 7y & - & 7z & = & 7-3u \end{array}\right.$$
>
> On peut obtenir un paramétrage en exprimant x et y en fonction de $t := z$:
>
> $$Z_u(t) = t \qquad Y_u(t) = -t - 1 + \frac{3u}{7} \qquad X_u(t) = u - 2Y_u(t) - 3t = -t + 2 + \frac{u}{7}$$

(2) Pour tout $u \in \mathbf{R}$, déterminer un vecteur directeur de $\mathscr{D}_u$.

> D'après le paramétrage qui a été déterminé, $(-1, -1, 1)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_u$, pour tout $u \in \mathbf{R}$.

(3) Déterminer explicitement deux points A et B de $\mathbf{R}^3$ tels que $\mathscr{D}_5 = (AB)$.

> On peut prendre par exemple $A := M_5(0) = (\frac{19}{7}, \frac{8}{7}, 0)$ et $B := M_5(1) = (\frac{12}{7}, \frac{1}{7}, 1)$.

(4) Déterminer l'intersection $\mathscr{D}_5 \cap \mathscr{D}_{2023}$.

> D'après la détermination qui a été faite d'un vecteur directeur des droites $\mathscr{D}_u$, on obtient que $\mathscr{D}_5$ et $\mathscr{D}_{2023}$ sont parallèles. On s'attend donc à ce que leur intersection soit vide. En effet, cette intersection est contenue dans l'intersection des deux plans parallèles distincts $\mathscr{P}'_5$ et $\mathscr{P}'_{2023}$. L'intersection cherchée est donc vide.

(5) Déterminer l'intersection de $\mathscr{D}_5$ avec le plan d'équation $z = 0$.

> Il suffit de faire $t := 0$ dans le paramétrage $M_5(t)$ déterminé plus haut. On obtient que l'unique point d'intersection est $M_5(0) = (\frac{19}{7}, \frac{8}{7}, 0)$.

Exercice VI

Soit M une matrice carrée de taille $n \geq 1$. On suppose que M satisfait l'égalité $M^2 = 2M - \mathbf{I}_n$.

(1) On note $N := 2\mathbf{I}_n - M$. Montrer que M est inversible et que N est son inverse.

> Calculons $M \cdot N = M \cdot (2\mathbf{I}_n - M) = 2M - M^2 = 2M - (2M - \mathbf{I}_n) = \mathbf{I}_n$. Comme M est une matrice carrée, on en déduit que M est inversible et d'inverse N.

(2) Considérons la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2a) Calculer A^2 et $2A - \mathbf{I}_3$.

> On obtient :
> $$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2A - \mathbf{I_n}$$

(2b) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

> On peut appliquer le résultat de la question (1) à la matrice $M := A$. On en déduit que A est inversible et que
> $$A^{-1} = 2\mathbf{I}_n - M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$