École universitaire Paris-Saclay
Année universitaire 2022/2023

Licence de mathématiques
MEU 102 Algèbre et géométrie

Examen partiel du 24 octobre 2022 – durée : deux heures

Documents et calculatrices interdits.

Il sera tenu compte dans la notation de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. En particulier, lorsque vous effectuez des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice, ou sur les équations d'un système linéaire, **vous devez impérativement préciser ces opérations sur votre copie**.

Exercice I

Sans faire de longs calculs, déterminer un vecteur non nul $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tel que $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, où A est la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -5 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice II

(1) Résoudre le système linéaire suivant de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$$

On notera $A \in \mathbf{R}^2$ le point obtenu.

On considère la droite $\mathscr{D}_1$ paramétrée par $M_1(t) := (-1 + 3\,t,\ t)$ avec $t \in \mathbf{R}$ arbitraire.

(2) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{D}_1$.

On considère aussi la droite $\mathscr{D}_2$ paramétrée par $M_2(t) := (3t + 2, -2t + 1)$ avec $t \in \mathbf{R}$ arbitraire.

(3) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{D}_2$.

(4) Déterminer l'intersection $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$.

(5) Donner des vecteurs directeurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ des deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$, ainsi que deux points $\mathscr{P}_1 \in \mathscr{D}_1$ et $P_2 \in \mathscr{D}_2$ distincts de A.

(6) Sur une figure soignée, représenter les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$, ainsi que le point A.

Exercice III

Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = -2 \\ y + 5z = 2 \\ -2x - 4y - 3z = 9 \end{cases}$$

Exercice IV

Déterminer toutes les solutions de l'équation matricielle $B\,\vec{y} = \vec{y_0}$, où :

$$B := \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix}, \qquad \vec{y} := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \qquad \vec{y_0} := \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Exercice V
(1) En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes, mettre sous forme échelonnée *réduite* la matrice suivante :

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 9 & 11 \end{array}\right)$$

(2) Déterminer tous les triplets $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ qui sont solutions du système d'équations linéaires à trois équations et trois inconnues correspondant à la matrice augmentée (ou complète) de la question précédente. L'ensemble des solutions est-il un singleton, une droite ou bien un plan de $\mathbf{R}^3$?

Exercice VI

Dans l'espace $\mathbf{R}^3$, on considère le plan $\mathscr{P}_1$ d'équation cartésienne $-2x + y + 5z = -1$ et le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation cartésienne $x - y + 2z = -7$.
(1) Déterminer l'intersection $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$.
(2) Montrer que $\mathscr{D} := \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ est une droite et en déterminer un paramétrage $M(t) = (x(t), y(t), z(t))$ pour $t \in \mathbf{R}$. Vérifier sur votre copie que pour tout $t \in \mathbf{R}$, le point $M(t)$ satisfait effectivement les équations des deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
(3) Déterminer un vecteur directeur et deux points distincts de $\mathscr{D}$.

On considère une droite Δ donnée par le paramétrage $M'(t) = (-3 - t, 2 + t, -1 + t)$ pour $t \in \mathbf{R}^3$.
(4) Montrer que l'intersection $\Delta \cap \mathscr{P}_1$ consiste en un unique point que l'on notera A et dont on déterminera les trois coordonnées. Écrire sur votre copie la vérification du fait que les coordonnées que vous avez trouvées satisfont bien l'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_1$.
(5) Déterminer l'intersection $\Delta \cap \mathscr{P}_2$.
(6) Montrer que $\mathscr{D} \cap \Delta = \{A\}$.
(7) Reproduire sur votre copie la figure ci-dessous et y représenter les droites Δ (et $\mathscr{D}$) d'une façon qui corresponde à la configuration géométrique rencontrée dans cet exercice.